目 录

图 表 目 录

第 1 章　集合论初步

在这一章中我们介绍有关集合论的一些基本知识. 从未经定义的"集合"和"元素"两个概念出发给出集合运算,关系,映射以及集合的基数等方面的知识. 至于选择公理我们只是稍稍提了一下,进一步的知识待到要用到时再阐述. 这样安排旨在不使读者过早地陷入繁难的逻辑困惑之中.

这里所介绍的集合论通常称为"朴素的集合论",这对大部分读者已经是足够的了. 那些对集合的理论有进一步需求的读者,例如打算研究集合论本身或者打算研究数理逻辑的读者,建议他们去研读有关公理集合论的专著.

即令就朴素集合论本身而言,我们也无意使本章的内容构成一个完全自我封闭的体系,主要是我们没有打算重建数系,而假定读者了解有关正整数,整数,有理数,实数的基本知识,以及其中的四则运算,大小的比较($<$和$\leqslant$),和实数理论中关于实数的完备性的论断(任何由实数构成的集合有上界必有上确界)等,它们对于读者决不会是陌生的. 此外,对于通常的(算术)归纳原则也按读者早已熟悉的方式去使用,而不另作逻辑上的处理.

§1.1　集合的基本概念

集合这一概念是容易被读者所理解的,它指的是由某些具有某种共同特点的个体构成的集体. 例如我们常说"正在这里听课的全体学生的集合","所有整数的集合"等等. 集合也常称为**集**,**族**,**类**.

集合(即通常所谓的"集体")是由它的**元素**(即通常所谓的"个体")构成的.例如正在这里听课的全体学生的集合以正在听课的每一个学生为它的元素;所有整数的集合以每一个整数为它的元素.元素也常称为**元**,**点**,或**成员**.

集合也可以没有元素.例如平方等于2的有理数的集合,既大于1又小于2的整数的集合都没有任何元素.这种没有元素的集合我们称之为**空集**,记作$\varnothing$.此外,由一个元素构成的集合,我们常称为**单点集**.

用文句来描述一个集合由哪些元素构成(像前面所作的那样),是定义集合的一个重要方式.此外,我们还通过以下的方式来定义集合:记号

$$\{x \mid 关于\ x\ 的一个命题P\}$$

表示使花括号中竖线后面的那个命题P成立的所有元素x构成的集合.例如,集合$\{x \mid x\ 为实数,并且\ 0<x<1\}$即通常所谓开区间$(0,1)$.在运用集合这种定义方式时有时允许一些变通,例如集合$\{x^2 \mid x\ 是实数\}$便是集合$\{y \mid y=x^2,其中\ x\ 是实数\}$的简略表示,不难明白这个集合实际上是由全体非负实数构成的.集合表示方式中的竖线"|"也可用冒号":"或分号";"来代替.此外,也常将一个集合的所有元素列举出来再加上花括号以表示这个集合.例如$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$表示由元素$a_1,a_2,\cdots,a_n$构成的集合.如果确实不至于发生混淆,在用列举的办法表示集合时容许某种省略.例如,有时我们可以用$\{1,2,3,\cdots\}$表示全体正整数构成的集合,用$\{1,3,5,\cdots\}$表示全体正奇数构成的集合.然而,在上述两个集合中前者有可能会被误解为全体正素数构成的集合,而后者也有可能会被误解为全体正奇素数构成的集合.因此,我们并不鼓励这种做法,除非从上下文的陈述中我们能够得到不被误解的保证.我们再三提请读者注意:不管你用任何一种方式定义集合,最重要的是不允许产生歧义,也就是说你所定义的集合的元素应当是完全确定的.

在本书中,我们用:

$\mathbb{Z}_+$ 表示全体正整数构成的集合,称为 **正整数集**;

$\mathbb{Z}$ 表示全体整数构成的集合,称为 **整数集**;

$\mathbb{Q}$ 表示全体有理数构成的集合,称为 **有理数集**;

$\mathbb{R}$ 表示全体实数构成的集合,称为 **实数集**,

并且假定读者熟知这些集合.

设 A 是一个集合,a 是一个元素.如果 a 是 A 的元素,记作 $a \in A$,读为 a **属于** A;如果 a 不是 A 的元素,则记作 $a \notin A$,读为 a **不属于** A.例如,我们有:$2 \in \mathbb{Z}_+$,$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ 等等.对于任何集合 A 和任何元素 a,$a \in A$ 和 $a \notin A$ 这两者必有且仅有一个成立.

我们总用等号"="表示逻辑上的同一,例如 $a = b$ 表示符号 a 和 b 代表着同一个事物.因此,如果 A 和 B 是两个集合,$A = B$ 读为 A **等于** B,表示它们是由相同的元素构成的集合,即 A 的每一个元素都是 B 的元素,并且 B 的每一个元素也都是 A 的元素.将这意思表达得更为形式一点便是:若 $x \in A$ 则 $x \in B$;并且若 $x \in B$,则 $x \in A$.这是验证两个集合相等的最为基本的方式.不等号 $\neq$ 是等号 $=$ 的否定.如果 A 和 B 是两个集合,$A \neq B$ 读为 A **不等于** B,意味着或者 A 中至少有一个元素不是 B 的元素,或者 B 中至少有一个元素不是 A 的元素,亦即或者存在 $x \in A$ 使得 $x \notin B$,或者存在 $x \in B$ 使得 $x \notin A$.

以下的这个定理等价于形式逻辑中的相应命题,从直觉看去也是自明的.

定理 1.1.1 设 A, B, C 都是集合.则

(1) $A = A$;

(2) 若 $A = B$,则 $B = A$;

(3) 若 $A = B$,$B = C$,则 $A = C$. ■

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素,即:若 $x \in A$,则 $x \in B$,我们便记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$,分别读为 A **包含于** B 和 B

包含 A.

定理 1.1.2 设 A,B,C 都是集合.则

(1) $A\subset A$;

(2) 若 $A\subset B,B\subset A$,则 $A=B$;

(3) 若 $A\subset B,B\subset C$,则 $A\subset C$.

证明 (1) 显然.

(2) $A\subset B$ 意即:若 $x\in A$,则 $x\in B$;$B\subset A$ 意即:若 $x\in B$,则 $x\in A$.这两者合起来正好就是 $A=B$ 的意思.

(3) 设 $x\in A$.由于 $A\subset B$,故 $x\in B$;又由于 $B\subset C$,从而 $x\in C$.综上所述,如果 $x\in A$ 就有 $x\in C$.此意即 $A\subset C$. ■

空集不含任何元素,所以它包含于每一个集合之中.由此我们可以得出结论:空集是唯一的.因为如果 $\varnothing_1$, $\varnothing_2$ 都是空集,据前说应当有 $\varnothing_1\subset\varnothing_2$,以及 $\varnothing_2\subset\varnothing_1$.根据定理 1.1.2 可见,$\varnothing_1=\varnothing_2$.

设 A,B 是两个集合.如果 $A\subset B$,我们则称 A 为 B 的**子集**;如果 A 是 B 的子集,但 A 又不等于 B,即 $A\subset B,A\neq B$,也就是说 A 的每一个元素都是 B 的元素,但 B 中至少有一个元素不是 A 的元素,这时,我们称 A 为 B 的**真子集**,并且记作 $A\subsetneqq B$ 或者 $B\supsetneqq A$.

下述定理 1.1.3 的证明就像定理 1.1.2 的证明一样简单,我们留作习题.

定理 1.1.3 设 A,B,C 都是集合.则

(1) $A\subsetneqq A$ 不成立;

(2) $A\subsetneqq B$ 和 $B\subsetneqq A$ 不能同时成立;

(3) 如果 $A\subsetneqq B$,并且 $B\subsetneqq C$,则 $A\subsetneqq C$. ■

我们常常需要讨论以集合作为元素的集合,并且为了强调这一特点,这类集合常称为**集族**,并多用花写字母 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},\cdots\cdots$来表示.例如,若 $\mathscr{A}=\{\{1\},\{1,2\},\varnothing\}$,则 $\mathscr{A}$ 是一个集族,它的三个元

素分别是单点集$\{1\}$,由两个元素组成的集合$\{1,2\}$,和空集$\varnothing$.

设X是一个集合,我们常用$\mathscr{P}(X)$表示X的所有子集构成的集族,称为集合X的**幂集**.例如,集合$\{1,2\}$的幂集是$\mathscr{P}(\{1,2\})=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$.

本章中所介绍的集合论是所谓"朴素的"集合论.在这种集合论中,"集合"和"元素"等基本概念均不加定义而被认作是自明的.正因为如此,历史上曾经产生过一些悖论.然而对于绝大多数读者来说了解朴素的集合论已是足够的了,只是要求他们在运用的时候保持适当的谨慎,以免导致逻辑矛盾.例如,我们应当知道一个集合本身不能是这个集合的一个元素.即:若A是集合,则$A\in A$不成立.这一点是容易理解的.例如,由一些学生组成的一个班级决不会是这个班级里的一名学生.因此,我们不能说"所有集合构成的集合",因为如果有这样一个"集合"的话,它本身既是一个集合,就应当是这个"所有集合构成的集合"的一个元素了.也因此,我们应当能够了解一个元素a和仅含一个元素a的单点集$\{a\}$是两回事,尽管我们有时为了行文的简便而忽略这个区别.

习　　题

1. 试在下列集合中确定:哪些集合是空集?哪些集合是相等的?哪些集合间有包含关系?哪些集合间有真子集关系?

(1) $A=\{x\mid x\in\mathbb{Z}$并且存在$y\in\mathbb{Z}$使得$x=2y\}$;

(2) $B=\{2\}$;

(3) $C=\{x\mid x\in A$,且$x^2=1\}$;

(4) $D=\{x\mid x\in A$,且x为素数$\}$;

(5) $E=\{x\mid x\in\mathbb{Q}$,且$x^2=2\}$.

2. 试判断以下关系式的正确与错误:

$A=\{A\}$;　　$A\in\{A\}$;　　$\varnothing\subset\{\varnothing\}$;

$\varnothing=\{\varnothing\}$;　　$\varnothing\in\{\{\varnothing\}\}$.

3. 设$A_1,A_2,\cdots,A_n$都是集合,其中$n\geqslant 1$.证明:如果

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n \subset A_1$$

则

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n$$

4. 设 $X = \{a, b, c\}$. 写出 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$.

5. 设 X 为由 n 个互不相同的元素构成的集合. X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 中有多少个互不相同的元素?

§1.2 集合的基本运算

在这一节中我们介绍集合的并,交,差三种基本运算,这三种运算的基本规律,以及它们与集合的包含关系之间的基本关联.

定义 1.2.1 设 A 与 B 是两个集合. 集合

$$\{x \mid x \in A \text{ 或者 } x \in B\}$$

称为集合 A 与集合 B 的**并集**或**并**,记作 $A \cup B$,读为 A **并** B. 集合

$$\{x \mid x \in A \text{ 并且 } x \in B\}$$

称为集合 A 与集合 B 的**交集**或**交**,记作 $A \cap B$,读为 A **交** B. 若 $A \cap B = \varnothing$,则称集合 A 与集合 B **无交**或**不相交**;反之,若 $A \cap B \neq \varnothing$,则称集合 A 与集合 B **有(非空的)交**. 集合

$$\{x \mid x \in A \text{ 并且 } x \notin B\}$$

称为集合 A 与集合 B 的**差集**,记作 $A \setminus B$ 或 $A - B$,读为 A **差** B,或 A **减** B.

关于集合的并,交,差三种运算之间,有以下的基本规律.

定理 1.2.1 设 A, B, C 都是集合. 则以下等式成立:

(1) 幂等律

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

(2) 交换律

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A\cap B=B\cap A$$

(3) 结合律

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$$

(4) 分配律

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$$
$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

(5) De Morgan 律

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$$
$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$$

证明 验证这些集合等式的基本方法是验证每一个等式中居于等号左边的集合中的每一个元素都是居于等号右边的集合的元素,并且居于等号右边的集合中的每一个元素都是居于等号左边的集合的元素.我们不打算验证这里的全部十个等式,而只是验证两个作为例子.其余各个等式的验证请读者自己完成.

作为第一个例子我们验证结合律中的后一个等式如下:若 $x\in(A\cap B)\cap C$,则 $x\in A\cap B$,并且 $x\in C$.于是 $x\in A$,$x\in B$,并且 $x\in C$.从而 $x\in A$,并且 $x\in B\cap C$.因此 $x\in A\cap(B\cap C)$.根据以上论证我们有

$$(A\cap B)\cap C\subset A\cap(B\cap C)$$

用同样的办法我们也可以得到

$$(A\cap B)\cap C\supset A\cap(B\cap C)$$

(请读者自己补证).综合这两个包含关系我们便证明了需证的等式.

作为第二个例子我们验证 De Morgan 律中的前一个等式如下:若 $x\in A-(B\cup C)$,则 $x\in A$ 并且 $x\notin B\cup C$,于是 $x\in A$ 并且 $x\notin B$,$x\notin C$,从而 $x\in A-B$ 并且 $x\in A-C$,因此 $x\in(A-B)\cap(A-C)$.这样我们便证明了

$$A-(B\cup C)\subset(A-B)\cap(A-C)$$

用类似的证明方式又可以得到

$$A-(B\cup C)\supset(A-B)\cap(A-C)$$

(请读者自己补证.)综合这两个包含关系我们便证明了需证的等式. ■

集合的并,交,差三种运算与集合间的包含关系之间有着以下基本关联.

定理 1.2.2 设 A,B 是两个集合.下列三个条件等价:

(1) $A\subset B$;

(2) $A\cap B=A$;

(3) $A\cup B=B$.

证明 条件(1)蕴含(2).已知 $A\subset B$,若 $x\in A$,则 $x\in B$,故 $x\in A\cap B$.这证明 $A\subset A\cap B$.另一方面,若 $x\in A\cap B$,则 $x\in A$ 并且 $x\in B$.因此 $A\cap B\subset A$.综合两个包含关系即得 $A\cap B=A$.

条件(2)蕴含(1).由于 $A\cap B=A$,故有 $A\cap B\supset A$,即若 $x\in A$,则 $x\in A$ 并且 $x\in B$.这证明 $A\subset B$.

条件(1)等价于(3)的证明完全类似,留给读者补证. ■

我们在讨论某一个具体问题时,所涉及的各个集合往往都是某一个特定的"大的"集合的子集.例如在平面几何学中,我们研究的所有图形都是"全平面"这样一个集合的子集.这时,这个包含着我们在特定的情形下讨论的所有集合的这样一个集合,我们称之为**基础集**.正如我们在研究平面几何时并不每次都繁琐地指出这个平面一样,当我们研究问题中的基础集自明时,我们也不必每次提起.

定义 1.2.2 设 X 是一个基础集.对于 X 的任何一个子集 A,我们称 $X-A$ 为 A(相对于基础集 X 而言)的**补集**或**余集**,并且记作 $\complement A$,为了方便起见有时也记作 A'.

我们应当提醒读者,补集 A' 的定义与基础集的选取有关.所以在研究某一个问题时,若用到补集这个概念,在整个工作过程中基础集必需保持不变.

定理 1.2.3 设 X 是一个基础集. 若 A、B 为 X 的子集，则

$$A\cup\varnothing=A;\qquad A\cap\varnothing=\varnothing$$

$$A\cup X=X;\qquad A\cap X=A$$

$$A\cup A'=X;\qquad A\cap A'=\varnothing$$

$$(A\cup B)'=A'\cap B';\qquad (A\cap B)'=A'\cup B'$$

$$A''=A$$

证明 定理第四行等式是定理 1.2.1(5)的特殊情形. 其它各款的证明容易，留给读者补证. ■

我们按如下归纳的方式定义 $n\in\mathbb{Z}_+$ 个任意集合的**并(并集)**与**交(交集)**：当 $n=1$ 时，某一个集合的并和交都定义为这个集合自身；当 $n\geqslant 2$ 时，假定 $n-1$ 个任意集合的并与交已定义. 设 A_1，A_2，…，A_n 是 n 个集合，则它们的并与交分别定义为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{n-1})\cup A_n$$

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1})\cap A_n$$

n 个集合的并 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 有时也写作 $\bigcup_{i=1}^n A_i$；n 个集合的交 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 有时也写作 $\bigcap_{i=1}^n A_i$.

由于定理 1.2.1 中给出的交换律和结合律，可见在并 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 与交 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 中，诸 A_i 可以互换位置，也可以任意(用括号)指定运算次序，就像对待通常实数的加法和乘法运算那样.

还要提请读者注意的是：有时我们会用到“有限个集合的并(或交)”这样一个说法，这样说时总是指“某 $n\in\mathbb{Z}_+$(即 $n\geqslant 1$)个集合的并(或交)”. 请读者注意，我们迄今并未定义过 0 个集合的并(或交)，尽管我们将来还会以某种方式定义“0 个集合的并”，但我们永远不用“0 个集合的交”这种说法. (参见 §1.6.)

习 题

直到现在为止，我们在正文中验证集合间的包含和相等的关系都是通过

最原始的办法,即通过验证一个集合的元素是否属于另一个集合来作的.本节中的定理1.2.1总结了集合运算的最基本,最重要的性质,定理1.2.2将集合间的包含关系用集合运算的语言表达了出来,而定理1.2.3又给出了一些简明的表达方式.这些定理为我们验证集合的包含与相等提供了方便的工具,建议读者在完成习题的时候尽量利用它们.

1. 设 A,B,C 都是集合.证明:

(1) $A\subset A\cup B$,以及 $A\supset A\cap B$;

(2) 若 $A\subset B$,则有 $A\cup C\subset B\cup C$ 和 $A\cap C\subset B\cap C$;

(3) 若 $A\subset B$,则 $B-(B-A)=A$.

2. 设某一个基础集已经给定.证明:

(1) $A-B=A\cap B'$;

(2) $A-B=(A\cup B)-B=A-A\cap B$;

(3) 若 $A\cup B=X$,并且 $A\cap B=\varnothing$,则有 $A'=B$ 和 $B'=A$;

(4) $(A_1-B_1)\cap(A_2-B_2)=(A_1\cap A_2)-(B_1\cup B_2)$.

3. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,B$ 都是集合,其中 n 为正整数.证明:

(1) 分配律

$$B\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)$$

$$B\cup\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(B\cup A_i)$$

(2) De Morgan 律

$$B-\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcap_{i=1}^{n}(B-A_i)$$

$$B-\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}(B-A_i)$$

4. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都是集合,其中 n 为正整数.证明:

$$\begin{aligned}&(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)-(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)\\&=(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_{n-1}-A_n)\cup(A_n-A_1)\end{aligned}$$

5. 设 A 和 B 是两个集合.定义 A 与 B 的对称差 $A\oplus B$ 为

$$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$$

证明:集合的对称差运算满足交换群公理,即:如果 A,B 和 C 都是集合,则

(1) $A\oplus B=B\oplus A$;

(2) $A\oplus\varnothing=A$;

(3) 存在一个集合 $\tilde{A}$，使得 $A\oplus\tilde{A}=\varnothing$；

(4) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$.

6*. 证明：$n>0$ 个集合经过并，交，差三种运算最多能生成 2^{2^n-1} 个互不相同的集合，并且确实有 $n>0$ 个集合，它们经过并，交，差三种运算恰能生成 2^{2^n-1} 个互不相同的集合.

§1.3 关系

我们从前在数学的各种科目中学过诸如函数，次序，运算，以及等价等种种概念，它们的一个共同的特点在于给出了某些给定集合的元素之间的某种联系.为了明确地定义它们，我们先定义"关系".而为了定义关系，又必需先有两个集合的笛卡儿积这个概念.

定义 1.3.1 设 X 和 Y 是两个集合.集合

$$\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$$

称为 X 与 Y 的笛卡儿积，记作 $X\times Y$，读为 X 叉乘 Y.其中 (x,y) 是一个有序偶，x 称为 (x,y) 的第一个坐标，y 称为 (x,y) 的第二个坐标.X 称为 $X\times Y$ 的第一个坐标集，Y 称为 $X\times Y$ 的第二个坐标集.集合 X 与自身的笛卡儿积 $X\times X$ 称为 X 的 **2 重(笛卡儿)积**，通常简单记作 X^2.

一些精明的读者可能会对上面的这个定义提出异议，因为其中出现了一个未经定义的概念"有序偶".为了消释这部分读者的疑虑，我们给出以下有序偶的定义.

定义 1.3.2 一个单点集 A 和由最多不超过两个元素构成的一个集合 B 两者组成的集族 $\{A,B\}$ 如果满足条件：$A\subset B$，则称为一个**有序偶**，并且记作 (x,y)，其中 x 为满足条件 $\{x\}=A\cap B$ 的唯一元素，y 为满足条件 $\{x,y\}=A\cup B$ 的唯一元素.

有点儿不幸的是我们用于有序偶的记号和用于"开区间"的记

号是一样的，有时容易混淆. 因此在可能发生混淆的情形下应当有必要的说明，以避免误解.

给定两个集合，通过取它们的笛卡儿积以得到一个新的集合，这个办法对于读者并不陌生. 以前学过的数学中通过实数集合构作复数集合，通过直线构作平面时，用的都是这个办法.

我们应当注意，一般说来集合 X 与集合 Y 的笛卡儿积 $X\times Y$ 完全不同于集合 Y 与集合 X 的笛卡儿积 $Y\times X$.

定义 1.3.3 设 X,Y 是两个集合. 如果 R 是 X 与 Y 的笛卡儿积 $X\times Y$ 的一个子集，即 $R\subset X\times Y$，则称 R 是从 X 到 Y 的一个**关系**.

定义 1.3.4 设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系，即 $R\subset X\times Y$. 如果 $(x,y)\in R$，则我们称 x 与 y 是 R **相关的**，并且记作 xRy. 如果 $A\subset X$，则 Y 的子集

$$\{y\in Y\mid 存在\ x\in A\ 使得\ xRy\}$$

称为**集合 A 对于关系 R 而言的象集**，或者简单地称为集合 A 的**象集**，或者称为集合 A 的 **R 象**，并且记作 $R(A)$，$R(X)$ 称为关系 R 的**值域**.

关系的概念是十分广泛的. 读者很快便会看到，以前在另外的数学学科中学过的函数(映射)，等价，序，运算等等概念都是关系的特例. 这里有两个特别简单的从集合 X 到集合 Y 的关系，一个是 $X\times Y$ 本身，另一个是空集 $\varnothing$. 请读者自己对它们进行简单的考查.

定义 1.3.5 设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系，即 $R\subset X\times Y$. 这时笛卡儿积 $Y\times X$ 的子集

$$\{(y,x)\in Y\times X\mid xRy\}$$

是从集合 Y 到集合 X 的一个关系，我们称它为关系 R 的**逆**，并且记作 R^{-1}. 如果 $B\subset Y$，X 的子集 $R^{-1}(B)$ 是集合 B 的 R^{-1} 象，我们也常称它为集合 B 对于关系 R 而言的**原象**，或者集合 B 的 **R 原象**. 特别，关系 R^{-1} 的值域 $R^{-1}(Y)$ 也称为关系 R 的**定义域**.

定义 1.3.6 设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系，即 $R\subset X\times Y$，S 是从集合 Y 到集合 Z 的一个关系，即 $S\subset Y\times Z$. 集合

$$\{(x,z)\in X\times Z \mid \text{存在 } y\in Y \text{ 使得 } xRy \text{ 并且 } ySz\}$$

是笛卡儿积 $X\times Z$ 的一个子集，即从集合 X 到集合 Z 的一个关系，此关系称为关系 R 与关系 S 的**复合或积**，记作 $S\circ R$.

定理 1.3.1 设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系，S 是从集合 Y 到集合 Z 的一个关系，T 是从集合 Z 到集合 U 的一个关系. 则：

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$；

(2) $(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$；

(3) $T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$.

证明 (1) $(x,y)\in(R^{-1})^{-1}$ 意即 $x(R^{-1})^{-1}y$，这当且仅当 $yR^{-1}x$，而这又当且仅当 xRy，然而这就是 $(x,y)\in R$ 的意思. 于是我们证明了 $(R^{-1})^{-1}=R$.

(2)和(3)的证明都像(1)一样根据定义直接验证，请读者自己补证. ■

定理 1.3.2 设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系，S 是从集合 Y 到集合 Z 的一个关系. 则对于 X 的任意两个子集 A 和 B，我们有：

(1) $R(A\cup B)=R(A)\cup R(B)$；

(2) $R(A\cap B)\subset R(A)\cap R(B)$；

(3) $(S\circ R)(A)=S(R(A))$.

证明 (1)如果 $y\in R(A\cup B)$，则存在 $x\in A\cup B$ 使得 xRy. 分为两种情形，当 $x\in A$ 时，有 $y\in R(A)$；当 $x\in B$ 时，有 $y\in R(B)$. 总之，只要是 $x\in A\cup B$，我们便有 $y\in R(A)\cup R(B)$. 这样我们便证明了 $R(A\cup B)\subset R(A)\cup R(B)$. 反过来的包含关系的证明是类似的，留给读者去做.

(2)和(3)的证明也都是像(1)的证明一样根据定义进行直接验证,请读者自己补证. ■

在本节的最后我们要提到有限个集合的笛卡儿积的概念,它是两个集合的笛卡儿积的概念的简单推广.

定义 1.3.7 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 $n\geqslant 1$ 个集合.集合

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1\in X_1,x_2\in X_2,\cdots,x_n\in X_n\}$$

称为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的**笛卡儿积**,并且记作 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 或者 $\prod_{i=1}^n X_i$.其中 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为有次序的 n 元素组,$x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为 n 元素组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的第 i 个**坐标**,$X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为笛卡儿积 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的第 i 个**坐标集**.

$n\geqslant 1$ 个集合 X 的笛卡儿积 $\underbrace{X\times X\times\cdots\times X}_{n\text{个}X}$ 常简单地记作 X^n.

像在两个集合的笛卡儿积的定义中的情形一样,在这个定义中"有次序的 n 元素组"也是一个未经定义的概念,但读者不难发现,仿照前面有序偶的定义方式,容易给出它的严格定义.这件事留给读者自己去做.

n 个集合的笛卡儿积的概念读者必然也不会感到陌生,在线性代数中 n 维欧氏空间作为集合而言就是 n 个直线(作为集合而言)的笛卡儿积.

需要提醒读者的是,如果你在给定的 n 个集合中交换了集合的次序,一般说来得到的笛卡儿积会是完全不同的集合.至今我们并未定义"0 个集合的笛卡儿积",此事将来再以某种方式补充.(参见§9.1.)

习 题

1. 设 $X=\{a,b\}$,$Y=\{c,d,e\}$.试列举笛卡儿积 $X\times Y$ 中的所有元素.

2. 设 X 和 Y 都是集合.证明:对于 X 的任何子集 A,B 和 Y 的任何子集 C,D,有:

$$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(A\times D)\cup(B\times C)\cup(B\times D)$$

$$(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$$

$$(X\times Y)-(A\times C)=((X-A)\times Y)\cup(X\times(Y-C))$$

$$(A-B)\times C=(A\times C)-(B\times C)$$

3. 设 $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{d,e,f,g\}$, $R=\{\{a,d\},\{a,e\},\{b,f\}\}$. 令 $A=\{a,c\}$, $B=\{d,e,g\}$. 试求 $R(A)$, $R^{-1}(B)$, R 的值域, 和 R 的定义域.

4. 设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系. 证明下列条件等价:

(1) 对于任意 $A,B\subset X$, $R(A)\cap R(B)=R(A\cap B)$;

(2) 对于任意 $x,y\in X$, $x\neq y$, $R(\{x\})\cap R(\{y\})=\varnothing$.

5. 设 X_1,X_2,X_3 是三个集合. 什么时候有 $X_1\times X_2\times X_3=X_2\times X_3\times X_1$?

§1.4 等价关系

初等数论中的同余类的概念,群论中的商群的概念,乃至于解析几何中的自由向量的概念等等都是读者所熟知的. 这些概念的精确定义事实上都有赖于本节中所讨论的等价关系的概念. 在本书中我们将通过等价关系来定义拓扑空间的商空间.

定义 1.4.1 设 X 是一个集合. 从集合 X 到集合 X 的一个关系将简称为集合 X 中的一个关系. 集合 X 中的关系 $\{(x,x)\mid x\in X\}$ 称为**恒同关系**,或**恒同**,**对角线**,记作 $\Delta(X)$ 或 Δ.

定义 1.4.2 设 R 是集合 X 中的一个关系. 关系 R 称为**自反的**,如果 $\Delta(X)\subset R$,即对于任何 $x\in X$,有 xRx;关系 R 称为**对称的**,如果 $R=R^{-1}$,即对于任何 $x,y\in X$,如果 xRy 则 yRx;关系 R 称为**反对称的**,如果 $R\cap R^{-1}=\varnothing$,即对于任何 $x,y\in X$, xRy 和 yRx 不能同时成立;关系 R 称为**传递的**,如果 $R\circ R\subset R$,即对于任何 $x,y,z\in X$,如果 xRy, yRz,则有 xRz.

集合 X 中的一个关系如果同时是自反，对称，和传递的，则称为集合 X 中的一个**等价关系**.

容易验证集合 X 中的恒同关系 $\Delta(X)$ 是自反，对称，传递的，因此是 X 中的一个等价关系.

集合 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 中两个元素（即集合 X 的两个子集）之间的"相等关系"可以理解为集合 $\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X)$ 的子集

$$\{(A,B)\mid A,B\in\mathscr{P}(X),A=B\}$$

从定理 1.1.1 中可见，它是自反，对称，传递的，因此是 $\mathscr{P}(X)$ 中的一个等价关系.

集合 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 中两个元素（即集合 X 的两个子集）之间的"包含关系"可以理解为集合 $\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X)$ 的子集

$$\{(A,B)\mid A,B\in\mathscr{P}(X),A\subset B\}$$

根据定理 1.1.2 可见，它是自反的，传递的，但容易知道它不是对称的，因此不是 $\mathscr{P}(X)$ 中的一个等价关系.

集合 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 中两个元素（即集合 X 的两个子集）之间的"真子集关系"可以理解为集合 $\mathscr{P}(X)\times\mathscr{P}(X)$ 的子集

$$\{(A,B)\mid A,B\in\mathscr{P}(X),A\subsetneqq B\}$$

根据定理 1.1.3 可见，它是反对称的，传递的，但它不是自反的，因而不是 $\mathscr{P}(X)$ 中的一个等价关系.

实数集合 $\mathbb{R}$ 中有一个通常的小于关系 $<$，即 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 的子集

$$\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R},x<y\}$$

容易验证关系 $<$ 是反对称的，传递的，但不是自反的.

设 p 是一个素数. 我们在整数集合 $\mathbb{Z}$ 中定义一个关系 $\equiv_p$ 如下：

$$\equiv_p=\{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\mid \text{存在 } n\in\mathbb{Z} \text{ 使得 } x-y=np\}$$

关系 $\equiv_p$ 常称为**模 p 等价关系**. 容易验证模 p 等价关系 $\equiv_p$ 是自反的，对称的，传递的，因此是 $\mathbb{Z}$ 中的一个等价关系.

定义 1.4.3　*设 R 是集合 X 中的一个等价关系. 集合 X 中的两个点 x,y，如果满足条件：xRy，则称 x 与 y 是 R* **等价的**，*或简*

称为**等价的**;对于每一个 $x\in X$,集合 X 的子集 $\{y\in X\mid xRy\}$ 称为 x 的 R **等价类**或**等价类**,常记作 $[x]_R$ 或 $[x]$,并且任何一个 $y\in[x]_R$ 都称为 R 等价类 $[x]_R$ 的一个代表元素;集族 $\{[x]_R\mid x\in X\}$ 称为集合 X 相对于等价关系 R 而言的**商集**,记作 X/R.

我们考虑整数集合 $\mathbb{Z}$ 中的模 2 等价关系 $\equiv_2$. 易见,$1\equiv_2 3$ 和 $2\equiv_2 8$. 因此 1 与 3 是 $\equiv_2$ 等价的,2 和 8 也是 $\equiv_2$ 等价的. 整数 2 所属的等价类是所有偶数构成的集合,每一个偶数都可以叫做这个等价类的一个代表元素. 此外易见,商集 $\mathbb{Z}/\equiv_2$ 有且仅有两个元素:一个是所有奇数构成的集合,另一个是所有偶数构成的集合.

下面这个定理说明,给定了一个等价关系,等于说给定了一个分类的原则,把一个非空集合分割成一些非空的两两无交的等价类,使得这集合的每一个元素都在某一个等价类中.

定理 1.4.1 设 R 是非空集合 X 中的一个等价关系. 则:

(1) 如果 $x\in X$,则 $x\in[x]_R$,因而 $[x]_R\neq\varnothing$;

(2) 对于任意 $x,y\in X$,或者 $[x]_R=[y]_R$,或者 $[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$.

证明 (1) 设 $x\in X$,由于 R 是自反的,所以 xRx,因此 $[x]_R\neq\varnothing$.

(2) 对于任意 $x,y\in X$,如果 $[x]_R\cap[y]_R\neq\varnothing$,设 $z\in[x]_R\cap[y]_R\neq\varnothing$. 此时有 zRx 和 zRy. 由于 R 是对称的,所以 xRz. 又由于 R 是传递的,所以 xRy.

对于任何一个 $t\in[x]_R$,有 tRx,由上述 xRy 和 R 的传递性可见 tRy,即 $t\in[y]_R$. 这证明 $[x]_R\subset[y]_R$.

同理可证 $[y]_R\subset[x]_R$. 因此 $[x]_R=[y]_R$. ■

在初等数论中我们早就知道整数模(素数)p 的等价关系 $\equiv_p$ 将整数集合 $\mathbb{Z}$ 分为互不相交的等价类,每一个等价类 $[x]_{\equiv_p}$ 常简单地记作 $[x]_p$,称为整数 x 的模 p 同余类.

让我们再回忆一下在解析几何学中定义自由向量的过程：首先将固定向量定义为平面(或 n 维欧氏空间)中的有序偶；然后在全体固定向量构成的集合(暂时记为 X)中定义一个关系 $\sim$，使得两个固定向量 x 和 $y \sim$ 相关(即 $x \sim y$)当且仅当 x 能通过平面(或 n 维欧氏空间)的一个平移与 y 重合. 容易验证这个关系 $\sim$ 是 X 中的一个等价关系. 每一个 $\sim$ 等价类便称为一个自由向量.

习　题

1. 举出满足自反，对称，传递三性质中的两条而不满足其余一条的关系的例子.

2. 设 R 是集合 X 中的一个对称，传递的关系. 证明 R 是一个等价关系当且仅当 R 的定义域为 X.

3. 试给出实数集合$\mathbb{R}$中的一个等价关系 R，它使得商集

$$\mathbb{R}/R = \{\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}, \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}\}$$

4. 实数集合$\mathbb{R}$中的一个关系 R 定义为

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \in \mathbb{Z}\}$$

证明 R 是一个等价关系.

5. 设 R_1, R_2 是集合 X 中的两个等价关系. 证明 $R_1 \circ R_2$ 仍然是集合 X 中的一个等价关系当且仅当 $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$.

§1.5　映射

数学分析中的函数概念，群论中的同态概念，线性代数中的线性变换概念等等都是读者所熟知的概念. 这些概念的精确定义事实上都有赖于本节中所讨论的映射概念.

定义 1.5.1　设 F 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系. 如果对于每一个 $x \in X$ 存在唯一的一个 $y \in Y$ 使得 xFy，则称 F 是从 X 到 Y 的一个**映射**，并且记作 $F: X \to Y$. 换言之，F 是一个映射，如

果对于每一个 $x\in X$:

(1) 存在 $y\in Y$,使得 xFy;

(2) 如果对于 $y_1,y_2\in Y$ 有 xFy_1 和 xFy_2,则 $y_1=y_2$.

定义 1.5.2 设 X 和 Y 是两个集合,$F:X\to Y$(读做 F 是从 X 到 Y 的一个映射).对于每一个 $x\in X$,使得 xFy 的唯一的那个 $y\in Y$ 称为 x 的**象**或**值**,记作 $F(x)$;对于每一个 $y\in Y$,如果 $x\in X$ 使得 xFy(即 y 是 x 的象),则称 x 是 y 的一个原象.(注意:$y\in Y$ 可以没有原象,也可以有不止一个原象.)

由于映射本身便是关系,因此,如果 F 是从集合 X 到集合 Y 的一个映射,那么:

(1) 对于任何 $A\subset X$,象 $F(A)$有定义,并且

$$F(A)=\{F(x)\mid x\in A\}$$

(2) 对于任何 $B\subset Y$,原象 $F^{-1}(B)$有定义,并且

$$F^{-1}(B)=\{x\in X\mid F(x)\in B\}$$

(3) 如果 Z 也是一个集合并且 $G:Y\to Z$,则关系的复合 $G\circ F$ 作为一个从 X 到 Z 的关系有定义;

(4) F^{-1}作为从 Y 到 X 的一个关系有定义,但一般说来 F^{-1} 不是一个从 Y 到 X 的映射;

(5) F 的定义域有定义,并且它就是 X;

(6) F 的值域有定义,并且它就是 $F(X)$.

定理 1.5.1 设 X,Y 和 Z 都是集合.如果 $F:X\to Y$ 和 $G:Y\to Z$,则 $G\circ F:X\to Z$;并且对于任何 $x\in X$,有

$$G\circ F(x)=G(F(x))$$

证明 本定理前一个结论的证明即验证关系 $G\circ F$ 满足映射的定义中的要求.首先,对于每一个 $x\in X$,令 $y=F(x)$,即 xFy;令 $z=G(y)$,即 yGz.从而根据关系复合的定义,我们便有 $xG\circ Fz$.其次,若设 $z_1,z_2\in Z$ 使得 $xG\circ Fz_1$ 和 $xG\circ Fz_2$,则

存在 $y_1\in Y$ 使得 xFy_1 和 y_1Gz_1；也存在 $y_2\in Y$ 使得 xFy_2 和 y_2Gz_2. 由于 F 和 G 都是映射，从 xFy_1 和 xFy_2 可见 $y_1=y_2$，从 y_1Gz_1 和 y_2Gz_2 又可见 $z_1=z_2$. 所以我们有 $G\circ F:X\to Z$.

从上一段的证明中我们已经可见，$G\circ F(x)=G(F(x))$ 对于每一个 $x\in X$ 成立，即本定理的后一个结论为真. ■

今后我们常用小写字母 $f,g,h,\cdots\cdots$ 表示映射.

定理 1.5.2 设 X 和 Y 是两个集合，$f:X\to Y$. 如果 $A,B\subset Y$，则

(1) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$；

(2) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$；

(3) $f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)$.

简言之，映射的原象保持集合的并，交，差运算.

证明 由于 f^{-1} 是一个关系，所以根据定理 1.3.2，本定理第(1)款中的等式无须证明；为证明第(2)款中的等式也只要补充证明

$$f^{-1}(A\cap B)\supset f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$$

现证明如下：设 $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$. 由于 $x\in f^{-1}(A)$，故 $f(x)\in A$；由于 $x\in f^{-1}(B)$，故 $f(x)\in B$. 从而 $f(x)\in A\cap B$，即 $x\in f^{-1}(A\cap B)$. 因此以上要证明的包含关系成立.

第(3)款的等式的证明也是直接的，请读者自己补证. ■

定义 1.5.3 设 X 和 Y 是两个集合，$f:X\to Y$. 如果 Y 中的每一个点都有原象(即 f 的值域为 Y，亦即 $f(X)=Y$)，则称 f 是一个**满射**，或者称 f 为一个**从 X 到 Y 上的映射**；如果 X 中不同的点的象是 Y 中不同的点(即对于任何 $x_1,x_2\in X$，如果 $x_1\neq x_2$，则有 $f(x_1)\neq f(x_2)$)，则称 f 是一个**单射**；如果 f 既是一个单射又是一个满射，则称 f 为一个**既单且满的映射**，或者**一一映射**.

如果 $f(X)$ 是一个单点集，则称 f 是一个**常值映射**，并且当 $f(X)=\{y\}$ 时，我们也说 f 是一个**取常值 y 的映射**.

易见,集合 X 中的恒同关系 $\Delta(X)$ 是从 X 到 X 的一个一一映射,我们也常称之为(集合 X 上的)**恒同映射**或**恒同**,有时也称之为**单位映射**,并且也常用记号 i_X 或 $i: X \to X$ 来表示它.根据定义易见,对于任何 $x \in X$,有 $i_X(x) = x$.概言之,恒同映射便是把每一个点映为这个点自身的映射.

由于下面的这个定理,一一映射也称为**可逆映射**.

定理 1.5.3 设 X 和 Y 是两个集合.又设 $f: X \to Y$.如果 f 是一个一一映射,则 f^{-1} 便是一个从 Y 到 X 的映射(因此我们可以写 $f^{-1}: Y \to X$),并且是既单且满的.此外我们还有:

$$f^{-1} \circ f = i_X \quad 和 \quad f \circ f^{-1} = i_Y$$

证明 首先证明 f^{-1} 是一个映射.由于 f 是满的,故对于任何一个 $y \in Y = f(X)$,存在 $x \in X$ 使得 $y = f(x)$,即 x 与 y 是 f 相关的,亦即 y 与 x 是 f^{-1} 相关的;其次如果有 $x_1, x_2 \in X$ 使得 y 与 x_1,y 与 x_2 分别是 f^{-1} 相关的,亦即 $y = f(x_1)$ 和 $y = f(x_2)$,由于 f 是单的,所以 $x_1 = x_2$.这就完成了 $f^{-1}: Y \to X$ 的证明.

f^{-1} 是满的.因为对于任意 $x \in X$,如果令 $y = f(x) \in Y$,则 $x = f^{-1}(y)$.从而 $f^{-1}(Y) = X$.

f^{-1} 是单的.因为如果有 $y_1, y_2 \in Y$ 使得 $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = x \in X$,则有 $y_1 = f(x) = y_2$.

现在来验证 $f^{-1} \circ f = i_X$.对于任何一个 $x \in X$,若令 $x_1 = (f^{-1} \circ f)(x)$,则 $x_1 = f^{-1}(f(x))$,从而 $f(x) = f(x_1)$.由于 f 是单射,故 $x = x_1$.于是 $x = (f^{-1} \circ f)(x)$ 对于任何 $x \in X$ 成立.这就证明了 $f^{-1} \circ f = i_X$.等式 $f \circ f^{-1} = i_Y$ 的证明类似. ■

定理 1.5.4 设 X, Y 和 Z 都是集合,$f: X \to Y$,$g: Y \to Z$.如果 f 和 g 都是单射,则 $g \circ f: X \to Z$ 也是单射;如果 f 和 g 都是满射,则 $g \circ f: X \to Z$ 也是满射.因此,如果 f 和 g 都是一一映

射，则 $g\circ f:X\to Z$ 也是一一映射.

这个定理的证明留给读者. ■

定义 1.5.4 设 X 和 Y 是两个集合，A 是 X 的一个子集. 映射 $f:X\to Y$ 和 $g:A\to Y$ 如果满足条件 $g\subset f$，即对于任何 $a\in A$ 有 $f(a)=g(a)$，则称 g 是 f 的**限制**，也称 f 是 g 的一个**扩张**，记作 $g=f|_A$. 特别地，恒同映射 $i_X:X\to X$ 在 X 的子集 A 上的限制 $i_X|_A:A\to X$ 称为**内射**. 这时我们有对于任何 $a\in A$，$i_X|_A(a)=a$.

将映射定义作为一种特别的关系，从理论上来说是十分清晰的. 这样做的本意在于使得在我们的理论系统中除了"集合"和"元素"不再有任何未经定义的对象. 如果每一次定义一个映射都要将这个映射写成它的定义域与值域的笛卡儿积的一个子集，这毕竟是件麻烦事；因此我们在定义映射时宁愿采用我们从前惯用的办法：为定义域中的每一个点指定值域中的一个点作为它的象. 以下我们定义往后经常要用到的两个映射作为例子.

定义 1.5.5 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 $n\geqslant 1$ 个集合，$1\leqslant i\leqslant n$. 从笛卡儿积 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 到它的第 i 个坐标集 X_i 的**投射**（或称**第 i 个投射**）$p_i:X\to X_i$ 定义为对于每一个 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X$，$p_i(x)=x_i$.

事实上，第 i 个投射 p_i 的上述定义便是定义

$$\begin{aligned}p_i&=\{((x_1,x_2,\cdots,x_n),x_i)\mid(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in X\}\\&\subset X\times X_i\end{aligned}$$

只不过说法换了而已.

定义 1.5.6 设 R 是集合 X 中的一个等价关系. 从集合 X 到它的商集 X/R 的**自然投射** $p:X\to X/R$ 定义为对于每一个 $x\in X$，$p(x)=[x]_R$.

事实上，自然投射 p 的上述定义便是定义

$$p=\{(x,[x]_R)\mid x\in X\}\subset X\times X/R$$

也只不过说法换了而已.

习 题

1. 设 X 和 Y 是两个集合，$f:X\to Y$. 证明：

(1) 对于任意 $A\subset X$，$A\subset f^{-1}(f(A))$；

(2) 对于任意 $B\subset Y$，$B\supset f(f^{-1}(B))$；

(3) f 是一个满射当且仅当

$$B=f(f^{-1}(B))$$

对于任何 $B\subset Y$ 成立.

2. 设 X 和 Y 是两个集合，$f:X\to Y$. 证明下列条件等价：

(1) f 是单射；

(2) 对于任意 $A,B\subset X$，$f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$；

(3) 对于任意 $A\subset X$，$A=f^{-1}(f(A))$；

(4) 对于任意 $A\subset X$，$f(X-A)=f(X)-f(A)$.

3. 设 X 和 Y 是两个集合，$f:X\to Y$. 证明下列条件等价：

(1) f 是一一映射；

(2) f^{-1} 是满射；

(3) $f^{-1}\circ f=i_X$ 和 $f\circ f^{-1}=i_Y$，

其中 i_X 和 i_Y 分别是 X 和 Y 的恒同映射.

4. 设 X_1 和 X_2 是两个集合，$p_i:X_1\times X_2\to X_i$ 是第 i 个投射，其中 $i=1,2$.

(1) 在什么情况下 p_i 是满的？在什么情况下 p_i 是单的？

(2) 设 $a_i\in X_i$. 写出集合 $p_i^{-1}(a_i)$ 来.

5. 设 X 是一个集合. 定义 $\Delta:X\to X\times X$ 使得对于任意 $x\in X$，$\Delta(x)=(x,x)$. 证明：

(1) Δ 是一个单射；

(2) $p_i\circ\Delta=i_X$，其中 p_i 是 $X\times X$ 的第 i 个投射，$i=1,2$；

(3) $\Delta(X)$ 即是定义 1.4.1 中的对角线.

6. 设 X 和 Y 是两个集合，$a\in X$，$b\in Y$. 定义映射 $k_{1,b}:X\to X\times Y$ 使得对于任意 $x\in X$ 有 $k_{1,b}(x)=(x,b)$；定义映射 $k_{2,a}:Y\to X\times Y$ 使得对于任意 $y\in Y$ 有 $k_{2,a}(y)=(a,y)$. 证明：

(1) $k_{1,b}$和$k_{2,a}$都是单射;

(2) $k_{1,b}(X)=X\times\{b\}$, $k_{2,a}(Y)=\{a\}\times Y$;

(3) $p_1\circ k_{1,b}=i_X$, $p_2\circ k_{2,a}=i_Y$;

(4) $p_1\circ k_{2,a}:Y\to X$ 为取常值 a 的映射;$p_2\circ k_{1,b}:X\to Y$ 为取常值 b 的映射.

其中 p_i 是 $X\times X$ 的第 i 个投射,$i=1,2$.

7. 设 X_1 和 X_2 是两个集合.令

$$\Pi(X_1,X_2)=\{x:\{1,2\}\to X_1\cup X_2\mid x(1)\in X_1, x(2)\in X_2\}$$

定义映射 $j:\Pi(X_1,X_2)\to X_1\times X_2$ 使得对于每一个 $x\in\Pi(X_1,X_2)$有 $j(x)=(x(1),x(2))\in X_1\times X_2$.证明 j 是一个一一映射.

8. 设 f,g,h 都是映射.证明:

(1) f 是 f 的扩张(限制);

(2) 如果 f 是 g 的扩张(限制),g 是 h 的扩张(限制),则 f 是 h 的扩张(限制);

(3) 如果 f 是 g 的扩张(限制),并且 g 也是 f 的扩张(限制),则 $f=g$.

9. 设 X 和 Y 是两个集合,$f:X\to Y$,$g:Y\to X$.证明:如果 $f\circ g=i_Y$,则 g 是一个单射,f 是一个满射.

§1.6 集族及其运算

设 Γ 是一个集合.如果对于每一个 $\gamma\in\Gamma$,指定了一个集合 A_γ,我们就说给定了一个**有标集族**$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$,或者在不至于引起混淆的情形下干脆说给定了一个**集族**$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$,同时 Γ 称为(有标)集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的**指标集**.

某些读者可能对于有标集族的上述定义持异议.事实上这个概念可以严格地定义如下:设 Γ 是一个集合,$\mathscr{A}$ 是一个(通常意义下的)集族.每一个满射 $\varphi:\Gamma\to\mathscr{A}$ 称为一个**以 Γ 为指标集的集族**.

此时如果将 $\varphi(\gamma)$改记为 A_γ，则按映射的定义我们有 $\varphi=\{(\gamma,A_\gamma)\mid\gamma\in\Gamma\}\subset\Gamma\times\mathscr{A}$. 按通常习惯 φ 常记作$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.

有标集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$中所涉及的所有集合$A_\gamma$，构成一个通常意义下的集族，按照标准的记法它应当是$\{A_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}$. 这个通常意义下的集族$\{A_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}$与有标集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的不同在于，它仅与由哪些元素构成有关，而与它的每一个元素由 Γ 的哪一个元素指定无关.

例如，如果 Γ 是一个集合，当我们谈到有标集族$\{\mathbb{R}\}_{\gamma\in\Gamma}$时，我们强调的是对于每一个 $\gamma\in\Gamma$ 都指定着同一个集合$\mathbb{R}$；然而这时这个有标集族涉及的所有集合构成单点集$\{\mathbb{R}\}$.

设 $\mathscr{A}$是一个通常意义下的集族. 我们令 $\Gamma=\mathscr{A}$，并且对于每一个 $A\in\Gamma$，指定集合 $A_\gamma=A$. 这样我们就得到了一个以 $\Gamma=\mathscr{A}$为指标集的集族$\{A\}_{A\in\mathscr{A}}$，按照这个做法我们常将集族 $\mathscr{A}$理解为有标集族$\{A\}_{A\in\mathscr{A}}$，并且通常对两者不加区别. 在这个约定下，通常意义下的集族是一类特殊的有标集族. 因此，下文对于有标集族的并与交运算的定义对于通常意义下的集族也当是有效的.

由于有标集族与通常意义下的集族在记号上有明显的区别，所以在不至于引起概念上的混淆的情形下我们也常将有标集族简称为集族，将指标集非空的有标集族简称为非空集族.

定义 1.6.1 *设给定了一个集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. 集合*

$$\{x\mid\text{存在 }\gamma\in\Gamma\text{ 使得 }x\in A_\gamma\}$$

*称为集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的*并集*或*并*，记作$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$；当指标集 Γ 非空时，集合*

$$\{x\mid\text{对于任何 }\gamma\in\Gamma\text{ 有 }x\in A_\gamma\}$$

*称为集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的*交集*或*交*，记作$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$.*

需要提请读者注意的是：当指标集 Γ 是空集时，容易验证集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的并集$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$(不妨理解为“0 个集合的并”)是一个空集；而集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的交集$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ 没有定义. 假若这时仍按原

式给予定义，将会导致$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$是一个包容一切事物的集合；特别，这个集合本身也是自己的一个元素．在§1中我们说过，这种情形是不能容许的．正因为如此，有些作者采用以下约定：当所考虑的问题中基础集已经给定或自明时，如果指标集Γ是空集，规定集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的交集为基础集．本书不采用这个约定．

读者容易知道，上述定义实际上分别是有限个集合的并和交的运算的推广，因为给定了有限个集合$X_1,X_2,\cdots,X_n$实际上等于给定了一个有标集族$\{A_i\}_{i\in\{1,2,\cdots,n\}}$．

以下定理1.6.1指出，有标集族的并与交的运算只与这个集族涉及的那些集合有关．事实上，引进有标集族的概念只是在今后定义一族集合的笛卡儿积时才具有本质上的重要性．

定理1.6.1 设$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$和$\{B_\delta\}_{\delta\in\Delta}$是两个非空集族．如果$\{A_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}=\{B_\delta\mid\delta\in\Delta\}$，则有

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma=\bigcup_{\delta\in\Delta}B_\delta$$

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma=\bigcap_{\delta\in\Delta}B_\delta$$

特别地，如果$\mathscr{A}=\{A_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}$，则有

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A$$

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma=\bigcap_{A\in\mathscr{A}}A$$

证明 例如证明定理中的前一个等式．若$x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$，根据定义存在$\gamma_0\in\Gamma$使得$x\in A_{\gamma_0}$．由于

$$A_{\gamma_0}\in\{A_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}=\{B_\delta\mid\delta\in\Delta\}$$

故存在$B_{\delta_0}\in\{B_\delta\mid\delta\in\Delta\}$使得$A_{\gamma_0}=B_{\delta_0}$．于是$x\in B_{\delta_0}$．从而$x\in\bigcup_{\delta\in\Delta}B_\delta$．于是

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\subset\bigcup_{\delta\in\Delta}B_\delta$$

同理可证

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\supset\bigcup_{\delta\in\Delta}B_\delta$$

定理中第二个等式的证明类似，留给读者自己去完成. ■

定理 1.6.2 设 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一个非空的有标集族，A 是一个集合. 则

(1) 对于任何 $\gamma_0\in\Gamma$,

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\subset A_{\gamma_0}\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$$

(2) 分配律

$$A\cap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap A_\gamma)$$

$$A\cup(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A\cup A_\gamma)$$

(3) De Morgan 律

$$A-(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A-A_\gamma)$$

$$A-(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A-A_\gamma)$$

证明 为简便计，证明中用符号 $\Longleftrightarrow$ 替换“当且仅当”这个词.

例如我们证明本定理第(2)条中的前一个等式. 我们有：$x\in A\cap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\Longleftrightarrow x\in A$ 并且 $x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\Longleftrightarrow x\in A$ 并且存在 $\gamma\in\Gamma$ 使得 $x\in A_\gamma\Longleftrightarrow$ 存在 $\gamma\in\Gamma$ 使得 $x\in A\cap A_\gamma\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A\cap A_\gamma)$.

又例如我们证明本定理第(3)条中的后一个等式. 我们有：

$x\in A-(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\Longleftrightarrow x\in A$ 但 $x\notin\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\Longleftrightarrow x\in A$ 且存在 $\gamma\in\Gamma$ 使得 $x\notin A_\gamma\Longleftrightarrow$ 存在 $\gamma\in\Gamma$ 使得 $x\in A-A_\gamma\Longleftrightarrow x\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(A-A_\gamma)$.

其余各个集合的包含关系式的证明类似，留给读者完成. ■

如果集族 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 满足条件：对于每一个 $\gamma\in\Gamma$，A_γ 都是某一个集合 X 的子集，这时我们称这个集族为集合 X 的一个子集族. 以下的两个定理讨论关系和映射与集族运算之间的关联.

定理 1.6.3 设 R 是从集合 X 到集合 Y 的一个关系，则对于集合 X 的任何一个非空子集族 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$，有

$$R(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}R(A_\gamma)$$

$$R(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\subset\bigcap_{\gamma\in\Gamma}R(A_\gamma)$$

证明 例如我们证明定理中的后一个包含关系. 若 $y\in R(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)$，则存在 $x\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ 使得 xRy. 由于对于每一个 $\gamma\in\Gamma$ 有 $x\in A_\gamma$，故对于每一个 $\gamma\in\Gamma$ 有 $y\in R(A_\gamma)$. 从而 $y\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}R(A_\gamma)$.

定理中前一个等式的证明类似，留给读者完成. ■

定理 1.6.4 设 X 和 Y 是两个集合，$f:X\to Y$. 则对于集合 Y 的任何一个非空子集族 $\{B_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$，有

$$f^{-1}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(B_\gamma)$$

$$f^{-1}(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(B_\gamma)$$

简言之，集族的原象保持集族的并与交运算.

证明 由于 f^{-1} 是从集合 Y 到集合 X 的一个关系，根据定理 1.6.3 仅需补充证明 $f^{-1}(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)\supset\bigcap_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(B_\gamma)$. 现证明如下：若 $x\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(B_\gamma)$，则对于任何一个 $\gamma\in\Gamma$ 有 $x\in f^{-1}(B_\gamma)$，即 $f(x)\in B_\gamma$. 于是 $f(x)\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma$. 从而 $x\in f^{-1}(\bigcap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)$. ■

习 题

1. 设 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1}$ 和 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_2}$ 是两个非空集族. 证明下列等式：

$$(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}A_\gamma)\cup(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_2}A_\gamma)=\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1\cup\Gamma_2}A_\gamma$$

$$(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_1}A_\gamma)\cap(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_2}A_\gamma)=\bigcap_{\gamma\in\Gamma_1\cup\Gamma_2}A_\gamma$$

$$(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}A_\gamma)\cap(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_2}A_\gamma)=\bigcup_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2}(A_{\gamma_1}\cap A_{\gamma_2})$$

$$(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_1}A_\gamma)\cup(\bigcap_{\gamma\in\Gamma_2}A_\gamma)=\bigcap_{(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2}(A_{\gamma_1}\cup A_{\gamma_2})$$

2. 若$\{\Gamma_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一个非空集族,并且对于每一个 $\gamma\in\Gamma$,给定了一个非空集族$\{A_\beta\}_{\beta\in\Gamma_\gamma}$,证明:

$$\bigcup_{\beta\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\Gamma_\gamma}A_\beta=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\Big(\bigcup_{\beta\in\Gamma_\gamma}A_\beta\Big)$$
$$\bigcap_{\beta\in\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\Gamma_\gamma}A_\beta=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\Big(\bigcap_{\beta\in\Gamma_\gamma}A_\beta\Big)$$

§1.7 可数集,不可数集,基数

定义 1.7.1 设 X 是一个集合.如果 X 是空集或者存在正整数 $n\in\mathbb{Z}_+$ 使得集合 X 和集合$\{1,2,\cdots,n\}$之间有一个一一映射,则称集合 X 是一个**有限集**,不是有限集的集合称为**无限集**;如果存在一个从集合 X 到正整数集$\mathbb{Z}_+$的单射,则称集合 X 是一个**可数集**,不是可数集的集合称为**不可数集**.

显然,凡有限集皆是可数集,但可数集可为无限集.例如,正整数集$\mathbb{Z}_+$本身便是一个可数集,但它不是有限集.

定理 1.7.1 任何可数集的任何一个子集都是一个可数集.

证明 设 X 是可数集,$Y\subset X$.则存在一个单射 $f:X\to\mathbb{Z}_+$.容易验证映射 f 的限制映射$f|_Y:Y\to\mathbb{Z}_+$是一个单射.所以 Y 是一个可数集. ∎

定理 1.7.2 设 X 和 Y 是两个集合,$f:X\to Y$ 是一个映射.如果 X 是可数集,则 $f(X)$也是一个可数集.

证明 当 X 是可数集时,可设 $\xi:X\to\mathbb{Z}_+$是一个单射.定义映射 $\varphi:f(X)\to\mathbb{Z}_+$使得对于每一个 $y\in f(X)$,$\varphi(y)$为 y 的f 原象集合的ξ象集中的那个最小的整数,即

$$\varphi(y)=\min(\xi(f^{-1}(y)))$$

φ 是一个单射,因为如果对于某两个 $y_1,y_2\in f(X)$有 $\varphi(y_1)=\varphi(y_2)$,即

$$\min(\xi(f^{-1}(y_1)))=\min(\xi(f^{-1}(y_2)))$$

由于 ξ 是单射，故 $f^{-1}(y_1)\cap f^{-1}(y_2)\neq\varnothing$. 若令 $x\in f^{-1}(y_1)\cap f^{-1}(y_2)$，我们便有 $y_1=f(x)=y_2$. 因此 $f(X)$ 是可数集. ■

定理 1.7.3 集合 X 是一个可数集当且仅当存在从正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 到集合 X 的一个满射.

证明 如果存在满射 $\xi:\mathbb{Z}_+\to X$，则根据定理 1.7.2，$X=\xi(\mathbb{Z}_+)$ 是可数集. 如果 X 是可数集，则存在单射 $\nu:X\to\mathbb{Z}_+$. 定义映射 $\mu:\mathbb{Z}_+\to X$ 使得当 $n\in\nu(X)$ 时，$\mu(n)$ 是集合 $\nu^{-1}(n)$ 中包含着的那个唯一的元素；当 $n\in\mathbb{Z}_+-\nu(X)$ 时，$\mu(n)=x_0$，其中 x_0 是 X 中任意预先取定的一个元素. 容易验证 μ 是一个满射. ■

定理 1.7.4 如果集合 X 和集合 Y 都是可数集，则笛卡儿积 $X\times Y$ 也是一个可数集. 特别，集合 $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ 是一个可数集.

证明 由于 X 和 Y 都是可数集，设 $\psi:X\to\mathbb{Z}_+$ 和 $\mu:Y\to\mathbb{Z}_+$ 是两个单射. 定义映射 $\varphi:X\times Y\to\mathbb{Z}_+$，使得对于任何 $(x,y)\in X\times Y$，有

$$\varphi((x,y))=(2\psi(x)+1)2^{\mu(y)}$$

容易证明 φ 是一个单射. 因此 $X\times Y$ 是可数集. ■

定理 1.7.5 设 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一个集族. 如果指标集 Γ 是可数集并且对于每一个 $\gamma\in\Gamma$，A_γ 也是可数集，则并集 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ 是可数集.

证明 根据定理假设和定理 1.7.3，设 $r:\mathbb{Z}_+\to\Gamma$ 是一个满射；对于每一个 $\gamma\in\Gamma$，设 $f_\gamma:\mathbb{Z}_+\to A_\gamma$ 是一个满射. 定义映射

$$\xi:\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+\to\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$$

使得对于任意 $(m,n)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$，有 $\xi((m,n))=f_{r(m)}(n)$. 易见 ξ 是一个满射. 根据定理 1.7.4，集合 $\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}_+$ 是可数的. 根据定理 1.7.2 可见，集合 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ 是可数的. ■

定理 1.7.6 设 X 是一个集合，$Y=\{0,1\}$. 记 Y^X 为从 X 到 Y 的全体映射构成的集合. 则有一个从集合 X 到集合 Y^X 的单射，

但却没有从集合 X 到集合 Y^X 的任何一个一一映射.

证明 首先证明有一个从集合 X 到集合 Y^X 的单射. 为此定义映射 $F:X\to Y^X$，使得对于任意 $x\in X$，$F(x)$ 为 Y^X 中满足以下条件的元素：对于任何 $y\in X$，

$$F(x)(y)=\begin{cases}0 & \text{如果 } y=x\\ 1 & \text{如果 } y\neq x\end{cases}$$

F 是一个单射，因为如果 $x,y\in X$，$x\neq y$，则有 $F(x)(y)=1$ 和 $F(y)(y)=0$，因此 $F(x)\neq F(y)$.

以下证明没有从集合 X 到集合 Y^X 的任何一个一一映射. 用反证法，设映射 $h:X\to Y^X$ 是一一的. 定义映射 $f:X\to Y$ 使得对于任何 $x\in X$ 有 $f(x)=1-h(x)(x)$.（即当 $h(x)(x)=0$ 时 $f(x)=1$，当 $h(x)(x)=1$ 时 $f(x)=0$.）由于 h 是满射，所以存在 $x_0\in X$ 使得 $h(x_0)=f$，从而我们有 $h(x_0)(x_0)=f(x_0)$. 这与 f 的定义矛盾. ■

推论 1.7.7 *存在着不可数集.*

证明 根据定理 1.7.6，从正整数集合 $\mathbb{Z}_+$ 到集合 $\{0,1\}$ 的全体映射构成的集合 $\{0,1\}^{\mathbb{Z}_+}$ 便是一个不可数集. ■

定理 1.7.8 *实数集合 $\mathbb{R}$ 是不可数集.*

证明 设 $a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$. 开区间 (a,b) 的定义如常，即 $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$. 我们首先指出 (a,b) 是一个无限集. 这是因为对于任何 $i\in\mathbb{Z}_+$，只要 $i>\dfrac{1}{b-a}$，就有 $a+\dfrac{1}{i}\in(a,b)$.

现在来证明定理. 用反证法，设 $\mathbb{R}$ 是一个可数集，由于 $\mathbb{R}$ 包含着 $\mathbb{Z}_+$，因此存在一个从 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{Z}_+$ 的一个一一映射. 设 $\xi:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{R}$ 是一个一一映射. 不妨假设 $\xi(1)<\xi(2)$. 对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$，我们归纳地定义两个实数 a_i 和 b_i，使得 $a_i<b_i$ 如下：首先，令 $a_1=\xi(1)$ 和 $b_1=\xi(2)$. 如果对于 $i\in\mathbb{Z}_+$，a_i 和 b_i 都已经定义，则定义

$$a_{i+1}=\xi(\min\{n\in\mathbb{Z}_+\mid\xi(n)\in(a_i,b_i)\})$$

$$b_{i+1}=\xi(\min\{m\in\mathbb{Z}_+\mid\xi(m)\in(a_{i+1},b_i)\})$$

根据前一段中所说每一个开区间都是无限集,因此这样的 a_{i+1} 和 b_{i+1} 肯定能够取到.

根据我们以上做法可见,

(1) 如果 $i,j\in\mathbb{Z}_+$, $i<j$ 则有 $a_i<a_j<b_j<b_i$,即

$$a_1<a_2<a_3<\cdots<\cdots<b_3<b_2<b_1$$

(2) 如果 $i,j\in\mathbb{Z}_+$, $i<j$ 则有 $\xi^{-1}(a_i)<\xi^{-1}(a_j)$ 和 $\xi^{-1}(b_i)>\xi^{-1}(b_j)$,即有

$$\xi^{-1}(a_1)<\xi^{-1}(a_2)<\xi^{-1}(a_3)<\cdots$$
$$\xi^{-1}(b_1)>\xi^{-1}(b_2)>\xi^{-1}(b_3)>\cdots$$

(3) 如果 $n\in\mathbb{Z}_+$, $n<\min\{\xi^{-1}(a_i),\xi^{-1}(b_i)\}$,则 $\xi(n)\notin(a_i,b_i)$.

根据实数的基本性质,可令 $a\in\mathbb{R}$ 是集合 $\{a_i\mid i\in\mathbb{Z}_+\}$ 的上确界(即不小于每一个 a_i 的实数中的最小的那个),易见 $a\in(a_i,b_i)$ 对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$ 成立.假设 $t\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $\xi(t)=a$.选取 $i_0\in\mathbb{Z}_+$,使得 $\min\{a_{i_0},b_{i_0}\}>t$.根据(3)有 $a\notin(a_{i_0},b_{i_0})$,这是一个矛盾.

■

我们现在来考察下面这一系列集合:

$$\varnothing,\{1\},\{1,2\},\cdots,\{1,2,\cdots,n\},\cdots,\mathbb{Z}_+$$

它有以下的特点:对于每一个可数集,在这一系列集合中有且仅有一个集合与这个可数集之间有一个一一映射.

假如我们不去区别其间存在着一一映射的两个集合,也就是说,认为它们是一样的.那么任何一个可数集与且仅与这一系列集合中的某一个一样.因此,为了讨论可数集,只要讨论这一系列集合就足够了.

问题在于根据推论1.7.7和定理1.7.8我们知道,的确有这种集合,例如$\mathbb{R}$,它与这一系列集合中的任何一个都不一样(也就是说,与每一个之间都没有一一映射).这表明,如果我们不仅讨论可数集,就不能只讨论这个集合的系列.

为了回避逻辑困惑,我们不妨承认以下事实:存在着这样的一个由集合构成的族,满足条件:对于每一个集合,在这个集合族中有且仅有一个元素与这个集合之间有一个一一映射.我们称这个集族的每一个元素为一个**基数**.

假设 X 是一个集合.那么我们便有且仅有一个基数 C 使得 X 与 C 之间有一个一一映射.这时,我们称 C 是 X 的基数,并且常将此 C 记为 $\mathrm{card}\ X$.明显地,两个集合有着相同的基数当且仅当它们之间存在着一个一一映射.

我们习惯上常将空集 $\varnothing$ 的基数说成是 0,即 $\mathrm{card}\ \varnothing = 0$;对于 $n \in \mathbb{Z}_+$,将集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的基数说成是 n,即

$$\mathrm{card}\{1,2,\cdots,n\} = n$$

这将不至于引起任何混淆.因此,任何一个有限集的基数恰好就是它所包含的元素的个数.此外,我们也常将正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 的基数记为 $\aleph_0$,将实数集合的基数记为 $\aleph$.(记号"$\aleph$"读作"阿列夫")

假设 C 和 D 是两个基数.(请注意,就其本意而论,基数是集合.)如果存在从 C 到 D 的一个单射,我们就说,基数 C 不大于基数 D,记作 $C \leqslant D$.如果 $C \leqslant D$ 并且 $C \neq D$,我们就说基数 C 小于基数 D,记作 $C < D$.

敏感的读者也许已经注意到了,我们在这里用的记号与比较实数的大小的记号完全一样.这是否意味着两者之间遵循类似的规律?回答是肯定的,一个关键性的事实由以下定理揭示.

定理 1.7.9 [Cantor－Bernstein 定理]设 X 和 Y 是两个集合.如果从 X 到 Y 有一个单射,并且从 Y 到 X 也有一个单射,则 X 和 Y 之间有一个一一映射.

证明 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to X$ 都是单射.从定理 1.5.4 可见 $g \circ f: X \to X$ 是一个单射.令 $X_1 = g(Y)$ 和 $X_2 = (g \circ f)(X)$.易见,$g: Y \to X_1$ 和 $g \circ f: X \to X_2$ 都是一一映射.因此

$$X_2 = (g \circ f)(X) = g(f(X)) \subset g(Y) = X_1 \subset X$$

于是,如果证明了以下的论断(*),则本定理获证.

(*):如果 $X_2\subset X_1\subset X$ 并且 X 与 X_2 之间有一个一一映射,则 X 与 X_1 之间也有一个一一映射.

以下给出论断(*)的证明.设 $h:X\to X_2$ 是一个一一映射.

先通过归纳的方式对于每一个正整数 $i\in\mathbb{Z}_+$ 来确定一个映射 $h^{(i)}:X\to X_2$.首先令 $h^{(1)}=h:X\to X_2$;其次假定对于正整数 $i\in\mathbb{Z}_+$,映射 $h^{(i)}:X\to X_2$ 已经定义好了,我们定义

$$h^{(i+1)}=h|_{X_2}\circ h^{(i)}:X\to X_2$$

现在令

$$T_1=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+}h^{(i)}(X-X_1)(\subset X_2)$$

和

$$T=(X-X_1)\cup T_1$$

由于

$$\begin{aligned}h(T)&=h(X-X_1)\cup h(\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+}h^{(i)}(X-X_1))\\&=h(X-X_1)\cup\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+}h^{(i+1)}(X-X_1)\\&=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+}h^{(i)}(X-X_1)=T_1\end{aligned}$$

所以我们有 $T=(X-X_1)\cup h(T)$.

最后给出我们希望得到的一一映射.定义映射 $\xi:X\to X_1$ 使得 $\xi|_T=h|_T$ 和 $\xi|_{X-T}=j$,其中 $j:X-T\to X$ 表示内射,即对于任何 $x\in X-T$,有 $j(x)=x$.因为 h 和 j 都是单射;并且由于 $h(T)=T_1\subset T$,所以 $h(T)\cap j(X-T)=\varnothing$,从而 ξ 是一个单射.另一方面,

$$\begin{aligned}\xi(X)&=h(T)\cup j(X-T)\\&=T_1\cup(X-T)\\&=T_1\cup(X_1\cap(X-h(T)))\\&=(T_1\cup X_1)\cap(T_1\cup(X-h(T)))\end{aligned}$$

$$=X_1\cap X=X_1$$

所以 ξ 是一个满射.因此 ξ 是一个一一映射. ■

根据这个定理可见,如果集合 X 和集合 Y 满足条件 $\mathrm{card}\, X\leqslant \mathrm{card}\, Y$ 和 $\mathrm{card}\, Y\leqslant \mathrm{card}\, X$ 时,则有 $\mathrm{card}\, X=\mathrm{card}\, Y$.特别,当 C 和 D 都是基数,并且满足条件 $C\leqslant D$ 和 $D\leqslant C$ 时,必有 $C=D$.

读者可能还要问,是不是任何两个基数都可以比较大小?也就是说,对于任意给定的两个基数 C 和 D,是否 $C\leqslant D$ 和 $D\leqslant C$ 两者之中必有一个成立?事实上,如果假定在下一节中介绍的选择公理成立,则对这个问题的回答是肯定的,但限于本书的篇幅和范围,对此不作进一步的处理,有兴趣的读者可以参阅有关集合论的论著.

事实上,关于基数的大小比较的问题还有一些有趣的结论.例如,在任何一个由一些基数构成的非空族 $\mathscr{A}$ 中都有一个最小的元素,即存在 $A\in\mathscr{A}$ 使得对于每一个 $B\in\mathscr{A}$ 都有 $A\leqslant B$.

关于基数,集合论的奠基人 Cantor 曾经给出过他自己当时未能证明的一个著名的命题:

连续统假设: 不存在任何一个基数 α 使得 $\aleph_0<\alpha<\aleph$.

后来又有人将这个命题推广为:

广义连续统假设: 对于任何一个无限集 X,不存在任何一个基数 α 使得 $\mathrm{card}\, X<\alpha<\mathrm{card}\, \mathscr{P}(X)$.其中 $\mathscr{P}(X)$ 是集合 X 的幂集.

现在已经弄清楚了,承认或者否定这些命题中的每一个都和通常的数学逻辑没有矛盾.

习 题

1. 证明:全体有理数构成的集合 $\mathbb{Q}$ 是一个可数集.

2. 设 A 是实数集合 $\mathbb{R}$ 的一个子集,它包含着某一个非蜕化的开区间,即存在 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$,使得 $A\supset(a,b)$.证明 $\mathrm{card}\, A=\aleph$.

3. 证明 $\mathrm{card}\, \mathbb{R}^2=\aleph$.

4. 设 X 是一个无限的可数集. 证明幂集 $\mathscr{P}(X)$ 为不可数集，但由 X 中所有有限子集构成的集族为可数集.

5. 设 X 是一个集合. 证明 $\operatorname{card} \mathscr{P}(X) = \operatorname{card} \{0,1\}^X$，其中，$\mathscr{P}(X)$ 为 X 的幂集，$\{0,1\}^X$ 是由从 X 到 $\{0,1\}$ 的所有映射构成的集合.

§1.8 选择公理

在集合论中有一个乍看起来似乎是十分明显的论断，称为选择公理. 事实上选择公理并不能从我们对集合论的通常理解出发加以证明.

定义 1.8.1 设 X 是一个集合. 记 $\widetilde{X}$ 为 X 中的所有非空子集构成的集族，即 $\widetilde{X} = \mathscr{P}(X) - \{\varnothing\}$. 如果一个映射 $\varepsilon: \widetilde{X} \to X$ 满足条件：对于任意 $A \in \widetilde{X}$，有 $\varepsilon(A) \in A$，则此映射 ε 称为集合 X 的一个**选择函数**.

公理 1.8.1[选择公理] 任何一个集合都有选择函数. ■

我们假定选择公理成立，并由此出发来证明本课程中所需要的两个论断. 从习题中可见这两个论断事实上都与选择公理等价.

定理 1.8.2 设 $\mathscr{A}$ 是一个由非空集合构成的族. 则存在映射 $\nu: \mathscr{A} \to \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$ 使得对于任何 $A \in \mathscr{A}$，有 $\nu(A) \in A$.

证明 令 $X = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$. 从而集族 $\mathscr{A}$ 是 $\widetilde{X} = \mathscr{P}(X) - \{\varnothing\}$ 的一个子族. 设 $\varepsilon: \widetilde{X} \to X$ 是 X 的一个选择函数，并且令 $\nu = \varepsilon|_{\mathscr{A}}$. 易见，$\nu$ 满足定理要求. ■

定理 1.8.3[Zermelo 假定] 设 $\mathscr{A}$ 是一个由非空集合构成的族，并且 $\mathscr{A}$ 中的元素两两无交. 则存在集合 C 使得对于每一个 $A \in \mathscr{A}$，$C \cap A$ 是一个单点集.

证明 令 $X = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A$；令 $\varepsilon: \widetilde{X} \to X$ 是 X 的一个选择函数，其

中 $\widetilde{X}=\mathscr{P}(X)-\{\varnothing\}$. 以下证明集合 $C=\varepsilon(\mathscr{A})$满足定理要求. 对于任何 $A\in\mathscr{A}$, 我们有 $\varepsilon(A)\in C\cap A$; 如果存在 $y\in C\cap A$, $y\neq\varepsilon(A)$, 设 $y=\varepsilon(A_1)$, 其中 $A_1\in\mathscr{A}$, 则 $A_1\neq A$, 这将导致 $y\in A\cap A_1$, 与定理假定不合. ■

选择公理以及定理 1.8.2 和定理 1.8.3 都似乎太明显而容易被忽略, 以致使用时并不自觉. 以后用到的时候我们也不每次提起, 请读者自行注意.

在本书中, 选择公理比较深刻的应用是用以证明紧致性是可积性质的 Tychonoff 乘积定理(定理 9.4.5). 我们到时候将会证明选择公理的一个重要的等价提法.

习 题

1. 证明定理 1.8.2 和定理 1.8.3 都与选择公理等价.

2. 设 X 和 Y 是两个集合, 证明: card $Y\leqslant$ card X 当且仅当存在一个从 X 到 Y 的满射.

第 2 章 拓扑空间与连续映射

从数学分析中读者已经熟知单变量和多变量的连续函数，它们的定义域和值域都是欧氏空间（直线，平面或空间等等）或是其中的一部分．在这一章中我们首先将连续函数的定义域和值域主要特征抽象出来用以定义度量空间，将连续函数的主要特征抽象出来用以定义度量空间之间的连续映射（参见§2.1）．然后将两者再度抽象，给出拓扑空间和拓扑空间之间的连续映射（参见§2.2）．随后再逐步提出拓扑空间中的一些基本问题如邻域，闭包，内部，边界，基和子基，序列等等．

§2.1 度量空间与连续映射

首先让我们回忆一下在数学分析中学习过的连续函数的定义．函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为在点 $x_0\in\mathbb{R}$ 处是连续的，如果对于任意实数 $\epsilon>0$，存在实数 $\delta>0$，使得对于任何 $x\in\mathbb{R}$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$．在这个定义中只涉及两个实数之间的距离（即两个实数之差的绝对值）这个概念；为了验证一个函数在某点处的连续性往往只要用到关于上述距离的最基本的性质，而与实数的其它性质无关．关于多元函数的连续性情形也完全类似．以下，我们从这一考察出发，抽象出度量和度量空间的概念．

定义 2.1.1 设 X 是一个集合，$\rho:X\times X\to\mathbb{R}$．如果对于任何 $x,y,z\in X$，有

(1)（正定性） $\rho(x,y)\geqslant 0$，并且 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(2)（对称性） $\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

(3)（三角不等式） $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$，

则称 ρ 是集合 X 的一个**度量**.

如果 ρ 是集合 X 的一个度量，则称偶对 (X,ρ) 是一个**度量空间**，或称 X 是一个**对于度量 ρ 而言的度量空间**. 有时，或者度量 ρ 早有约定，或者在行文中已作交代，不提它不至于引起混淆，这时我们径称 X 是一个**度量空间**. 此外，对于任意两点 $x,y\in X$，实数 $\rho(x,y)$ 称为从点 x 到点 y 的**距离**.

例 2.1.1 实数空间 $\mathbb{R}$.

对于实数集合 $\mathbb{R}$，定义 $\rho:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下：对于任意 $x,y\in\mathbb{R}$，令 $\rho(x,y)=|x-y|$. 容易验证 ρ 是 $\mathbb{R}$ 的一个度量，因此偶对 $(\mathbb{R},\rho)$ 是一个度量空间. 这个度量空间特别地称为**实数空间**或**直线**. 这里定义的度量 ρ，称为 $\mathbb{R}$ 的**通常度量**，并且常常略而不提，径称 $\mathbb{R}$ 为**实数空间**.

例 2.1.2 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$.

对于实数集合 $\mathbb{R}$ 的 n 重笛卡儿积

$$\mathbb{R}^n=\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\text{个}\mathbb{R}}$$

定义 $\rho:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 如下：对于任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，令

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

容易验证（详见本节最后部分的附录）ρ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个度量，因此偶对 $(\mathbb{R}^n,\rho)$ 是一个度量空间. 这个度量空间特别地称为 **n 维欧氏空间**. 这里定义的度量 ρ，称为 $\mathbb{R}^n$ 的**通常度量**，并且常常略而不提，径称 $\mathbb{R}^n$ 为 **n 维欧氏空间**. 2 维欧氏空间通常称为**欧氏平面**或**平面**.

例 2.1.3 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$.

记 $\mathbb{H}$ 为平方收敛的所有实数序列构成的集合，即

$$\mathbb{H}=\{x=(x_1,x_2,\cdots)\mid x_i\in\mathbb{R},i\in\mathbb{Z}_+;\ \sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty\}$$

定义 $\rho:\mathbb{H}\times\mathbb{H}\to\mathbb{R}$ 如下：对于任意

$$x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots)\in\mathbb{H}$$

令

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}$$

说明这个定义是合理的（即验证$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}<\infty$），以及验证 ρ 是$\mathbb{H}$的一个度量，均请参见本节最后部分的附录．偶对$(\mathbb{H},\rho)$是一个度量空间．这个度量空间特别地称为 Hilbert **空间**．这里定义的度量 ρ 称为$\mathbb{H}$的**通常度量**，并且常常略而不提，径称$\mathbb{H}$为 Hilbert **空间**．

例 2.1.4　离散的度量空间．

设(X,ρ)是一个度量空间．称(X,ρ)是**离散的**，或者称 ρ 是 X 的一个**离散度量**，如果对于每一个 $x\in X$，存在一个实数 $\delta_x>0$ 使得 $\rho(x,y)>\delta_x$ 对于任何 $y\in X$，$y\neq x$，成立．

例如我们假定 X 是一个集合，定义 $\rho:X\times X\to\mathbb{R}$ 使得对于任何 $x,y\in X$，有

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0 & \text{如果 } x=y\\ 1 & \text{如果 } x\neq y\end{cases}$$

容易验证 ρ 是 X 的一个离散的度量，因此度量空间(X,ρ)是离散的．

离散的度量空间或许是我们以前未曾接触过的一类空间，但今后会发现它的性质是简单的．

定义 2.1.2　设(X,ρ)是一个度量空间，$x\in X$．对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$，集合

$$\{y\in X\mid\rho(x,y)<\varepsilon\}$$

记作 $B(x,\varepsilon)$，或 $B_\varepsilon(x)$，称为一个以 x 为中心以 ε 为半径的球形

邻域，简称为 x 的一个**球形邻域**，有时也称为 x 的一个 ε **邻域**.

定理 2.1.1 度量空间 (X,ρ) 的球形邻域具有以下基本性质：

(1) 每一点 $x\in X$ 至少有一个球形邻域，并且点 x 属于它的每一个球形邻域；

(2) 对于点 $x\in X$ 的任意两个球形邻域，存在 x 的一个球形邻域同时包含于两者；

(3) 如果 $y\in X$ 属于 $x\in X$ 的某一个球形邻域，则 y 有一个球形邻域包含于 x 的那个球形邻域.

证明 (1) 设 $x\in X$. 对于每一个实数 $\varepsilon>0$，$B(x,\varepsilon)$ 是 x 的一个球形邻域，所以 x 至少有一个球形邻域；由于 $\rho(x,x)=0$，所以 x 属于它的每一个球形邻域.

(2) 如果 $B(x,\varepsilon_1)$ 和 $B(x,\varepsilon_2)$ 是 $x\in X$ 的两个球形邻域，任意选取实数 $\varepsilon>0$，使得 $\varepsilon<\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$，则易见有

$$B(x,\varepsilon)\subset B(x,\varepsilon_1)\cap B(x,\varepsilon_2)$$

即 $B(x,\varepsilon)$ 满足要求.

(3) 设 $y\in B(x,\varepsilon)$. 令 $\varepsilon_1=\varepsilon-\rho(x,y)$. 显然 $\varepsilon_1>0$. 如果 $z\in B(y,\varepsilon_1)$，则

$$\rho(z,x)\leqslant\rho(z,y)+\rho(y,x)<\varepsilon_1+\rho(y,x)=\varepsilon$$

所以 $z\in B(x,\varepsilon)$. 这证明 $B(y,\varepsilon_1)\subset B(x,\varepsilon)$. ■

定义 2.1.3 设 A 是度量空间 X 的一个子集. 如果 A 中的每一个点都有一个球形邻域包含于 A（即对于每一个 $a\in A$，存在实数 $\varepsilon>0$ 使得 $B(a,\varepsilon)\subset A$），则称 A 是度量空间 X 中的一个**开集**.

例 2.1.5 实数空间 $\mathbb{R}$ 中的开区间都是开集.

设 $a,b\in\mathbb{R}$，$a<b$. 我们说开区间

$$(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$$

是 $\mathbb{R}$ 中的一个开集. 这是因为如果 $x\in(a,b)$，若令

$$\varepsilon=\min\{x-a,b-x\},$$

则有 $B(x,\varepsilon)\subset(a,b)$. 也同样容易证明无限的开区间

$$(a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\},\qquad(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<b\}$$

$$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$$

都是$\mathbb{R}$中的开集. 然而闭区间

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

却不是$\mathbb{R}$中的开集. 因为对于 $a\in[a,b]$而言, 任何 $\varepsilon>0$, $B(x,\varepsilon)\subset[a,b]$都不成立. 类似地, 半开半闭的区间

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leqslant b\},[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x<b\}$$

无限的闭区间

$$[a,\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant a\},(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant b\}$$

都不是$\mathbb{R}$中的开集.

定理 2.1.2 *度量空间 X 中的开集具有以下性质:*

(1) 集合 X 本身和空集 $\varnothing$ 都是开集;

(2) 任意两个开集的交是一个开集;

(3) 任意一个开集族(即由开集构成的族)的并是一个开集.

证明 根据定理 2.1.1(1), X 中的每一个元素 x 都有一个球形邻域, 这个球形邻域当然包含在 X 中, 所以 X 满足开集的条件; 空集 $\varnothing$ 中不包含任何一个点, 也自然地可以认为它满足开集的条件.

(2) 设 U 和 V 是 X 中的两个开集. 如果 $x\in U\cap V$, 则存在 x 的一个球形邻域 $B(x,\varepsilon_1)$ 包含于 U, 也存在 x 的一个球形邻域 $B(x,\varepsilon_2)$ 包含于 V. 根据定理 2.1.1(2), x 有一个球形邻域 $B(x,\varepsilon)$ 同时包含于 $B(x,\varepsilon_1)$ 和 $B(x,\varepsilon_2)$, 因此

$$B(x,\varepsilon)\subset B(x,\varepsilon_1)\cap B(x,\varepsilon_2)\subset U\cap V$$

由于 $U\cap V$ 中的每一点都有一个球形邻域包含于 $U\cap V$, 所以 $U\cap V$ 是一个开集.

(3) 设 $\mathscr{A}$ 是一个由 X 中的开集构成的子集族. 如果 $x\in$

$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A$，则存在 $A_0\in\mathscr{A}$ 使得 $x\in A_0$. 由于 A_0 是一个开集，所以 x 有一个球形邻域包含于 A_0，显然这个球形邻域也包含于 $\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A$. 这证明 $\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A$ 是 X 中的一个开集. ■

此外，根据定理 2.1.1(3) 可见，每一个球形邻域都是开集.

为了讨论问题的方便，我们将球形邻域的概念稍稍作一点推广.

定义 2.1.4 设 x 是度量空间 X 中的一个点，U 是 X 的一个子集. 如果存在一个开集 V 满足条件：$x\in V\subset U$，则称 U 是点 x 的一个**邻域**.

下面这个定理为邻域的定义提供了一个等价的说法，并且表明从球形邻域推广为邻域是自然的事情.

定理 2.1.3 设 x 是度量空间 X 中的一个点. 则 X 的子集 U 是 x 的一个邻域的充分必要条件是 x 有某一个球形邻域包含于 U.

证明 如果 U 是点 x 的一个邻域，根据邻域的定义存在开集 V 使得 $x\in V\subset U$，又根据开集的定义，x 有一个球形邻域包含于 V，从而这个球形邻域也就包含于 U. 这证明 U 满足定理的条件.

反之，如果 U 满足定理中的条件，由于球形邻域都是开集，因此 U 是 x 的邻域. ■

现在我们把数学分析中的连续函数的概念推广为度量空间之间的连续映射.

定义 2.1.5 设 X 和 Y 是两个度量空间，$f:X\to Y$，以及 $x_0\in X$. 如果对于 $f(x_0)$ 的任何一个球形邻域 $B(f(x_0),\varepsilon)$，存在 x_0 的某一个球形邻域 $B(x_0,\delta)$，使得 $f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon)$，则称映射在点 x_0 **处是连续的**.

如果映射 f 在 X 的每一个点 $x\in X$ 处连续，则称 f 是一个**连续映射**.

以上的这个定义是数学分析中函数连续性定义的纯粹形式推

广. 因为如果设 ρ 和 ρ_1 分别是度量空间 X 和 Y 中的度量，则 f 在点 x_0 处连续，可以说成：对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$，存在实数 $\delta>0$ 使得对于任何 $x\in X$ 只要 $\rho(x,x_0)<\delta$（即 $x\in B(x_0,\delta)$）便有 $\rho_1(f(x),f(x_0))<\varepsilon$（即 $f(x)\in B(f(x_0),\varepsilon)$）.

下面的这个定理是把度量空间和度量空间之间的连续映射的概念推广为拓扑空间和拓扑空间之间的连续映射的出发点.

定理 2.1.4 设 X 和 Y 是两个度量空间，$f: X\to Y$，以及 $x_0\in X$. 则下述条件(1)和(2)分别等价于条件(1)* 和(2)*：

(1) f 在点 x_0 处是连续的；

(1)* $f(x_0)$ 的每一个邻域的原象是 x_0 的一个邻域；

(2) f 是连续的；

(2)* Y 中的每一个开集的原象是 X 中的一个开集.

证明 (1) 蕴涵(1)*. 设(1)成立. 令 U 为 $f(x_0)$ 的一个邻域. 根据定理 2.1.3，$f(x_0)$ 有一个球形邻域 $B(f(x_0),\varepsilon)$ 包含于 U. 由于 f 在点 x_0 处是连续的，所以 x_0 有一个球形邻域 $B(x_0,\delta)$ 使得 $f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon)$. 然而，$f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))\subset f^{-1}(U)$，所以 $B(x_0,\delta)\subset f^{-1}(U)$. 这证明 $f^{-1}(U)$ 是 x_0 的一个邻域.

(1)* 蕴涵(1). 设(1)* 成立. 任意给定 $f(x_0)$ 的一个邻域 $B(f(x_0),\varepsilon)$，则 $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$ 是 x_0 的一个邻域. 根据定理 2.1.3，x_0 有一个球形邻域 $B(x_0,\delta)$ 包含于 $f^{-1}(B(f(x_0),\varepsilon))$. 因此 $f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon)$. 这证明 f 在点 x_0 处连续.

(2) 蕴涵(2)*. 设(2)成立. 令 V 为 Y 中的一个开集，$U=f^{-1}(V)$. 对于每一个 $x\in U$，我们有 $f(x)\in V$. 由于 V 是一个开集，所以 V 是 $f(x)$ 的一个邻域. 由于 f 在每一点处都连续，故根据(1)*，U 是 x 的一个邻域. 于是有包含 x 的某一个开集 U_x 使得 $U_x\subset U$. 易见 $U=\bigcup_{x\in U}U_x$. 由于每一个 U_x 都是开集，根据定理 2.1.2，U 是一个开集.

(2)* 蕴涵(2). 设(2)* 成立. 对于任意 $x\in X$, 设 U 是 $f(x)$ 的一个邻域, 即存在包含 $f(x)$ 的一个开集 $V\subset U$. 从而 $x\in f^{-1}(V)\subset f^{-1}(U)$. 根据(2)*, $f^{-1}(V)$ 是一个开集, 所以 $f^{-1}(U)$ 是 x 的一个邻域, 因此对于 x 而言, (1)* 成立, 于是 f 在点 x 处连续. 由于点 x 是任意选取的, 所以 f 是一个连续映射. ■

从这个定理可以看出: 度量空间之间的一个映射是否是连续的, 或者在某一点处是否是连续的, 本质上只与度量空间中的开集有关(注意, 邻域是通过开集定义的). 这就导致我们用开度量这个概念, 参照度量空间中开集的基本性质(定理 2.1.2)建立拓扑空间和拓扑空间之间的连续映射的概念(参见 §2.2).

附录 关于 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{H}$ 中的度量.

在这个附录中我们补充本节例 2.1.2 和例 2.1.3 需要而又未曾证明的几个事实. 首先证明以下引理.

引理 2.1.5[Schwarz 引理] 设

$$(u_1,u_2,\cdots,u_n),(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in\mathbb{R}^n$$

则有

$$\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}$$

这个不等式称为 Schwarz **不等式**.

证明 如果诸 v_i 全是 0, 结论是明显的. 以下假设诸 v_i 不全是 0. 易见对于任意实数 $\lambda\in\mathbb{R}$ 我们有:

$$\begin{aligned}0&\leqslant\sum_{i=1}^{n}(u_i+\lambda v_i)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}u_i^2+2\lambda\sum_{i=1}^{n}u_iv_i+\lambda^2\sum_{i=1}^{n}v_i^2\end{aligned}$$

于是关于变量 λ 的二次方程

$$\sum_{i=1}^{n}u_i^2+2\lambda\sum_{i=1}^{n}u_iv_i+\lambda^2\sum_{i=1}^{n}v_i^2=0$$

最多只有一个实(重)根.由这个二次方程的系数判别式可见

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)$$

所以引理中的不等式成立. ■

验证例 2.1.2 中定义的 ρ 是 $\mathbb{R}^n$ 的度量. 验证 ρ 满足度量定义中的第(1)条和第(2)条是容易的,我们留给读者.以下我们验证 ρ 满足度量定义中的第(3)条(即验证三角不等式成立).设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$, $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in\mathbb{R}^n$.我们要证明

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-x_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}$$

令 $u_i=y_i-x_i$ 和 $v_i=z_i-y_i$,以上不等式化为

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}$$

用不等式两边取平方的办法可见,欲证上式只要证明

$$\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}u_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}v_i^2} + \sum_{i=1}^{n}v_i^2$$

而这由 Schwarz 不等式立即可以得到. ■

验证例 2.1.3 中定义的 ρ 的定义是合理的并且是 $\mathbb{R}^n$ 的度量. 设 $x=(x_1,x_2,\cdots)$, $y=(y_1,y_2,\cdots)\in\mathbb{H}$.对于每一个正整数 n,由于例 2.1.2 中的 ρ 满足三角不等式,对于 $\mathbb{R}^n$ 中的三个点 $\tilde{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\tilde{z}=(0,0,\cdots,0)$ 和 $\tilde{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,应用三角不等式可见

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$$

在上式中令 $n\to\infty$,即得

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2}$$

因此例 2.1.3 中 $\rho(x,y)$ 的定义合理,并且我们还指出了

$(x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots)\in\mathbb{H}$.

现在我们来验证例2.1.3中定义的 ρ 满足度量定义中的三角不等式.设

$$x=(x_1,x_2,\cdots),y=(y_1,y_2,\cdots),z=(z_1,z_2,\cdots)\in\mathbb{H}$$

根据前面所说,我们有

$$(x_1-y_1,x_2-y_2,\cdots),(z_1-y_1,z_2-y_2,\cdots)\in\mathbb{H}$$

对这两个点应用上面最后那个不等式,则有

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-z_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(y_i-z_i)^2}$$

这就是我们要证明的例2.1.3中定义的 ρ 关于点 $x,y,z\in\mathbb{H}$ 的三角不等式. ρ 满足度量定义中另外两条的证明容易,留给读者. ■

习 题

1. 定义 $\sigma,\sigma':\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对于任意 $x,y\in\mathbb{R}$,有 $\sigma(x,y)=(x-y)^2$ 和 $\sigma'(x,y)=|x^2-y^2|$. 证明 σ 和 σ' 都不是 $\mathbb{R}$ 的度量.

2. 证明:只含有限个点的度量空间都是离散的度量空间.

3. 设 (X,ρ) 是一个离散的度量空间. 证明:

(1) X 的每一个子集都是开集;

(2) 如果 Y 也是一个度量空间,则任何映射 $f:X\to Y$ 都是连续的.

4. 集合 X 的两个度量 ρ_1 和 ρ_2 称为**等价的**,如果 X 的子集 A 是度量空间 (X,ρ_1) 中的开集当且仅当 A 是度量空间 (X,ρ_2) 的开集.

设 ρ_1 和 ρ_2 是集合 X 的两个等价的度量, Y 是一个度量空间, $f:X\to Y$. 证明 f 相对于度量 ρ_1 而言是连续的当且仅当 f 相对于度量 ρ_2 而言是连续的.

5. 定义 $\rho_1,\rho_2:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 使得对于任何 $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$,

$$\rho_1(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$$
$$\rho_2(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$$

证明: ρ_1 和 ρ_2 以及 $\mathbb{R}^2$ 的通常度量 ρ 是 $\mathbb{R}^2$ 的等价的度量.

在平面上取定一个直角坐标系,就以上提到的每一种度量画一个单位

圆,看看它们是什么样子.

6. 从欧氏平面$\mathbb{R}^2$到实数空间$\mathbb{R}$的映射$m,s:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$定义为:对于任何$x=(x_1,x_2)$,

$$m(x)=\max\{x_1,x_2\}$$
$$s(x)=x_1+x_2$$

证明:m和s都是连续映射.(提示:分别用$\mathbb{R}^2$的度量ρ_1和ρ_2(参见习题5).)

7. 设(X,ρ)是一个度量空间,$\rho_1,\rho_2:X\times X\to\mathbb{R}$分别定义为:对于任意$x,y\in X$,

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$
$$\rho_2(x,y)=\begin{cases}\rho(x,y) & \text{如果 } \rho(x,y)\leqslant 1\\ 1 & \text{如果 } \rho(x,y)>1\end{cases}$$

证明:ρ_1,ρ_2和ρ是X的三个等价度量.

§2.2　拓扑空间与连续映射

现在我们遵循前一节末尾提到的思路,即从开集及其基本性质(定理2.1.2)出发来建立拓扑空间的概念.

定义2.2.1　设X是一个集合,$\mathscr{T}$是X的一个子集族.如果$\mathscr{T}$满足如下条件:

(1) $X,\varnothing\in\mathscr{T}$;

(2) 若$A,B\in\mathscr{T}$,则$A\cap B\in\mathscr{T}$;

(3) 若$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}$,则$\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A\in\mathscr{T}$,

则称$\mathscr{T}$是X的一个拓扑.

如果$\mathscr{T}$是集合X的一个拓扑,则称偶对$(X,\mathscr{T})$是一个**拓扑空间**,或称集合X是一个**相对于拓扑$\mathscr{T}$而言的拓扑空间**;或者当拓扑$\mathscr{T}$早已约定或在行文中已有说明而无须指出时,径称集合X是一个**拓扑空间**.此外$\mathscr{T}$的每一个元素都叫做拓扑空间$(X,\mathscr{T})$(或

X)中的一个**开集**.

现在请读者将上述定义中的三个条件与定理 2.1.2 的三个结论对照一下,将"U 属于 $\mathscr{T}$"读做"U 是一个开集",便会发现两者实际上是一样的.

经过简单的归纳立即可见,以上定义中的条件(2)蕴涵着:如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathscr{T}, n \geqslant 1$,则有 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \in \mathscr{T}$.

此外如果在条件(3)中令 $\mathscr{T}_1 = \varnothing$,则会得到 $\varnothing = \bigcup_{A \in \mathscr{T}_1} A \in \mathscr{T}$,而这一点在条件(1)中已经作了规定.因此我们为验证集合 X 的一个子集族是否是 X 的一个拓扑,在验证条件(3)是否被满足时总可以假定 $\mathscr{T}_1 \neq \varnothing$.

现在首先将度量空间纳入拓扑空间的范畴.

定义 2.2.2 设(X, ρ)是一个度量空间.令 $\mathscr{T}_\rho$ 为由 X 中的所有开集构成的集族.根据定理 2.1.2,$(X, \mathscr{T}_\rho)$是 X 的一个拓扑.我们称 $\mathscr{T}_\rho$ 为 X 的**由度量 ρ 诱导出来的拓扑**.此外我们约定:如果没有另外的说明,我们提到度量空间(X, ρ)的拓扑时,指的就是拓扑 $\mathscr{T}_\rho$;在称度量空间(X, ρ)为拓扑空间时,指的就是拓扑空间$(X, \mathscr{T}_\rho)$.

因此,实数空间$\mathbb{R}$,n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$(特别,欧氏平面$\mathbb{R}^2$),Hilbert 空间$\mathbb{H}$都可以叫做拓扑空间,它们各自的拓扑分别便是由例 2.1.1,例 2.1.2 和例 2.1.3 中定义的各自的度量所诱导出来的拓扑.

度量空间是拓扑空间中最为重要的一类.于此,我们再举出一些拓扑空间的例子.

例 2.2.1 平庸空间.

设 X 是一个集合.令 $\mathscr{T} = \{X, \varnothing\}$.容易验证,$\mathscr{T}$是 X 的一个拓扑,称之为 X 的**平庸拓扑**;并且我们称拓扑空间$(X, \mathscr{T})$为一个**平庸空间**.在平庸空间$(X, \mathscr{T})$中,有且仅有两个开集,即 X 本身和空集 $\varnothing$.

例 2.2.2　离散空间.

设 X 是一个集合. 令 $\mathscr{T}=\mathscr{P}(X)$，即由 X 的所有子集构成的族. 容易验证，$\mathscr{T}$是 X 的一个拓扑，称之为 X 的**离散拓扑**；并且我们称拓扑空间$(X,\mathscr{T})$为一个**离散空间**. 在离散空间$(X,\mathscr{T})$中，X 的每一个子集都是开集.

例 2.2.3　设 $X=\{a,b,c\}$. 令

$$\mathscr{T}=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$$

容易验证，$\mathscr{T}$是 X 的一个拓扑，因此$(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间. 这个拓扑空间既不是平庸空间又不是离散空间.

例 2.2.4　有限补空间.

设 X 是一个集合. 首先我们重申：当我们考虑的问题中的基础集自明时，我们并不每次提起. 因此在后文中对于 X 的每一个子集 A，它的补集 $X-A$ 我们写为 A'. 令

$$\mathscr{T}=\{U\subset X \mid U'\text{是 } X \text{ 的一个有限子集}\}\cup\{\varnothing\}$$

先验证 $\mathscr{T}$是 X 的一个拓扑：

(1) $X\in\mathscr{T}$，因为 $X'=\varnothing$；另外，根据定义便有 $\varnothing\in\mathscr{T}$.

(2) 设 $A,B\in\mathscr{T}$. 如果 A 和 B 之中有一个是空集，则 $A\cap B=\varnothing\in\mathscr{T}$. 假定 A 和 B 都不是空集. 这时$(A\cap B)'=A'\cup B'$是 X 的一个有限子集，所以 $A\cap B\in\mathscr{T}$.

(3) 设 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}$. 令 $\mathscr{T}_2=\mathscr{T}_1-\{\varnothing\}$. 显然有

$$\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A=\bigcup_{A\in\mathscr{T}_2}A$$

如果 $\mathscr{T}_2=\varnothing$，则

$$\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A=\bigcup_{A\in\mathscr{T}_2}A=\varnothing\in\mathscr{T}$$

设 $\mathscr{T}_2\neq\varnothing$. 任意选取 $A_0\in\mathscr{T}_2$. 这时

$$\begin{aligned}(\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A)'&=(\bigcup_{A\in\mathscr{T}_2}A)'\\&=\bigcap_{A\in\mathscr{T}_2}A'\subset A'_0\end{aligned}$$

是 X 的一个有限子集，所以 $\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1} A\in\mathscr{T}$.

根据上述(1)，(2)和(3)，$\mathscr{T}$是 X 的一个拓扑，称之为 X 的**有限补拓扑**. 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为一个**有限补空间**.

例 2.2.5 可数补空间.

设 X 是一个集合. 令

$$\mathscr{T}=\{U\subset X \mid U' \text{是} X \text{的一个可数子集}\}\cup\{\varnothing\}$$

通过与例 2.2.4 中完全类似的做法容易验证(请读者自证)$\mathscr{T}$是 X 的一个拓扑，称之为 X 的**可数补拓扑**. 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为一个**可数补空间**.

一个令人关心的问题是拓扑空间是否真的要比度量空间的范围更广一点? 换句话就是问:是否每一个拓扑空间的拓扑都可以由某一个度量诱导出来?

定义 2.2.3 设$(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间. 如果存在 X 的一个度量 ρ 使得拓扑 $\mathscr{T}$ 即是由度量 ρ 诱导出来的拓扑 $\mathscr{T}_\rho$，则称$(X,\mathscr{T})$是一个**可度量化空间**.

根据这个定义，前述问题即是:是否每一个拓扑空间都是可度量化空间? 从§2.1 中的习题 2 和 3 可以看出，每一个只含有限个点的度量空间作为拓扑空间都是离散空间. 然而一个平庸空间如果含有多于一个点的话，它肯定不是离散空间，因此它不是可度量化的;例 2.2.3 中给出的那个空间只含有三个点，但不是离散空间，也不是可度量化的. 由此可见，拓扑空间是比度量空间的范围要广泛. 进一步的问题是满足一些什么条件的拓扑空间是可度量化的? 这是点集拓扑学中的重要问题之一，以后我们将专门讨论.

现在我们来将度量空间之间的连续映射的概念推广为拓扑空间之间的连续映射.

定义 2.2.4 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$. 如果 Y 中每一个开集 U 的原象 $f^{-1}(U)$是 X 中的一个开集，则称 f 是从 X 到 Y 的一个**连续映射**，或简称映射 f **连续**.

按这种方式定义拓扑空间之间的连续映射，明显是受到了§2.1中的定理2.1.4的启发.并且那个定理也保证了：当 X 和 Y 是两个度量空间时，如果 $f:X\to Y$ 是从度量空间 X 到度量空间 Y 的一个连续映射，那么它也是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的一个连续映射，反之亦然.（按照约定，涉及的拓扑当然都是指诱导拓扑.）

下面的这个定理尽管证明十分容易，但所指出的却是连续映射的最重要的性质.

定理 2.2.1 设 X，Y 和 Z 都是拓扑空间.则

(1) 恒同映射 $i_X:X\to X$ 是一个连续映射；

(2) 如果 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 都是连续映射，则 $g\circ f:X\to Z$ 也是连续映射.

证明 (1) 如果 U 是 X 的一个开集，则 $i_X^{-1}(U)=U$ 当然也是 X 的开集，所以 i_X 连续.

(2) 设 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 都是连续映射.如果 W 是 Z 的一个开集，由于 g 连续，$g^{-1}(W)$ 是 Y 的开集；又由于 f 连续，故 $f^{-1}(g^{-1}(W))$ 是 X 的开集.因此

$$(g\circ f)^{-1}(W)=f^{-1}(g^{-1}(W))$$

是 X 的开集.这证明 $g\circ f$ 连续. ■

在数学科学的许多学科中都要涉及两类基本对象.例如在线性代数中我们考虑线性空间和线性变换，在群论中我们考虑群和同态，在集合论中我们考虑集合和映射，在不同的几何学中考虑各自的图形和各自的变换等等.并且对于后者都要提出一类来予以重视，例如线性代数中的（线性）同构，群论中的同构，集合论中的一一映射，以及初等几何学中的刚体运动（即平移加旋转）等等.我们现在已经提出了两类基本对象，即拓扑空间和连续映射.下面将从连续映射中挑出重要的一类来给予特别的关注.

定义 2.2.5 设 X 和 Y 是两个拓扑空间.如果 $f:X\to Y$ 是一

个一一映射，并且 f 和 $f^{-1}: Y\to X$ 都是连续的，则称 f 是一个**同胚映射**或**同胚**.

定理 2.2.2 设 X, Y 和 Z 都是拓扑空间. 则

(1) 恒同映射 $i_X: X\to X$ 是一个同胚；

(2) 如果 $f: X\to Y$ 是一个同胚，则 $f^{-1}: Y\to X$ 也是一个同胚；

(3) 如果 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$ 都是同胚，则 $g\circ f: X\to Z$ 也是一个同胚.

证明 以下证明中所涉及的根据，可参见定理 2.2.1，定理 1.5.3和定理 1.5.4.

(1) i_X 是一个一一映射，并且 $i_X = i_X^{-1}$，都是连续的，从而 i_X 是同胚.

(2) 设 $f: X\to Y$ 是一个同胚. 因此 f 是一个一一映射，并且 f 和 f^{-1} 都是连续的. 于是 f^{-1} 也是一个一一映射并且 f^{-1} 和 $(f^{-1})^{-1}=f$ 也都是连续的，所以 f^{-1} 也是一个同胚.

(3) 设 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$ 都是同胚. 因此 f 和 g 都是一一映射，并且 f, f^{-1}, g 和 g^{-1} 都是连续的. 因此 $g\circ f$ 也是一一映射，并且 $g\circ f$ 和 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ 都是连续的. 所以 $g\circ f$ 是一个同胚. ■

定义 2.2.6 设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 如果存在一个同胚 $f: X\to Y$，则称拓扑空间 X 与拓扑空间 Y 是**同胚的**，或称 X 与 Y **同胚**，或称 X **同胚于** Y.

粗略地说，同胚的两个空间实际上便是两个具有相同拓扑结构的空间.

定理 2.2.3 设 X, Y 和 Z 都是拓扑空间. 则

(1) X 与 X 同胚；

(2) 如果 X 与 Y 同胚，则 Y 与 X 同胚；

(3) 如果 X 与 Y 同胚，Y 与 Z 同胚，则 X 与 Z 同胚.

证明 从定理2.2.2直接得到. ■

根据定理2.2.3,我们可以说:在任意给定的一个由拓扑空间组成的族中,两个拓扑空间是否同胚这一关系是一个等价关系①.因而同胚关系将这个拓扑空间族分为互不相交的等价类,使得属于同一类的拓扑空间彼此同胚,属于不同类的拓扑空间彼此不同胚.

拓扑空间的某种性质 P,如果为某一个拓扑空间所具有,则必为与其同胚的任何一个拓扑空间所具有,则称此性质 P 是一个**拓扑不变性质**.换言之,拓扑不变性质即为同胚的拓扑空间所共有的性质.

拓扑学的中心任务便是研究拓扑不变性质.

至此我们已经做完了将数学分析中我们熟知的欧氏空间和欧氏空间之间的连续函数的概念,经由度量空间和度量空间之间的连续映射,一直抽象为拓扑空间和拓扑空间之间的连续映射这样一个在数学的历史上经过了很长的一段时期才完成的工作.在数学的发展过程中对所研究的问题不断地加以抽象这种做法是屡见不鲜的,但每一次的抽象都是把握住旧的研究对象(或其中的某一个方面)的精粹而进行的一次提升,是一个去粗取精的过程.也正因为如此,新的概念和理论往往有更多的包容.拓扑学无疑也是如此,一方面它使我们对"空间"和"连续"有更为纯正的认识,另一方面也包含了无法列入以往的理论中的新的研究对象(特别是许多无法作为度量空间处理的映射空间).这一切读者在学习的过程中必然会不断地加深体会.

为了使读者对新旧概念的区别有较深的印象,在这两节中我

① 有的读者或许会问,为什么不说:"在由全体拓扑空间组成的族中,两个拓扑空间是否同胚这一关系是一个等价关系?"这是因为,承认有"由全体拓扑空间组成的族"会引起逻辑矛盾:若记这个族为 T,令 $\widetilde{T}=\{X\mid(X,\mathscr{T})\in T\}$.赋予 $\widetilde{T}$ 以平庸拓扑 $\mathscr{T}_0$,于是 $(\widetilde{T},\mathscr{T}_0)\in T$,从而 $\widetilde{T}\in\widetilde{T}$.这就产生了一个集合是自己的元素的问题了.

们给了一些例子(今后还将会给出另外的一些).客观地说这两节的例子中除去欧氏空间(包括实数空间)和 Hilbert 空间,其它的都颇显得有点儿怪,它们明显地是为了澄清概念而构造出来的.这些例子只是帮助我们更好地掌握拓扑学的工具,读者不要以为拓扑学就是数学分析中的连续函数理论加上一些不常见的反例.

习 题

1. 证明例 2.2.5.

2. 对于每一个 $n\in\mathbb{Z}_+$,令 $A_n=\{m\in\mathbb{Z}_+\mid m\geqslant n\}$,证明:

$$\mathscr{T}=\{A_n\mid n\in\mathbb{Z}_+\}\cup\{\varnothing\}$$

是正整数集 $\mathbb{Z}_+$ 的一个拓扑.

3. 就 $n=2,3,4$ 指出:

(1) 恰含 n 个点的集合一共有多少个拓扑?

(2) 恰含 n 个点的拓扑空间一共有多少个同胚等价类?

4. 分别确定有限补空间和可数补空间何时是可度量化空间.

5. 证明:每一个离散空间都是可度量化的.

6. 设 (X,ρ) 是一个度量空间.证明:作为拓扑空间 X 是一个离散空间,当且仅当 ρ 是一个离散度量.

7. 设 $\mathscr{T}_1$ 和 $\mathscr{T}_2$ 是集合 X 的两个拓扑.证明:$\mathscr{T}_1\cap\mathscr{T}_2$ 也是 X 的拓扑.举例说明 $\mathscr{T}_1\cup\mathscr{T}_2$ 可以不是 X 的拓扑.

8. 设 $\{\mathscr{T}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是由集合 X 的一些拓扑构成的一个集族,其中指标集 Γ 非空.证明:$\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\mathscr{T}_\gamma$ 是 X 的一个拓扑.

9. 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间,其中 ∞ 是任何一个不属于 X 的元素[①].令 $X^*=X\cup\{\infty\}$,$\mathscr{T}^*=\mathscr{T}\cup\{X^*\}$.证明 $(X^*,\mathscr{T}^*)$ 是一个拓扑空间.

10. 证明:

(1) 从拓扑空间到平庸空间的任何映射都是连续映射;

(2) 从离散空间到拓扑空间的任何映射都是连续映射.

11. 举例说明:拓扑空间之间的连续的一一映射的逆映射可以不是连续

---

① 这样一个元素是存在的,例如令 $\infty=X$

的.如果要求所涉及的拓扑空间都是可度量化的,你还能举出这样的例子吗?

12. 设 X 和 Y 是两个同胚的拓扑空间. 证明:如果 X 是可度量化的,则 Y 也是可度量化的.

§2.3　邻域与邻域系

我们在数学分析中定义映射的连续性是从"局部"到"整体"的,也就是说先定义映射在某一点处的连续性,然后再定义这个映射本身的连续性. 然而对于拓扑空间的映射而言,先定义映射本身的连续性更为方便,所以我们先在§2.2中做好了;现在轮到给出映射在某一点处的连续性的定义了. 在定理2.1.4中我们已经发现,为此只要有一个适当的称之为"邻域"的概念,而在§2.1中定义度量空间的邻域时又只用到"开集". 因此我们先在拓扑空间中建立邻域的概念然后再给出映射在某一点处的连续性的概念. 这些概念的给出一点也不会使我们感到突然.

定义 2.3.1　设$(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间,$x\in X$. 如果 U 是 X 的一个子集,满足条件:存在一个开集 $V\in\mathscr{T}$ 使得 $x\in V\subset U$,则称 U 是点 x 的一个**邻域**. 点 x 的所有邻域构成的 X 的子集族称为点 x 的**邻域系**. 易见,如果 U 是包含着点 x 的一个开集,那么它一定是 x 的一个邻域,于是我们称 U 是点 x 的一个**开邻域**.

首先注意,当我们把一个度量空间看作拓扑空间时(这时,空间的拓扑是由度量诱导出来的拓扑),一个集合是否是某一个点的邻域,无论是按§2.1中的定义或者是按这里的定义,都是一回事.

定理 2.3.1　拓扑空间 X 的一个子集 U 是开集的充分必要条件是 U 是它的每一点的邻域,即只要 $x\in U$,U 便是 x 的一个邻域.

证明　定理中条件的必要性是明显的. 以下证明充分性. 如果

U 是空集 $\varnothing$，当然 U 是一个开集. 下设 $U\neq\varnothing$. 根据定理中的条件，对于每一个 $x\in U$ 存在一个开集 U_x 使得 $x\in U_x\subset U$. 因此

$$U=\bigcup_{x\in U}\{x\}\subset\bigcup_{x\in U}U_x\subset U$$

故 $U=\bigcup_{x\in U}U_x$. 根据拓扑的定义，U 是一个开集. ∎

定理 2.3.2 概括了邻域系的基本性质.

定理 2.3.2 设 X 是一个拓扑空间. 记 $\mathscr{U}_x$ 为点 $x\in X$ 的邻域系. 则：

(1) 对于任何 $x\in X$，$\mathscr{U}_x\neq\varnothing$；并且如果 $U\in\mathscr{U}_x$，则 $x\in U$；

(2) 如果 $U,V\in\mathscr{U}_x$，则 $U\cap V\in\mathscr{U}_x$；

(3) 如果 $U\in\mathscr{U}_x$ 并且 $U\subset V$，则 $V\in\mathscr{U}_x$；

(4) 如果 $U\in\mathscr{U}_x$，则存在 $V\in\mathscr{U}_x$ 满足条件：(i) $V\subset U$ 和 (ii) 对于任何 $y\in V$，有 $V\in\mathscr{U}_y$.

证明 (1) 对于任何 $x\in X$，由于 X 是一个开集，所以显然 $X\in\mathscr{U}_x$，因此 $\mathscr{U}_x\neq\varnothing$. 此外根据邻域的定义，一个点的邻域必包含这个点本身.

(2) 设 $U,V\in\mathscr{U}_x$. 则存在开集 U_0 和 V_0 使得 $x\in U_0\subset U$ 和 $x\in V_0\subset V$ 成立. 从而我们有 $x\in U_0\cap V_0\subset U\cap V$. 由于 $U_0\cap V_0$ 是一个开集，故 $U\cap V\in\mathscr{U}_x$.

(3) 设 $U\in\mathscr{U}_x$，并且有 $U\subset V$. 则存在开集 U_0 使得 $x\in U_0\subset U$，从而有 $x\in U_0\subset V$，因此 $V\in\mathscr{U}_x$.

(4) 设 $U\in\mathscr{U}_x$. 令 V 为满足条件 $x\in V\subset U$ 的任何一个开集. V 已经满足条件(i)，根据定理 2.3.1，它也满足条件(ii). ∎

以下定理表明，我们完全可以从邻域系的概念出发来建立拓扑空间理论，这种做法在点集拓扑发展的早期常被采用，并且这种做法或许还显得自然一点，但不如现在流行的从开集概念出发定义拓扑来得简洁.

定理 2.3.3 设 X 是一个集合. 又设对于每一点 $x\in X$ 指定

了 X 的一个子集族 $\mathscr{U}_x$,并且它们满足定理 2.3.2 中的条件(1)~(4).则 X 有唯一的一个拓扑 $\mathscr{T}$ 使得对于每一点 $x\in X$,子集族 $\mathscr{U}_x$ 恰是点 x 在拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中的邻域系.

证明 令

$$\mathscr{T}=\{U\subset X \mid \text{如果 } x\in U, \text{则有 } U\in\mathscr{U}_x\}$$

我们验证 $\mathscr{T}$ 是 X 的一个拓扑:

(i) 空集 $\varnothing$ 中没有任何一个点,所以显然 $\varnothing\in\mathscr{T}$;对于任何 $x\in X$,根据定理 2.3.2 中的条件(1),可以任意选取 $U\in\mathscr{U}_x$;由于 U 是 X 的一个子集,根据定理 2.3.2 中的条件(3),我们有 $X\in\mathscr{U}_x$.因此 $X\in\mathscr{T}$.

(ii) 设 $A,B\in\mathscr{T}$.如果 $x\in A\cap B$,由于我们有 $A\in\mathscr{U}_x$ 和 $B\in\mathscr{U}_x$,根据定理 2.3.2 中的条件(2)可见 $A\cap B\in\mathscr{U}_x$.因此 $A\cap B\in\mathscr{T}$.

(iii) 设 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}$.如果 $x\in\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A$,则存在 $U\in\mathscr{T}_1$ 使得 $x\in U$.由于 $U\in\mathscr{T}$,所以 $U\in\mathscr{U}_x$;由于 $U\subset\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A$,所以根据定理 2.3.2 中的条件(3)有 $\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A\in\mathscr{U}_x$.这证明 $\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A\in\mathscr{T}$.

现在记任意一点 $x\in X$ 在拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中的邻域系为 $\mathscr{U}_x^*$,并且证明 $\mathscr{U}_x^*=\mathscr{U}_x$.设 $U\in\mathscr{U}_x$.根据定理 2.3.2 中的条件(4),可见存在 $V\in\mathscr{U}_x$ 使得 $V\in\mathscr{T}$;又根据定理 2.3.2 中的条件(1),可见 $x\in V$,于是 $x\in V\subset U$,从而 $U\in\mathscr{U}_x^*$.这证明 $\mathscr{U}_x\subset\mathscr{U}_x^*$.另一方面,设 $U^*\in\mathscr{U}_x^*$.则存在 $V^*\in\mathscr{T}$ 使得 $x\in V^*\subset U^*$.由于 $V^*\in\mathscr{U}_x$ 并且根据定理 2.3.2 中的条件(3),可见 $U^*\in\mathscr{U}_x$.这又证明了 $\mathscr{U}_x\supset\mathscr{U}_x^*$.因此 $\mathscr{U}_x=\mathscr{U}_x^*$.

剩下证明定理中谈到的唯一性.为此假定 $\mathscr{T}_*$ 是 X 的一个拓扑,使得对于任何 $x\in X$,X 的子集族 $\mathscr{U}_x$ 便是点 x 在拓扑空间 $(X,\mathscr{T}_*)$ 中的邻域系.这时根据定理 2.3.1 立即可见 $W_*\in\mathscr{T}_*$ 当且仅当 $x\in W_*$ 蕴涵 $W_*\in\mathscr{U}_x$,即 $W_*\in\mathscr{T}$.这证明 $\mathscr{T}_*=\mathscr{T}$. ■

现在我们来将度量空间之间的连续映射在一点处的连续性的概念推广到拓扑空间之间的映射中去.

定义 2.3.2 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f:X\to Y$, $x\in X$. 如果 $f(x)\in Y$ 的每一个邻域 U 的原象 $f^{-1}(U)$ 是 $x\in X$ 的一个邻域,则称映射 f 是一个**在点 x 处连续的映射**,或简称映射 f **在点 x 处连续**.

与连续映射的情形一样,按这种方式定义拓扑空间之间的映射在某一点处的连续性也明显地是受到了§2.1 中的定理 2.1.4 的启发. 并且那个定理也保证了:当 X 和 Y 是两个度量空间时,如果 $f:X\to Y$ 是从度量空间 X 到度量空间 Y 的一个映射,它在某一点 $x\in X$ 处连续,那么它也是从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的一个在点 x 处连续的映射;反之亦然.

这里我们也有与定理 2.2.1 类似的定理.

定理 2.3.4 设 X, Y 和 Z 都是拓扑空间. 则

(1) 恒同映射 $i_X:X\to X$ 在每一点 $x\in X$ 处连续;

(2) 如果 $f:X\to Y$ 在点 $x\in X$ 处连续, $g:Y\to Z$ 在点 $f(x)$ 处连续,则 $g\circ f:X\to Z$ 在点 x 处连续.

证明 请读者自己补证. ■

以下定理则建立了"局部的"连续性概念和"整体的"连续性概念之间的联系.

定理 2.3.5 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f:X\to Y$. 则映射 f 连续当且仅当对于每一点 $x\in X$,映射 f 在点 x 处连续.

证明 **必要性:** 设映射 f 连续, $x\in X$. 如果 U 是 $f(x)$ 的一个邻域,则存在开集 V 使得 $f(x)\in V\subset U$,于是 $x\in f^{-1}(V)\subset f^{-1}(U)$,其中 $f^{-1}(V)$ 是一个开集,从而 $f^{-1}(U)$ 是 x 的一个邻域. 这证明 f 在点 x 处连续.

充分性: 设对于每一点 $x\in X$,映射 f 在点 x 处连续. 如果 $U\subset Y$ 是一个开集,则对于每一点 $x\in f^{-1}(U)$,集合 U 是 $f(x)\in$

U 的一个邻域.因此对于每一点 $x\in f^{-1}(U)$, $f^{-1}(U)$是 x 的一个邻域,因而 $f^{-1}(U)$是一个开集.这就证明了 f 连续. ■

§2.4 导集,闭集,闭包

如果在一个拓扑空间中给定了一个子集,那么拓扑空间中的每一个点相对于这个子集而言"处境"各自不同,因此可以对它们进行分类处理.

定义 2.4.1 设 X 是一个拓扑空间,$A\subset X$.如果点 $x\in X$ 的每一个邻域 U 中都有 A 中异于 x 的点,即 $U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$,则称点 x 是集合 A 的一个**凝聚点或极限点**.集合 A 的所有凝聚点构成的集合称为 A 的**导集**,记作 $d(A)$.如果 $x\in A$ 并且 x 不是 A 的凝聚点,即存在 x 的一个邻域 U 使得 $U\cap(A-\{x\})=\varnothing$,则称 x 为 A 的一个**孤立点**.

在上述定义之中,凝聚点,导集,以及孤立点的定义无例外都依赖于它所在的拓扑空间的那个给定的拓扑.因此,当你在讨论问题时涉及了多个拓扑而又谈到例如凝聚点时,你必须明确你所谈的凝聚点是相对于哪个拓扑而言,不容许产生任何混淆.由于我们将要定义的许多概念绝大多数都是依赖于给定拓扑的,因此类似于这里谈到的问题今后几乎时时都会发生,我们不每次都作类似的注释,而请读者自己留心.

某些读者可能已经在诸如欧氏空间中接触过刚刚定义的这些概念,但绝不要以为对欧氏空间有效的性质,例如欧氏空间中凝聚点的性质,对一般的拓扑空间都有效.以下两个例子可以帮助读者澄清某些不正确的潜在印象.

例 2.4.1 离散空间中集合的凝聚点和导集.

设 X 是一个离散空间,A 是 X 中的一个任意子集.由于 X 中的每一个单点集都是开集,因此如果 $x\in X$,则 x 有一个邻域 $\{x\}$

使得$\{x\}\cap(A-\{x\})=\varnothing$,于是$x$不是$A$的凝聚点.以上论证说明,集合$A$没有任何一个凝聚点,从而$A$的导集是空集,即$d(A)=\varnothing$.

例 2.4.2 平庸空间中集合的凝聚点和导集.

设X是一个平庸空间,A是X中的一个任意子集.我们分三种情形讨论:

第1种情形:$A=\varnothing$.这时A显然没有任何一个凝聚点,亦即$d(A)=\varnothing$.(可以参见定理2.4.1中第(1)条的证明.)

第2种情形:A是一个单点集,令$A=\{x_0\}$.如果$x\in X$,$x\neq x_0$,点x只有唯一的一个邻域X,这时$x_0\in X\cap(A-\{x\})$,所以$X\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$;因此$x$是$A$的一个凝聚点,即$x\in d(A)$.然而对于$x_0$的唯一邻域$X$有$X\cap(A-\{x_0\})=\varnothing$,所以$x_0\notin d(A)$.于是我们得到$d(A)=X-A$.

第3种情形:A包含着多于一个点.请读者自己证明这时X中的每一个点都是A的凝聚点,即$d(A)=X$.

定理 2.4.1 设X是一个拓扑空间,$A\subset X$.则

(1) $d(\varnothing)=\varnothing$;

(2) $A\subset B$ 蕴涵$d(A)\subset d(B)$;

(3) $d(A\cup B)=d(A)\cup d(B)$;

(4) $d(d(A))\subset A\cup d(A)$.

证明 (1) 由于对于任何一点$x\in X$和点x的任何一个邻域U有$U\cap(\varnothing-\{x\})=\varnothing$,所以$x\notin d(\varnothing)$.因此$d(\varnothing)=\varnothing$.

(2) 设$A\subset B$.如果$x\in d(A)$,U是x的一个邻域,由于$U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$,故有$U\cap(B-\{x\})\neq\varnothing$,因此$x\in d(B)$.这证明了$d(A)\subset d(B)$.

(3) 根据(2),由于$A,B\subset A\cup B$,所以有$d(A),d(B)\subset d(A\cup B)$,从而$d(A)\cup d(B)\subset d(A\cup B)$.另一方面,如果$x\notin d(A)\cup d(B)$,也就是说既有$x\notin d(A)$又有$x\notin d(B)$.于是$x$

有一个邻域U使得$U\cap(A-\{x\})=\varnothing$,$x$也有一个邻域$V$使得$V\cap(A-\{x\})=\varnothing$.对于$x$的邻域$D=U\cap V$,我们有:

$$\begin{aligned}&D\cap((A\cup B)-\{x\})\\&=D\cap((A-\{x\})\cup(B-\{x\}))\\&=(D\cap(A-\{x\}))\cup(D\cap(B-\{x\}))\\&\subset(U\cap(A-\{x\}))\cup(V\cap(B-\{x\}))=\varnothing\end{aligned}$$

因此$D\cap((A\cup B)-\{x\})=\varnothing$,所以$x\notin d(A\cup B)$.这就得到$d(A\cup B)\subset d(A)\cup d(B)$.综上所述,可见(3)成立.

(4) 设$x\notin A\cup d(A)$,即既有$x\notin A$又有$x\notin d(A)$.则x有一个邻域U使得$U\cap(A-\{x\})=\varnothing$.任意选取$V$为$x$的一个开邻域,使得它包含于$U$中,这时我们也有$V\cap(A-\{x\})=\varnothing$.由于$x\notin A$,所以由此可见$V\cap A=\varnothing$.这也就是说,$V$中的任何一个点都不是$A$中的点,因此对于任何$y\in V$,有$V\cap(A-\{y\})=\varnothing$;由于$V$是$y$的一个邻域,因此$y$不是$A$的凝聚点,即$y\notin d(A)$.这说明$V$中没有$A$的任何一个凝聚点.于是$x$有一个邻域$V$与$A$的导集$d(A)$无交,所以$x\notin d(d(A))$.将以上的论证概括起来便是:只要$x\notin A\cup d(A)$,便有$x\notin d(d(A))$,这也就是说$d(d(A))\subset A\cap d(A)$,即(4)成立. ■

定义 2.4.2 设X是一个拓扑空间,$A\subset X$.如果A的每一个凝聚点都属于A,即$d(A)\subset A$,则称A是拓扑空间X中的一个**闭集**.

例如,根据例2.4.1和例2.4.2中的讨论可见,离散空间中的任何一个子集都是闭集,而平庸空间中的任何一个非空的真子集都不是闭集.

定理 2.4.2 设X是一个拓扑空间,$A\subset X$.则A是一个闭集,当且仅当A的补集A'是一个开集.

证明 **必要性:** 设A是一个闭集.如果$x\in A'$,则$x\notin A$并且x有一个邻域U使得$U\cap(A-\{x\})=\varnothing$,从而$U\cap A=\varnothing$,

亦即 $U\subset A'$. 这证明,对于任何 $x\in A'$, A'是 x 的一个邻域,因此 A'是一个开集.

充分性: 设 A'是一个开集. 如果 $x\in A'$,则 A'是 x 的一个邻域,它满足条件:$A'\cap A=\varnothing$. 因此 $x\notin d(A)$. 于是我们有 $d(A)\subset A$,即 A 是一个闭集. ■

例 2.4.3 实数空间$\mathbb{R}$中作为闭集的区间.

设 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. 闭区间$[a,b]$是实数空间$\mathbb{R}$中的一个闭集,因为$[a,b]$的补集$[a,b]'=(-\infty,a)\cap(b,\infty)$是一个开集. 同理,$(-\infty,a]$和$[b,\infty)$都是闭集,$(-\infty,\infty)=\mathbb{R}$更显然是一个闭集. 然而开区间$(a,b)$却不是闭集,因为 a 是(a,b)的一个凝聚点但 $a\notin(a,b)$. 同理区间$(a,b]$, $[a,b)$, $(-\infty,a)$和(b,∞)都不是闭集.

定理 2.4.3 设 X 是一个拓扑空间. 记 $\mathscr{F}$ 为所有闭集构成的族. 则:

(1) $X,\varnothing\in\mathscr{F}$;

(2) 如果 $A,B\in\mathscr{F}$,则 $A\cup B\in\mathscr{F}$; (从而如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{F}$, $n\geqslant1$,则 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\in\mathscr{F}$.)

(3) 如果 $\varnothing\neq\mathscr{F}_1\subset\mathscr{F}$,则 $\bigcap_{A\in\mathscr{F}_1}A\in\mathscr{F}$.

在此定理的第(3)条中,我们特别要求 $\varnothing\neq\mathscr{F}_1$ 的原因在于当 $\varnothing=\mathscr{F}_1$ 时所涉及的交运算没有定义.

证明 根据定理 2.4.2,我们有

$$\mathscr{F}=\{U'\mid U\in\mathscr{T}\}$$

其中,$\mathscr{T}$是 X 的拓扑.

(1) 由于 $X,\varnothing\in\mathscr{T}$,所以 $\varnothing=X'$, $X=\varnothing'\in\mathscr{F}$.

(2) 当 $A,B\in\mathscr{F}$时,有 $A',B'\in\mathscr{T}$,从而 $A'\cap B'\in\mathscr{T}$. 因此

$$A\cup B=A''\cup B''=(A'\cap B')'\in\mathscr{F}$$

(3) 令 $\mathscr{T}_1=\{A\mid A'\in\mathscr{F}_1\}$,于是 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}$,因此$\bigcup_{U\in\mathscr{T}_1}U\in\mathscr{T}$. 从而

$$\bigcap_{A\in\mathscr{F}_1} A=\bigcap_{A\in\mathscr{F}_1} A''=(\bigcup_{A\in\mathscr{F}_1} A')'=(\bigcup_{U\in\mathscr{F}_1} U)'\in\mathscr{F}$$

定理证明完成. ■

例 2.4.4　Cantor 集是实数空间$\mathbb{R}$中的一个闭集.

我们先来给出定义.先定义映射 $f_1,f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 使得对于任何 $t\in\mathbb{R}$ 有

$$f_1(t)=\frac{t}{3}\quad 和\quad f_2(t)=\frac{2}{3}+\frac{t}{3}$$

容易验证映射 f_1 和 f_2 都是同胚,因此,任何开集 $U\subset\mathbb{R}$ 的 f_1 象 $f_1(U)$和 f_2 象 $f_2(U)$都是开集.

现在按归纳原则定义一系列开集 $A_1,A_2,\cdots$如下:令 $A_1=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$;对于任何 $n>1$,定义 $A_n=f_1(A_{n-1})\cup f_2(A_{n-1})$.事实上,$A_2$ 是两个开区间$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$和$\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$之并,$A_3$ 是四个开区间$\left(\frac{1}{27},\frac{2}{27}\right)$,$\left(\frac{7}{27},\frac{8}{27}\right)$,$\left(\frac{19}{27},\frac{20}{27}\right)$,$\left(\frac{25}{27},\frac{26}{27}\right)$之并,……令 $A=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+}A_n$,它是可数个开集之并,当然是一个开集.容易验证,$A\subset[0,1]$.集合 $C=[0,1]-A$ 称为 Cantor **集**,或称为**标准** Cantor **三分集**.它是一个闭集,因为 $C=[0,1]\cap A'$,而等式右边的两个集合都是闭集.

定义 2.4.3　设 X 是一个拓扑空间,$A\subset X$.集合 A 与 A 的导集$d(A)$的并 $A\cup d(A)$称为集合 A **的闭包**,记作 $\bar{A}$ 或A^-.

容易看出:$x\in\bar{A}$ 当且仅当对于 x 的任何一个邻域 U 有 $U\cap A\neq\varnothing$.

定理 2.4.4　拓扑空间 X 的子集 A 是闭集的充分必要条件是 $A=\bar{A}$.

证明　定理成立是因为:集合 A 为闭集当且仅当$d(A)\subset A$,而这又当且仅当 $A=A\cup d(A)$. ■

定理 2.4.5　设 X 是一个拓扑空间.则对于任意 $A,B\in X$

有:

(1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$;

(2) $A\subset\overline{A}$;

(3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;

(4) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

证明 (1) 成立是由于 $\varnothing$是闭集.

(2) 成立是根据闭包的定义.

(3) 成立是因为

$$\begin{aligned}\overline{A\cup B}&=(A\cup B)\cup d(A\cup B)\\&=A\cup B\cup d(A)\cup d(B)\\&=(A\cup d(A))\cup(B\cup d(B))\\&=\overline{A}\cup\overline{B}\end{aligned}$$

(4) 成立是因为

$$\begin{aligned}\overline{\overline{A}}&=\overline{A\cup d(A)}\\&=\overline{A}\cup\overline{d(A)}\\&=A\cup d(A)\cup d(d(A))\\&=A\cup d(A)=\overline{A}\end{aligned}$$

在第(3)条和第(4)条的证明过程中我们分别用到了定理2.4.1中的第(3)条和第(4)条. ■

定理 2.4.6 拓扑空间 X 的任何一个子集 A 的闭包 $\overline{A}$ 都是闭集.

证明 根据定理2.4.4和定理2.4.5(4)直接推得. ■

定理 2.4.7 设 X 是一个拓扑空间,$\mathscr{F}$是由空间 X 中所有的闭集构成的族,则对于 X 的每一个子集 A,有

$$\overline{A}=\bigcap_{B\in\mathscr{F},B\supset A}B$$

即集合 A 的闭包等于包含 A 的所有闭集之交.

此定理的等式中,$\bigcap_{B\in\mathscr{F},B\supset A}B$ 是交 $\bigcap_{B\in\{B_1\in\mathscr{F}|B_1\supset A\}}B$ 的简略表示,以后我们还要采用这类表达方式而不另外说明.

证明　由于 A 包含于 $\bigcap_{B\in\mathscr{F},B\supset A}B$，而后者是一个闭集，所以

$$\overline{A}\subset\bigcap_{B\in\mathscr{F},B\supset A}B$$

另一方面，由于 $\overline{A}$ 是一个闭集，并且 $A\subset\overline{A}$，所以

$$\bigcap_{B\in\mathscr{F},B\supset A}B\subset\overline{A}$$

综合这两个包含关系，即得所求证的等式. ■

由定理 2.4.7 可见，$\overline{A}$ 是一个包含着 A 的闭集，它又包含于任何一个包含 A 的闭集之中，在这种意义下我们说：一个集合的闭包乃是包含着这个集合的最小的闭集.

以上由一个集合求取它的闭包的手续可以理解为空间 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 到自身的一个映射，集合 $A\subset X$ 在这个映射下的象便是 A 的闭包 $\overline{A}$.

定义 2.4.4　设 X 是一个集合. 映射 $c^*:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$ 如果满足条件：对于任何 $A,B\in\mathscr{P}(X)$，

(1) $c^*(\varnothing)=\varnothing$;

(2) $A\subset c^*(A)$;

(3) $c^*(A\cup B)=c^*(A)\cup c^*(B)$;

(4) $c^*(c^*(A))=c^*(A)$;

则称为集合 X 的一个**闭包运算**.（以上四个条件通常称为 Kuratovski **闭包公理**.）

根据定理 2.4.5，将拓扑空间 X 的子集 A 映为它的闭包 $\overline{A}$ 的那个从 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$ 到自身的映射便是一个闭包运算，即这个映射满足 Kuratovski 闭包公理. 不仅如此，下面的定理说明 Kuratovski 闭包公理和我们定义拓扑的三个条件等价. 有些文献（尤其是在点集拓扑发展的早期出现的文献）就是从闭包运算出发来建立拓扑空间这一概念的.

定理 2.4.8　设 X 是一个集合，$c^*:\mathscr{P}(X)\to\mathscr{P}(X)$ 是集合 X 的一个闭包运算. 则存在 X 的唯一一个拓扑 $\mathscr{T}$ 使得在拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中对于每一个 $A\subset X$ 有 $c^*(A)=\overline{A}$.

证明 我们证明 X 的子集族

$$\mathscr{T}=\{U\subset X\mid c^*(U')=U'\}$$

便是满足定理要求的那个唯一的拓扑.首先验证 $\mathscr{T}$ 是 X 的一个拓扑:

(i) 根据(1)我们有 $c^*(\varnothing)=\varnothing$,此即 $c^*(X')=X'$,因此 $X\in\mathscr{T}$;根据(2)我们有 $X\subset c^*(X)$,因此 $X=c^*(X)$,亦即 $c^*(\varnothing')=\varnothing'$,所以 $\varnothing\in\mathscr{T}$.

(ii) 设 $A,B\in\mathscr{T}$,即 $c^*(A')=A'$,$c^*(B')=B'$.应用(3)我们有

$$\begin{aligned}c^*((A\cap B)')&=c^*(A'\cup B')\\&=c^*(A')\cup c^*(B')\\&=A'\cup B'=(A\cap B)'\end{aligned}$$

因此 $A\cap B\in\mathscr{T}$.

(iii) 我们预先指出:如果 $A,B\subset X$,$A\subset B$,则 $c^*(A)\subset c^*(B)$.这是因为当 $A\subset B$ 时我们有 $B=A\cup(B-A)$,所以根据(3)得到

$$c^*(B)=c^*(A)\cup c^*(B-A)\supset c^*(A)$$

现在设 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}$,即 X 的子集族 $\mathscr{T}_1$ 是满足条件:对于任何一个 $A\in\mathscr{T}_1$ 有 $c^*(A')=A'$.一方面,对于任何 $A_1\in\mathscr{T}_1$,我们有

$$\Big(\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A\Big)'=\bigcap_{A\in\mathscr{T}_1}A'\subset A'_1$$

从而

$$c^*\Big(\Big(\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A\Big)'\Big)\subset c^*(A'_1)=A'_1$$

因此

$$\begin{aligned}c^*\Big(\Big(\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A\Big)'\Big)&\subset\bigcap_{A_1\in\mathscr{T}_1}A'_1\\&=\Big(\bigcup_{A_1\in\mathscr{T}_1}A_1\Big)'\\&=\Big(\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A\Big)'\end{aligned}$$

另一方面，根据(2)我们立即有

$$c^*((\bigcup_{A\in\mathcal{T}_1}A)')\supset(\bigcup_{A\in\mathcal{T}_1}A)'$$

综合两个包含关系便得

$$c^*((\bigcup_{A\in\mathcal{T}_1}A)')=(\bigcup_{A\in\mathcal{T}_1}A)'$$

所以$\bigcup_{A\in\mathcal{T}_1}A\in\mathcal{T}$.

假设$\tilde{\mathcal{T}}$也是 X 的一个满足定理要求的拓扑，也就是说，任何一个集合 $A\subset X$ 在拓扑空间$(X,\tilde{\mathcal{T}})$中的闭包也是 $c^*(A)$. 此时根据定理 2.4.4 易见，一个集合在拓扑空间$(X,\mathcal{T})$中是闭集当且仅当它在拓扑空间$(X,\tilde{\mathcal{T}})$中是闭集. 再根据定理 2.4.2 可见，一个集合在拓扑空间$(X,\mathcal{T})$中是开集当且仅当它在拓扑空间$(X,\tilde{\mathcal{T}})$中是开集. 这说明$\mathcal{T}=\tilde{\mathcal{T}}$. ■

在度量空间中，集合的凝聚点，导集和闭包都可以通过度量来刻画.

定义 2.4.5 设(X,ρ)是一个度量空间. X 中的点 x 到 X 的非空子集A 的**距离**$\rho(x,A)$定义为

$$\rho(x,A)=\inf\{\rho(x,y)\mid y\in A\}$$

根据下确界的性质以及邻域的定义易见：$\rho(x,A)=0$ 当且仅当对于任意实数 $\varepsilon>0$，存在 $y\in A$ 使得$\rho(x,y)<\varepsilon$，换言之即是：对于任意 $B(x,\varepsilon)$有 $B(x,\varepsilon)\cap A\neq\varnothing$，而这又等价于：对于 x 的任何一个邻域U 有 $U\cap A\neq\varnothing$，应用以上讨论立即得到：

定理 2.4.9 设 A 是度量空间(X,ρ)中的一个非空子集. 则

(1) $x\in d(A)$当且仅当 $\rho(x,A-\{x\})=0$;

(2) $x\in\overline{A}$ 当且仅当 $\rho(x,A)=0$. ■

以下定理既为连续映射提供了等价的定义，也为验证映射的连续性提供了另外的手段.

定理 2.4.10 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$. 则以下

条件等价:

(1) f 是一个连续映射;

(2) Y 中的任何一个闭集 B 的原象 $f^{-1}(B)$ 是一个闭集;

(3) 对于 X 中的任何一个子集 A,A 的闭包的象包含于 A 的象的闭包,即 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$;

(4) 对于 Y 中的任何一个子集 B,B 的闭包的原象包含 B 的原象的闭包,即 $f^{-1}(\overline{B})\supset\overline{f^{-1}(B)}$.

证明 (1) 蕴涵(2). 设 $B\subset Y$ 是一个闭集. 则 B' 是一个开集,因此根据(1),$f^{-1}(B')=(f^{-1}(B))'$ 是 X 中的一个开集,因此 $f^{-1}(B)$ 是 X 中的一个闭集.

(2) 蕴涵(3). 设 $A\subset X$. 由于 $f(A)\subset\overline{f(A)}$,我们有 $A\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$. 因为 $\overline{f(A)}$ 是 Y 中的一个闭集,根据(2),$f^{-1}(\overline{f(A)})$ 是 X 中的一个闭集. 因此有 $\overline{A}\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$,从而 $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ 成立.

(3) 蕴涵(4). 设 $B\subset Y$. 对于集合 $f^{-1}(B)\subset X$ 应用(3)即得 $f(\overline{f^{-1}(B)})\subset\overline{f(f^{-1}(B))}\subset\overline{B}$,因此 $f^{-1}(\overline{B})\supset\overline{f^{-1}(B)}$.

(4) 蕴涵(1). 设 U 是 Y 中的一个开集. 则 U' 是 Y 中的一个闭集. 对此集合应用(4)可见 $\overline{f^{-1}(U')}\subset f^{-1}(U')$. 而 $\overline{f^{-1}(U')}\supset f^{-1}(U')$ 是显然的,故 $\overline{f^{-1}(U')}=f^{-1}(U')$. 这说明 $f^{-1}(U')=(f^{-1}(U))'$ 是 X 中的一个闭集,所以 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的一个开集. ■

习　题

1. 求集合的导集和闭包.

(1) 设 A 是有限补空间 X 中的一个无限子集. 求 A 的导集和闭包;

(2) 设 A 是可数补空间 X 中的一个不可数子集. 求 A 的导集和闭包;

(3) 求实数空间 $\mathbb{R}$ 中的有理数集 $\mathbb{Q}$ 的导集和闭包;

(4) 设 X^* 是§2.2 习题 9 中定义的拓扑空间. 求单点集 $\{\infty\}$ 的导集和闭包.

2. 设 X 是一个拓扑空间，$A,B\subset X$. 证明：

(1) $x\in X$ 是集合 A 的凝聚点当且仅当 x 是集合 $A-\{x\}$ 的凝聚点；

(2) 如果 $d(A)\subset B\subset A$ 则 B 是一个闭集.

3. 证明：闭包运算定义中的 Kuratovski 公理等价于条件：对于任何 $A,B\subset X$,

$$A\cup c^*(A)\cup c^*(c^*(B))=c^*(A\cup B)-c^*(\varnothing)$$

4. 设 X 是一个拓扑空间；$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 中的一个任意子集族，其中指标集 Γ 非空；$A,B\subset X$. 证明以下三个包含关系，并举例说明每一个包含关系都不能改为等号.

(1) $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{A_\gamma}\subset\overline{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma}$；

(2) $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\overline{A_\gamma}\supset\overline{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma}$；

(3) $\overline{A}-\overline{B}\subset\overline{A-B}$.

5. 设 X 是一个集合；$\mathscr{F}$ 是 X 的一个子集族，满足定理 2.4.3 中的条件(1),(2)和(3). 证明 X 有唯一的一个拓扑 $\mathscr{T}$ 使得 $\mathscr{F}$ 恰为拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中的全体闭集构成的集族.

6*. 证明：拓扑空间中的每一个子集的导集为闭集当且仅当此空间中的每一个单点集的导集为闭集.（建议读者先努力完成这个练习. 假如经过努力不能完成，或者虽然完成但十分费力，都不妨再试试下一个看起来似乎更难的练习.）

7*. 设 X 是一个拓扑空间；$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 中的一个子集族. 证明：如果对于每一个 $\gamma\in\Gamma$，集合 A_γ 的导集是闭集，则集合 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ 的导集是闭集.（提示：请充分运用定理 2.4.1 中的结论.）

8. 证明：度量空间中的每一个子集的导集都是闭集.

§2.5　内部，边界

在前一节中我们讨论了在拓扑空间中由一个给定集合如何引出一些与之密切相关的集合，如导集，闭包等. 本节继续这个话题.

定义 2.5.1　设 X 是一个拓扑空间，$A\subset X$. 如果 A 是点 $x\in X$ 的一个邻域，即存在 X 中的一个开集 V 使得 $x\in V\subset A$，则称

点 x 是集合 A 的一个**内点**.集合 A 的所有内点构成的集合称为集合 A 的**内部**,记作 A°.

定理 2.5.1 设 X 是一个拓扑空间,$A\subset X$.则 $A^{\circ}=A'^{-\prime}$.因此 $A^{-}=A'^{\circ\prime}$.

证明 设 $x\in A^{\circ}$,即 A 是 x 的一个邻域.由于 $A\cap A'=\varnothing$,所以 $x\notin A'^{-}$,即 $x\in A'^{-\prime}$.这证明 $A^{\circ}\subset A'^{-\prime}$.

另一方面,若 $x\in A'^{-\prime}$,即 $x\notin\overline{A'}$,亦即 x 有一个邻域 V 使得 $V\cap A'=\varnothing$.从而 $V\subset A$,故 A 也是 x 的一个邻域,亦即 $x\in A^{\circ}$.这证明 $A^{\circ}\supset A'^{-\prime}$.

以上证明了定理中的第一个等式.要证明定理中的第二个等式,只需将 A' 代换第一个等式中的 A,并将所得到的等式两边取补集即可. ■

关于内部的基本性质,我们有与闭包的性质(定理 2.4.4 至定理 2.4.7)完全对偶的一组定理,即以下定理 2.5.2 至定理 2.5.5.这些定理的证明过程都是将闭包的相应性质通过定理 2.5.1 转化为内部的性质.

定理 2.5.2 拓扑空间 X 的子集 A 是开集的充分必要条件是 $A=A^{\circ}$.

证明 集合 A 是一个开集,即 A 的补集 A' 是闭集.根据定理 2.4.4,这当且仅当 $A'=A'^{-}$ 成立.通过等式两边取补集的办法可见,这又当且仅当 $A=A'^{-\prime}$ 成立;根据定理 2.5.1 此即 $A=A^{\circ}$ 成立. ■

定理 2.5.3 设 X 是一个拓扑空间.则对于任意 $A,B\in X$ 有:

(1) $X^{\circ}=X$;

(2) $A\supset A^{\circ}$;

(3) $(A\cap B)^{\circ}=A^{\circ}\cap B^{\circ}$;

(4) $A^{\circ\circ}=A^{\circ}$.

证明 (1) 成立是因为 X 是一个开集.

(2) 成立是根据内部的定义.

(3) 成立是因为

$$
\begin{aligned}
(A\cap B)^{\circ} &= (A\cap B)'^{-\prime} = (A'\cup B')^{-\prime} \\
&= (A'^{-}\cup B'^{-})' = A'^{-\prime}\cap B'^{-\prime} = A^{\circ}\cap B^{\circ}
\end{aligned}
$$

(4) 成立是因为

$$
\begin{aligned}
A^{\circ\circ} &= A^{\circ\prime-\prime} = A'^{-\prime\prime-\prime} \\
&= A'^{--\prime} = A'^{-\prime} = A^{\circ}
\end{aligned}
$$

■

根据定理2.5.3(3)立即可见:如果 $A\subset B$,则 $A^{\circ}\subset B^{\circ}$.因为这时有

$$A^{\circ}=(A\cap B)^{\circ}=A^{\circ}\cap B^{\circ}$$

定理 2.5.4　拓扑空间 X 的任何一个子集 A 的内部 A° 都是开集.

证明　可根据定理2.5.2和定理2.5.3(4)推出,也可直接根据定理2.5.1得到. ■

定理 2.5.5　设 X 是一个拓扑空间,$\mathscr{T}$ 是 X 的拓扑.则对于 X 的每一个子集 A,有

$$A^{\circ}=\bigcup_{B\in\mathscr{T},B\subset A}B$$

即集合 A 的内部等于包含于 A 的所有开集之并.

证明　我们有:

$$
\begin{aligned}
A^{\circ} &= A'^{-\prime} \\
&= \Big(\bigcap_{B_1\in\mathscr{F},B_1\supset A'}B_1\Big)' \\
&= \bigcup_{B_1\in\mathscr{F},B_1\supset A'}B'_1 \\
&= \bigcup_{B'_1\in\mathscr{T},B'_1\subset A}B'_1 \\
&= \bigcup_{B\in\mathscr{T},B\subset A}B
\end{aligned}
$$

其中 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 中全体闭集构成的族. ■

由定理2.5.5可见,A° 是一个包含于 A 的开集,它又包含着

任何一个包含于 A 的开集,在这种意义下我们说:一个集合的内部乃是包含于这个集合的最大的开集.

与我们在前一节中处理闭包运算时的情形一样,求取一个集合的内部也可以理解为从拓扑空间 X 的幂集 $\mathscr{P}(X)$到自身的一个映射,它将每一个 $A\in\mathscr{P}(X)$映为 A°. 也同样可以象定义闭包运算一样定义内部运算,并由内部运算导出拓扑和拓扑空间的概念. 我们将这些工作作为习题留给读者去完成. 并且既然如此,映射的连续性自当也可通过内部这个概念作出等价的描述,有关的结论我们也安排在习题中,留给读者自己去证明.

定义 2.5.2 设 X 是一个拓扑空间,$A\subset X$. 点 $x\in X$,如果满足条件:在 x 的任何一个邻域 U 中既有 A 中的点又有 A' 中的点,即既有 $U\cap A\neq\varnothing$ 又有 $U\cap A'\neq\varnothing$,则称 x 是集合 A 的一个**边界点**. 集合 A 的全体边界点构成的集合称为集合 A 的**边界**,记作 $\partial(A)$.

关于闭包、内部,边界之间存在着的种种联系,我们列举一部分如下:

定理 2.5.6 设 X 是一个拓扑空间,$A\subset X$. 则

$$A^- = A'^{\circ\prime} = A^\circ\cup\partial(A)$$

$$A^\circ = A'^{-\prime} = A^- - \partial(A)$$

$$\partial(A) = A^-\cap A'^- = (A^\circ\cup A'^\circ)' = \partial(A')$$

证明 在定理 2.5.1 中我们已经证明了等式 $A^- = A'^{\circ\prime}$ 和 $A^\circ = A'^{-\prime}$.

$x\in\partial(A)$ 即对于 x 的任何一个邻域 U 有 $U\cap A\neq\varnothing$ 和 $U\cap A'\neq\varnothing$,也即是说既有 $x\in A^-$ 又有 $x\in A'^-$. 以上证明了 $\partial(A)=A^-\cap A'^-$.

剩下的几个等式证明如下:

$$A^-\cap A'^- = A'^{\circ\prime}\cap A^{\circ\prime} = (A^\circ\cup A'^\circ)'$$

$$\begin{aligned} A^\circ\cup\partial(A) &= A^\circ\cup(A^-\cap A'^-) \\ &= (A^\circ\cup A^-)\cap(A^\circ\cup A'^-) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= A^- \cap (A^\circ \cup A^{\circ\prime}) \\
&= A^- \cap X = A^- \\
A^- - \partial(A) &= A^- - (A^- \cap A'^-) \\
&= A^- - A'^- \\
&= A^- \cap A'^{-\prime} \\
&= A^- \cap A^\circ = A^\circ
\end{aligned}
$$

定理证明完毕. ■

习　题

1. 就§2.4习题1的各款求取指定集合的内部和边界.

2. 设 X 是一个拓扑空间,$A,B\subset X$. 证明:

(1) $A^- = A\cup\partial(A)$,$A^\circ = A-\partial(A)$;

(2) $\partial(A^\circ)\subset\partial(A)$,$\partial(A^-)\subset\partial(A)$;

(3) $\partial(A\cup B)\subset\partial(A)\cup\partial(B)$,$(A\cup B)^\circ\supset A^\circ\cup B^\circ$;

(4) $\partial(A)=\varnothing$当且仅当 A 是一个既开又闭的集合;

(5) $\partial(\partial(A))\subset\partial(A)$;

(6) $A\cap B\cap\partial(A\cap B)=A\cap B\cap(\partial(A)\cup\partial(B))$.

3. 仿照闭包运算的定义自行定义"内部运算"(参照定理2.5.3).并且自行叙述和证明与定理2.4.8相应的定理.

4*. 证明:对于任何拓扑空间中的任何一个子集 A,经过取补集,闭包,内部三种运算最多只能产生14个集合.并且在实数空间中选取一个适当的子集,使它经过上述三种运算恰能产生14个不同的集合.

5. 设 A 是度量空间(X,ρ)中的一个子集. 证明:

(1) $x\in A^\circ$ 当且仅当$\rho(x,A')>0$;

(2) $x\in\partial(A)$当且仅当既有 $\rho(x,A)=0$ 又有 $\rho(x,A')=0$.

6. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f:X\to Y$. 证明以下两个条件等价:

(1) f 连续;

(2) 对于 Y 的任何一个子集B,B 的内部的原象包含于B 的原象的内部,即 $f^{-1}(B^\circ)\subset(f^{-1}(B))^\circ$.

7*. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 又设映射 $f:X\to Y$ 满足条件:对于 X 的任何一个子集 A,A 的象的内部包含于 A 的内部的象,即$(f(A))^\circ\subset$

$f(A^c)$.

(1) 证明:如果 f 是一个满射,则 f 连续;

(2) 举例说明当 f 不是满射时 f 可以不是连续映射.

§2.6 基与子基

在讨论度量空间的拓扑的时候,球形邻域起着基本性的重要作用.一方面,每一个球形邻域都是开集,从而任意多个球形邻域的并也是开集;另一方面,假设 U 是度量空间 X 中的一个开集.则对于每一个 $x\in U$ 有一个球形邻域 $B(x,\varepsilon)\subset U$,因此 $U=\bigcup_{x\in U}B(x,\varepsilon)$.这就是说,一个集合是某度量空间中的一个开集当且仅当它是这个度量空间中的若干个球形邻域的并.因此我们可以说,度量空间的拓扑是由它的所有的球形邻域通过集族求并这一运算"产生"出来的.留意了这个事实,下面在拓扑空间中提出"基"这个概念就不会感到突然了.

定义 2.6.1 设$(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间,$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个子族.如果 $\mathscr{T}$ 中的每一个元素(即拓扑空间 X 中的每一个开集)是 $\mathscr{B}$ 中某些元素的并,即对于每一个 $U\in\mathscr{T}$,存在 $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}$ 使得

$$U=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}B$$

则称 $\mathscr{B}$ 是拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个**基**,或称 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 X 的一个**基**.

按照本节开头所作的论证立即可得:

定理 2.6.1 一个度量空间中的所有球形邻域构成的集族是这个度量空间作为拓扑空间时的一个基. ■

特别地,由于实数空间 $\mathbb{R}$ 中所有开区间构成的族就是它的所有球形邻域构成的族,因此所有开区间构成的族是实数空间 $\mathbb{R}$ 的一个基.

至于离散空间,它有一个最简单的基,这个基由所有的单点子集构成.

下面的定理为判定某一个开集族是否是给定的拓扑的一个基提供了一个易于验证的条件.

定理 2.6.2　设 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的一个开集族(即 $\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$),则 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 X 的一个基当且仅当对于每一个 $x\in X$ 和 x 的每一个邻域 U_x,存在 $V_x\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in V_x\subset U_x$.

证明　如果 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个基,则对于每一个 $x\in X$ 和 x 的每一个邻域 U_x,存在 x 的一个开邻域 W_x 使得 $W_x\subset U_x$. 由于 W_x 是一个开集,根据基的定义,存在 $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}$ 使得 $W_x=\bigcup_{A\in\mathscr{B}_1}A$. 于是由 $x\in\bigcup_{A\in\mathscr{B}_1}A$ 可知存在 $V_x\in\mathscr{B}_1(\subset\mathscr{B})$ 使得

$$x\in V_x\subset\bigcup_{A\in\mathscr{B}_1}A=W_x\subset U_x$$

这证明 $\mathscr{B}$ 满足定理中的条件.

另一方面,设定理中的条件成立. 如果 U 是 X 中的一个开集,则对于每一个 $x\in U$,由于 U 是 x 的一个邻域,故存在 $V_x\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in V_x\subset U$. 于是

$$U=\bigcup_{x\in U}\{x\}\subset\bigcup_{x\in U}V_x\subset U$$

因此 $U=\bigcup_{x\in U}V_x$,亦即 U 是 $\mathscr{B}$ 中某些元素之并,从而 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个基. ■

在度量空间中,通过球形邻域确定了度量空间的拓扑,这个拓扑以全体球形邻域构成的集族作为基. 是否一个集合的每一个子集族都可以确定一个拓扑以它为基? 答案是否定的. 以下定理告诉我们一个集合的什么样的子集族可以成为它的某一个拓扑的基.

定理 2.6.3　设 X 是一个集合,$\mathscr{B}$ 是集合 X 的一个子集族(即 $\mathscr{B}\subset\mathscr{P}(X)$). 如果 $\mathscr{B}$ 满足条件:

(1) $\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B=X$;

(2) 如果 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$,则对于任何 $x\in B_1\cap B_2$,存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in B\subset B_1\cap B_2$,

则 X 的子集族

$$\mathscr{T}=\{U\subset X \mid 存在\ \mathscr{B}_U\subset\mathscr{B}\ 使得\ U=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_U}B\}$$

是集合 X 的唯一的一个以 $\mathscr{B}$ 为基的拓扑;反之,如果 X 的一个子集族 $\mathscr{B}$ 是 X 的某一个拓扑的基,则 $\mathscr{B}$ 一定满足条件(1)和(2).

值得注意的是,如果集合 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 满足条件:对于任何 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$ 有 $B_1\cap B_2\in\mathscr{B}$. 这时,$\mathscr{B}$ 必然满足条件(2). 这种情形经常遇到.

证明 设 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 满足条件(1)和(2). 我们先验证定理中所给出的 $\mathscr{T}$ 是 X 的一个拓扑:

(i) 根据条件(1),$X\in\mathscr{T}$;由于 $\varnothing=\bigcup_{A\in\varnothing}A$,而 $\varnothing\subset\mathscr{B}$,所以 $\varnothing\in\mathscr{T}$.

(ii) 我们先验证:如果 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$,则 $B_1\cap B_2\in\mathscr{T}$. 这是因为根据条件(2),对于每一个 $x\in B_1\cap B_2$ 存在 $W_x\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in W_x\subset B_1\cap B_2$. 由于

$$B_1\cap B_2=\bigcup_{x\in B_1\cap B_2}\{x\}\subset\bigcup_{x\in B_1\cap B_2}W_x\subset B_1\cap B_2$$

可见 $B_1\cap B_2=\bigcup_{x\in B_1\cap B_2}W_x\in\mathscr{T}$.

现在设 $A_1,A_2\in\mathscr{T}$. 于是存在 $\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2\subset\mathscr{B}$ 使得 $A_1=\bigcup_{B_1\in\mathscr{B}_1}B_1$ 和 $A_2=\bigcup_{B_2\in\mathscr{B}_2}B_2$ 成立. 因此

$$\begin{aligned}A_1\cap A_2&=(\bigcup_{B_1\in\mathscr{B}_1}B_1)\cap(\bigcup_{B_2\in\mathscr{B}_2}B_2)\\&=\bigcup_{B_1\in\mathscr{B}_1,B_2\in\mathscr{B}_2}B_1\cap B_2\end{aligned}$$

根据前说,上式中最后那个并集中的每一项 $B_1\cap B_2$ 都是 $\mathscr{B}$ 中某些元素之并,所以 $A_1\cap A_2$ 也是 $\mathscr{B}$ 中某些元素之并,因此 $A_1\cap A_2\in\mathscr{T}$.

(iii) 设 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}$. 则对于每个 $A\in\mathscr{T}_1$ 存在 $\mathscr{B}_A$ 使得 $A=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_A}B$. 于是我们有

$$\begin{aligned}\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1} A &= \bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}\left(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_A} B\right)\\ &= \bigcup_{B\in\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}\mathscr{B}_A} B\in\mathscr{T}\end{aligned}$$

以上证明了$\mathscr{T}$是集合 X 的一个拓扑.根据$\mathscr{T}$的定义立即可见$\mathscr{B}$是拓扑$\mathscr{T}$的一个基.

假设集合 X 还有一个拓扑$\tilde{\mathscr{T}}$以$\mathscr{B}$为它的一个基.根据基的定义,任何一个 $A\in\tilde{\mathscr{T}}$必为$\mathscr{B}$中某些元素的并,所以 $A\in\mathscr{T}$.这证明$\tilde{\mathscr{T}}\subset\mathscr{T}$.另一方面,由于$\mathscr{B}\subset\tilde{\mathscr{T}}$,所以如果 $A\in\mathscr{T}$,则 A 是$\mathscr{B}$中的某些元素之并,因此也是$\tilde{\mathscr{T}}$中某些元素之并;由于$\tilde{\mathscr{T}}$是一个拓扑,所以 $A\in\tilde{\mathscr{T}}$.这又证明了$\mathscr{T}\subset\tilde{\mathscr{T}}$.因此$\mathscr{T}=\tilde{\mathscr{T}}$.这说明以$\mathscr{B}$为基的拓扑是唯一的.

最后证明定理的后半段.设$\mathscr{B}$是 X 的某一个拓扑$\mathscr{T}^*$的一个基.由 $X\in\mathscr{T}^*$ 可知 X 必为$\mathscr{B}$中的某些元素的并,故必为集族$\mathscr{B}$之并.因此(1)成立.设 $B_1,B_2\in\mathscr{B}$ 和 $x\in B_1\cap B_2$.由于$\mathscr{B}\subset\mathscr{T}^*$,$B_1\cap B_2$ 是 x 的一个开邻域,根据定理2.6.2,存在 $W_x\in\mathscr{B}$使得 $x\in W_x\subset B_1\cap B_2$.这证明条件(2)成立. ■

我们现在来应用这个定理,用先给出基的办法来给定拓扑.

例2.6.1　实数下限拓扑空间.

考虑实数集合$\mathbb{R}$.令

$$\mathscr{B}=\{[a,b)\mid a,b\in\mathbb{R},a<b\}$$

容易验证$\mathbb{R}$的子集族$\mathscr{B}$满足定理2.6.3中的条件(1)和(2),因此$\mathscr{B}$为实数集合的某一个拓扑$\mathscr{T}_l$的基.实数集合的这个拓扑$\mathscr{T}_l$称为实数的**下限拓扑**,拓扑空间$(\mathbb{R},\mathscr{T}_l)$称为**实数下限拓扑空间**,为方便起见,记作$\mathbb{R}_l$.明显地,它与通常实数空间有很大的区别.记实数空间的通常拓扑为$\mathscr{T}$.对于每一个开区间$(a,b)\subset\mathbb{R}$,其中 $a,b\in\mathbb{R}$,$a<b$,对于任何 $i\in\mathbb{Z}_+$.任意选取 $b_i\in\mathbb{R}$,使得 $a<\cdots<b_2<b_1<b$ 以及 $b_i-a<\frac{1}{i}$,我们便有$(a,b)=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+}[b_i,b)$.因此我

们有$(a,b)\in\mathscr{T}_l$，从而易见$\mathscr{T}\subset\mathscr{T}_l$. 反过来的包含关系明显是不对的，因此$\mathscr{T}\subsetneqq\mathscr{T}_l$.

在定义基的过程中我们只是用到了集族的并运算，如果再考虑集合的有限交运算(注意拓扑只是对有限交封闭的，所以只考虑有限交)，便得到"子基"这个概念.

定义 2.6.2 设$(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间，$\mathscr{S}$是$\mathscr{T}$的一个子族. 如果$\mathscr{S}$的所有非空有限子族之交构成的集族，即

$$\mathscr{B}=\{S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n\mid S_i\in\mathscr{S},i=1,2,\cdots,n;n\in\mathbb{Z}_+\}$$

是拓扑$\mathscr{T}$的一个基，则称集族$\mathscr{S}$是拓扑$\mathscr{T}$的一个**子基**，或称集族$\mathscr{S}$是拓扑空间X的一个**子基**.

例 2.6.2 实数空间$\mathbb{R}$的一个子基.

实数集合$\mathbb{R}$的一个子集族

$$\mathscr{S}=\{(a,\infty)\mid a\in\mathbb{R}\}\cup\{(-\infty,b)\mid b\in\mathbb{R}\}$$

是实数空间$\mathbb{R}$的一个子基. 这是因为$\mathscr{S}$是实数空间的一个开集族，并且$\mathscr{S}$的每一个有限非空子族之交的全体构成的集族恰好就是所有有限开区间构成的族并上$\mathscr{S}$再并上$\{\varnothing\}$，显然它是实数空间$\mathbb{R}$的一个基.

定理 2.6.4 设X是一个集合，$\mathscr{S}$是X的一个子集族(即$\mathscr{S}\subset\mathscr{P}(X)$). 如果$X=\bigcup_{S\in\mathscr{S}}S$，则$X$有唯一的一个拓扑$\mathscr{T}$以$\mathscr{S}$为子基. 并且若令

$$\mathscr{B}=\{S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n\mid S_i\in\mathscr{S},i=1,2,\cdots,n;n\in\mathbb{Z}_+\}$$

则

$$\mathscr{T}=\{\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}B\mid\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}\}$$

证明 令$\mathscr{B}$和$\mathscr{T}$如定理中. 容易验证$\mathscr{B}$满足定理 2.6.3中的条件(1)和(2)，因此根据该定理，$\mathscr{B}$是$\mathscr{T}$的一个基，所以$\mathscr{S}$是$\mathscr{T}$的一个子基.

如果$\tilde{\mathscr{T}}$是X的一个拓扑，它以$\mathscr{S}$为一个子基，则根据子基的定义，$\tilde{\mathscr{T}}$以$\mathscr{B}$为基. 根据定理 2.6.3中的唯一性，我们有$\tilde{\mathscr{T}}=\mathscr{T}$. ■

映射的连续性可以通过基或子基来验证. 一般说来,基或子基的基数不大于拓扑的基数,所以通过基或子基来验证映射的连续性,有时可能会带来很大的方便.

定理 2.6.5　设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f: X\to Y$. 则以下条件等价:

(1) f 连续;

(2) 拓扑空间 Y 有一个基 $\mathscr{B}$,使得对于任何一个 $B\in\mathscr{B}$,原象 $f^{-1}(B)$是 X 中的一个开集;

(3) Y 有一个子基 $\mathscr{S}$,使得对于任何一个 $S\in\mathscr{S}$,原象 $f^{-1}(S)$ 是 X 中的一个开集.

证明　(1) 蕴涵(3)是显然的,因为 Y 的拓扑本身便是 Y 的一个子基.

(3) 蕴涵(2). 设 $\mathscr{S}$是 Y 的拓扑的一个子基满足(3)中的要求. 根据定义,

$$\mathscr{B}=\{S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n\mid S_i\in\mathscr{S}, i=1,2,\cdots,n; n\in\mathbb{Z}_+\}$$

是 Y 的拓扑的一个基. 对于任何 $S_i\in\mathscr{S}, i=1,2,\cdots,n$,其中 $n\in\mathbb{Z}_+$,我们有

$$f^{-1}(S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n)=f^{-1}(S_1)\cap f^{-1}(S_2)\cap\cdots\cap f^{-1}(S_n)$$

它是 X 中 $n\in\mathbb{Z}_+$ 个开集之交,因此是 X 中的一个开集.

(2) 蕴涵(1). 设 $\mathscr{B}$ 是 Y 的拓扑的一个基,它满足(2)中的要求. 如果 U 是 Y 中的一个开集,则存在 $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}$ 使得 $U=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}B$,于是

$$f^{-1}(U)=f^{-1}\Big(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}B\Big)=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}f^{-1}(B)$$

是 X 中一族开集之并,所以是 X 中的一个开集. 这证明 f 连续.

■

对于局部情形,也有类似于基和子基的概念.

定义 2.6.3　设 X 是一个拓扑空间,$x\in X$. 记 $\mathscr{U}_x$ 为 x 的邻域系. $\mathscr{U}_x$ 的子族 $\mathscr{V}_x$ 如果满足条件:对于每一个 $U\in\mathscr{U}_x$,存在 $V\in$

$\mathscr{V}_x$ 使得 $V\subset U$，则称 $\mathscr{V}_x$ 是点 x 的**邻域系**的一个**基**，或简称为点 x 的一个**邻域基**. $\mathscr{U}_x$ 的子族 $\mathscr{W}_x$ 如果满足条件：$\mathscr{W}_x$ 每一个有限非空子族之交的全体构成的集族，即

$$\{W_1\cap W_2\cap\cdots\cap W_n \mid W_i\in\mathscr{W}_x, i=1,2,\cdots,n; n\in\mathbb{Z}_+\}$$

是 x 的一个邻域基，则称 $\mathscr{W}_x$ 是点 x 的**邻域系**的一个**子基**，或简称为点 x 的一个**邻域子基**.

显然，在度量空间中以某一个点为中心的全体球形邻域是这个点的一个邻域基；以某一个点为中心的全体以有理数为半径的球形邻域也是这个点的一个邻域基.

邻域基和邻域子基的概念可以用来验证映射在一点处的连续性.

定理 2.6.6 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$，$x\in X$. 则以下条件等价：

(1) f 在点 x 处连续；

(2) $f(x)$ 有一个邻域基 $\mathscr{V}_{f(x)}$，使得对于任何 $V\in\mathscr{V}_{f(x)}$，原象 $f^{-1}(V)$ 是 x 的一个邻域；

(3) $f(x)$ 有一个邻域子基 $\mathscr{W}_{f(x)}$，使得对于任何 $W\in\mathscr{W}_{f(x)}$，原象 $f^{-1}(W)$ 是 x 的一个邻域.

证明 (1)蕴涵(3)是显然的，因为点 $f(x)$ 的邻域系本身便是 $f(x)$ 的一个邻域子基.

(3) 蕴涵(2). 设 $\mathscr{W}_{f(x)}$ 是 $f(x)$ 的一个邻域子基，它满足(3)中的要求. 根据邻域子基的定义，集族

$$\{W_1\cap W_2\cap\cdots\cap W_n \mid W_i\in\mathscr{W}_{f(x)}, i=1,2,\cdots,n; n\in\mathbb{Z}_+\}$$

是 $f(x)$ 的一个邻域基. 对于任何 $W_i\in\mathscr{W}_{f(x)}$，$i=1,2,\cdots,n$，其中 $n\in\mathbb{Z}_+$，我们有

$$f^{-1}(W_1\cap W_2\cap\cdots\cap W_n)=f^{-1}(W_1)\cap f^{-1}(W_2)\cap\cdots\cap f^{-1}(W_n)$$

它是 x 的 n 个邻域之交，因此是 x 的一个邻域.

(2)蕴涵(1). 设 $\mathscr{V}_{f(x)}$ 是 $f(x)$ 的一个邻域基，它满足(2)中的

要求.如果 U 是 $f(x)$ 的一个邻域,则存在 $V\in\mathscr{V}_{f(x)}$ 使得 $V\subset U$.因此 $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(U)$.而 $f^{-1}(V)$ 是 x 的一个邻域,所以 $f^{-1}(U)$ 也是 x 的一个邻域.这证明 f 在点 x 处连续. ■

基与邻域基,子基与邻域子基有以下关联.

定理 2.6.7 设 X 是一个拓扑空间,$x\in X$.则

(1) 如果 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个基,则

$$\mathscr{B}_x=\{B\in\mathscr{B}\mid x\in B\}$$

是点 x 的一个邻域基;

(2) 如果 $\mathscr{S}$ 是 X 的一个子基,则

$$\mathscr{S}_x=\{S\in\mathscr{S}\mid x\in S\}$$

是点 x 的一个邻域子基.

证明 (1) 可根据定理 2.6.2 直接推得.

(2) 设 $\mathscr{S}$ 是 X 的一个子基.根据子基的定义,集族

$$\mathscr{B}=\{S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n\mid S_i\in\mathscr{S},i=1,2,\cdots,n;n\in\mathbb{Z}_+\}$$

是 X 的一个基,根据(1),$\mathscr{B}_x=\{B\in\mathscr{B}\mid x\in B\}$ 是 x 的一个邻域基.令

$$\widetilde{\mathscr{B}}_x=\{\widetilde{S}_1\cap\widetilde{S}_2\cap\cdots\cap\widetilde{S}_n\mid\widetilde{S}_i\in\mathscr{S}_x,i=1,2,\cdots,n;n\in\mathbb{Z}_+\}$$

其中 $\mathscr{S}_x=\{S\in\mathscr{S}\mid x\in S\}$.现证明:$\widetilde{\mathscr{B}_x}=\mathscr{B}_x$.这是因为,若 $U\in\mathscr{B}_x$,则 $x\in U$,并且存在 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 使得 $U=S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n$.从而 $x\in S_1,x\in S_2,\cdots,x\in S_n$.于是 $S_1,S_2,\cdots,S_n\in\mathscr{S}_x$.因此 $U=S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n\in\widetilde{\mathscr{B}}_x$.这证明 $\mathscr{B}_x\subset\widetilde{\mathscr{B}}_x$.同样易证 $\mathscr{B}_x\supset\widetilde{\mathscr{B}}_x$.

于是 $\widetilde{\mathscr{B}}_x$ 是点 x 的一个邻域基.按邻域子基的定义可见 $\mathscr{S}_x$ 是 x 的一个邻域子基. ■

习　题

1. 设 X 是一个集合.则 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 和 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 是 X 的同一个拓扑的两个

基的充分必要条件是 $\mathscr{B}$ 和 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 满足条件:

(1) 如果 $x\in B\in\mathscr{B}$,则存在 $\widetilde{B}\in\widetilde{\mathscr{B}}$ 使得 $x\in\widetilde{B}\subset B$;

(2) 如果 $x\in\widetilde{B}\in\widetilde{\mathscr{B}}$,则存在 $B\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in B\subset\widetilde{B}$.

2. 欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 的一个子集 D 叫做一个开矩形,如果存在 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 满足条件 $a<b$ 和 $c<d$,使得 $D=(a,b)\times(c,d)$,其中 (a,b) 和 (c,d) 都表示开区间. 证明:$\mathbb{R}^2$ 中所有的开矩形构成的集族是 $\mathbb{R}^2$ 的一个基.

3. 证明:实数集合 $\mathbb{R}$ 有一个拓扑以集族

$$\{[a,\infty)\mid a\in\mathbb{R}\}\cup\{(-\infty,b]\mid b\in\mathbb{R}\}$$

为它的一个基,并说明这个拓扑的特点.

4. 证明:实数集合 $\mathbb{R}$ 有一个拓扑 $\mathscr{T}$ 以集族 $\{(a,\infty)\mid a\in\mathbb{R}\}$ 为它的一个基,并且

(1) 将 $\mathscr{T}$ 明确地表示出来;

(2) 设 $A\subset\mathbb{R}$,求 A 在拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中的闭包.

实数集合 $\mathbb{R}$ 的这个拓扑 $\mathscr{T}$ 通常称为**右手拓扑**.

5. 考虑实数下限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$. 令 $\mathscr{B}$ 为例 2.6.1 中定义这个拓扑空间的拓扑的那个基. 证明:

(1) $\mathscr{B}$ 中的每一个元素在 $\mathbb{R}_l$ 中既是开集又是闭集;

(2) $\mathbb{R}_l$ 有一个子基

$$\{(-\infty,b)\mid b\in\mathbb{R}\}\cup\{[a,\infty)\mid a\in\mathbb{R}\}$$

6. 设 X 是一个集合,$\{\mathscr{T}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是集合 X 的一族拓扑,其中指标集 $\Gamma\neq\varnothing$. 证明:

(1) 集族 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\mathscr{T}_\gamma$ 是 X 的某一个拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个子基;

(2) 如果 $\widetilde{\mathscr{T}}$ 是 X 的一个拓扑,并且对于每一个 $\gamma\in\Gamma$ 有 $\mathscr{T}_\gamma\subset\widetilde{\mathscr{T}}$,则 $\mathscr{T}\subset\widetilde{\mathscr{T}}$.

7. 设 X 是一个度量空间. 证明:如果 X 有一个基只含有有限个元素,则 X 必为只含有有限多个点的离散空间.

§2.7 拓扑空间中的序列

在读者熟知的数学分析课程中,往往用序列收敛的概念作为

出发点来刻画集合的凝聚点，函数在某一点处的连续性等等. 在这一节我们便会看到这种做法在一般的拓扑空间中并不可行；而要使得它变为可行的，则要对拓扑空间加以适当的限制. 我们将来再研究这种限制加到什么程度为合适.

定义 2.7.1 设 X 是一个拓扑空间. 每一个映射 $S:\mathbb{Z}_+\to X$ 叫做 X 中的一个**序列**. 我们常将序列 S 记作 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$，或者 $\{x_i\}_{i=1,2,\cdots}$，或者干脆记作 $\{x_1,x_2,\cdots\}$，其中 $x_i=S(i)$，$i\in\mathbb{Z}_+$. 有时我们也将记号 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 简化为 $\{x_i\}$，但这时要警惕不要与单点集相混.

拓扑空间 X 中的一个序列实际上就是在 X 中按先后次序取到的一串点，这些点可能重复. 因此一个序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 可以仅由有限个点组成，即集合 $\{x_i \mid i\in\mathbb{Z}_+\}$ 为一个有限集；当这个集合是单点集时，我们称序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 为一个**常值序列**.

定义 2.7.2 设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是拓扑空间 X 中的一个序列，$x\in X$. 如果对于 x 的每一个邻域 U，存在 $M\in\mathbb{Z}_+$ 使得当 $i>M$ 时有 $x_i\in U$，则称点 x 是序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 的一个**极限点**（或**极限**），也称为序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ **收敛于** x，记作

$$\lim_{i\to\infty}x_i=x \quad 或 \quad x_i\to x\,(i\to\infty)$$

如果序列至少有一个极限，则称这个序列是一个**收敛序列**.

拓扑空间中序列的收敛性质与以前我们在数学分析中熟悉的有很大的差别. 例如，容易验证平庸空间中任何一个序列都收敛，并且收敛于这个空间中的任何一个点. 这时极限的唯一性当然无法保证了.

定义 2.7.3 设 X 是一个拓扑空间，$S,S_1:\mathbb{Z}_+\to X$ 是 X 中的两个序列. 如果存在一个严格递增的映射 $N:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+$（即对于任意 $n_1,n_2\in\mathbb{Z}_+$，如果 $n_1<n_2$，则有 $N(n_1)<N(n_2)$），使得 $S_1=S\circ N$，则称序列 S_1 是序列 S 的一个**子序列**.

假如我们将此定义中的序列 S 记作$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$,那么序列 S_1 自然可以记作$\{x_{N(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$.也就是说,序列$\{x_{N(i)}\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$的第 i 个点恰是序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$的第 $N(i)$个点.

我们已经看到,我们以前熟悉的序列的性质有许多对于拓扑空间中的序列是不适合的.但总有一些性质还保留着,其中最主要的可见于以下三个定理中.

定理 2.7.1 设$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是拓扑空间 X 中的一个序列.则

(1) 如果$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是一个常值序列,即对于某一个 $x\in X$,有 $x_i=x,i\in\mathbb{Z}_+$,则 $\lim_{i\to\infty}x_i=x$;

(2) 如果序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于 $x\in X$,则序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$的每一个子序列也收敛于 x.

证明简单,兹从略. ■

定理 2.7.2 设 X 是一个拓扑空间,$A\subset X$,$x\in X$.如果有一个序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$在 $A-\{x\}$中(此意即,对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$ 有 $x_i\in A-\{x\}$),并且收敛于 x,则 x 是集合 A 的一个凝聚点.

证明 设序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$在 $A-\{x\}$中并且收敛于 x.如果 U 是 x 的一个邻域,则存在 $M\in\mathbb{Z}_+$使得$\{x_{M+1},x_{M+2},\cdots\}\subset U$,因此$\{x_{M+1},x_{M+2},\cdots\}\subset U\cap(A-\{x\})$,从而 $U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$.这证明 x 是 A 的一个凝聚点. ■

例 2.7.1 定理 2.7.2 的逆命题不成立.

设 X 是一个不可数集,考虑它的拓扑为可数补拓扑.这时 X 的一个子集是闭集当且仅当或者它是 X 本身或者它是一个可数集.我们先指出可数补空间 X 的两个特征:

(1) X 中的一个序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于 $x\in X$ 的充分必要条件是存在 $M\in\mathbb{Z}_+$ 使得当 $i>M$ 时 $x_i=x$.

条件的充分性是显然的.以下证明必要性.设$\lim\limits_{i\to\infty}x_i=x$.由于集合 $D=\{x_i\mid x_i\neq x,i\in\mathbb{Z}_+\}$是一个可数集,因此 D 的补集D'是 x 的一个邻域,从而存在 $M\in\mathbb{Z}_+$ 使得当 $i>M$ 时有 $x_i\in D'$,此时

必有 $x_i = x$.

(2) 如果 A 是 X 的一个不可数子集,则集合 A 的导集 $d(A) = X$.

这是因为 X 中任何一个点的任何一个邻域中都包含着某一个非空开集,而拓扑空间 X 中的每一个非空开集都是一个可数集的补集,所以任何一个点的任何一个邻域都是某一个可数集的补集.由于 A 是一个不可数集,它将与任何一个点的任何一个邻域有非空的交,因此 X 中任何一个点都是集合 A 的凝聚点,即 $d(A) = X$.

现在我们来指出,在这个拓扑空间 X 中,定理 2.7.2 的逆命题不成立.设 $x_0 \in X$.令 $A = X - \{x_0\}$,它是一个不可数集.根据(2),我们有 $x_0 \in d(A)$,也就是说,x_0 是 A 的一个凝聚点;然而根据(1),在 $A(= X - \{x_0\})$中不可能有序列收敛于 x_0.

这个例子表明,在一般的拓扑空间中不能像在数学分析中那样通过序列收敛的性质来刻画凝聚点.

定理 2.7.3 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f: X \to Y$.则

(1) 如果 f 在点 $x_0 \in X$ 处连续,则 X 中的一个序列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ 收敛于 x_0 蕴涵着 Y 中的序列 $\{f(x_i)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ 收敛于 $f(x_0)$;

(2) 如果 f 连续,则 X 中的一个序列 $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ 收敛于 $x \in X$ 蕴涵着 Y 中的序列 $\{f(x_i)\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ 收敛于 $f(x)$.

证明 (1) 设 f 在点 x_0 处连续,$\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ 是 X 中的一个收敛于 x_0 的序列.如果 U 是 $f(x_0)$ 的一个邻域,则 $f^{-1}(U)$ 是 x_0 的一个邻域.这时存在 $M \in \mathbb{Z}_+$,使得当 $i > M$ 时有 $x_i \in f^{-1}(U)$,从而 $f(x_i) \in U$.

(2) 成立是因为连续即在每一点处连续(参见定理 2.3.5). ∎

例 2.7.2 定理 2.7.3 的逆命题不成立.

现在设 X 是实数集合,并且考虑它的拓扑为可数补拓扑.考

虑从拓扑空间 X 到实数空间$\mathbb{R}$的恒同映射 $i:X\to\mathbb{R}$. 由于如果拓扑空间 X 中的序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于 $x\in X$,则有:存在 $M\in\mathbb{Z}_+$ 使得当 $i>M$ 时有 $x_i=x$,因此此时序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$在实数空间$\mathbb{R}$中也收敛于 x.这就是说映射 i 满足定理 2.7.3(1)或(2)中的后一个条件.但是这个映射 i 在X 的任何一个点$x\in X$ 处都不连续.因为显然,任何一个包含 x 的开区间(它是 x 在实数空间中的一个邻域) U,只要不是$\mathbb{R}$本身,那么 $i^{-1}(U)=U$ 在拓扑空间X 中不能包含任何一个开集,也就不能作为任何一个点的邻域.

上述例子表明,在一般的拓扑空间中不能像在数学分析中那样通过序列收敛的性质来刻画映射的连续性.

至于在什么样的条件下,定理 2.7.2 和定理 2.7.3 的逆命题成立,也就是说可以用序列收敛的性质来刻画凝聚点和映射的连续性,我们将后还要进行进一步的研究.

此外,在度量空间中,序列的收敛可以通过度量来加以描述.

定理 2.7.4 设(X,ρ)是一个度量空间,$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是 X 中的一个序列,$x\in X$.则以下条件等价:

(1) 序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于 x;

(2) 对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$,存在 $N\in\mathbb{Z}_+$ 使得当 $i>N$ 时 $\rho(x_i,x)<\varepsilon$;

(3) $\lim_{i\to\infty}\rho(x_i,x)=0$.

证明 (1) 蕴涵(2).给定实数 $\varepsilon>0$.球形邻域 $B(x,\varepsilon)$是 x 的一个邻域,故在(1)成立的条件下,我们有:存在 $N\in\mathbb{Z}_+$ 使得当 $i>N$ 时 $x_i\in B(x,\varepsilon)$,即 $\rho(x_i,x)<\varepsilon$.

(2) 蕴涵(1).对于 x 的任何一个邻域U,存在实数 $\varepsilon>0$ 使得 $B(x,\varepsilon)\subset U$.因此如果(2)成立,则存在 $N>0$ 使得当 $i>N$ 时 $\rho(x_i,x)<\varepsilon$,即 $x_i\in B(x,\varepsilon)$,因此 $x_i\in U$.

条件(2)和(3)的等价性的证明请读者自己补证. ■

习 题

1. 设 X 是一个离散空间，$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 中的一个序列. 证明：序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 收敛当且仅当存在 $M\in\mathbb{Z}_+$ 使得当 $i,j>M$ 时有 $x_i=x_j$.

2*. 举出定理2.7.2和定理2.7.3的逆命题不成立的例子，使得所涉及的空间都只含有可数多个点.

3. 设 X 是一个度量空间. 证明：

(1) X 中的任何一个收敛序列都只有唯一的极限；

(2) 定理2.7.2的逆命题成立；

(3) 对于任何一个映射 $f:X\to Y$，定理2.7.3的逆命题成立，其中 Y 是任何一个拓扑空间.

第 3 章　子空间，（有限）积空间，商空间

在这一章中我们介绍通过已知的拓扑空间构造新的拓扑空间的三种惯用的办法. 为了避免过早涉及某些逻辑上的难点，在§3.2中我们只讨论有限个拓扑空间的积空间，而将一般情形的研究留待以后去作.

§3.1　子空间

讨论拓扑空间的子空间目的在于对于拓扑空间中的一个给定的子集，按某种"自然的方式"赋予它一个拓扑使之成为一个拓扑空间，以便将它作为一个独立的对象进行考察. 所谓"自然的方式"应当是什么样的方式？为回答这个问题，我们还是先从度量空间做起，以便得到必要的启发.

考虑一个度量空间和它的一个子集. 欲将这个子集看作一个度量空间，必须要为它的每一对点规定距离. 由于这个子集中的每一对点也是度量空间中的一对点，因而把它们作为子集中的点的距离就规定为它们作为度量空间中的点的距离当然是十分自然的. 我们把上述想法归纳成定义：

定义 3.1.1　设(X,ρ)是一个度量空间，Y 是 X 的一个子集. 因此，$Y\times Y\subset X\times X$. 显然 $\rho|_{Y\times Y}:Y\times Y\to\mathbb{R}$ 是 Y 的一个度量（请自行验证）. 我们称 Y 的度量$\rho|_{Y\times Y}$是由X 的度量ρ **诱导出来的度量**. 度量空间(Y,ρ)称为度量空间(X,ρ)的一个**度量子空间**.

我们常说度量空间 Y 是度量空间X 的一个度量子空间，意思

就是指 Y 是 X 的一个子集,并且 Y 的度量是由 X 的度量诱导出来的.我们还常将一个度量空间的任何一个子集自动地认作一个度量子空间而不另行说明.例如我们经常讨论的:实数空间$\mathbb{R}$ 中的各种区间(a,b),$[a,b]$,$(a,b]$等;$n+1$ 维欧氏空间$\mathbb{R}^{n+1}$ 中的 n **维单位球面**

$$S^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \sum_{i=1}^{n-1}x_i^2=1\}$$

n **维单位开、闭球体**

$$D^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid \sum_{i=1}^{n}x_i^2<1\}$$

$$E^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid \sum_{i=1}^{n}x_i^2\leqslant 1\}$$

以及 n **维单位开、闭方体**$(0,1)^n$ 和$[0,1]^n$ 等等,并且它们也自然被认作是拓扑空间(考虑相应的度量诱导出来的拓扑).

定理 3.1.1 设 Y 是度量空间 X 的一个度量子空间.则 Y 的子集U是 Y 中的一个开集当且仅当存在一个X 中的开集V使得$U=V\cap Y$.

证明 由于现在涉及两个度量空间,我们时时要小心可能产生的概念混淆.对于 $x\in X(y\in Y)$,临时记度量空间 $X(Y)$中以 $x(y)$为中心以 $\varepsilon>0$ 为半径的球形邻域为 $B_X(x,\varepsilon)(B_Y(y,\varepsilon))$.

首先指出:对于任何 $y\in Y,\varepsilon>0$,有

$$B_Y(y,\varepsilon)=B_X(y,\varepsilon)\cap Y$$

这是因为一个点 $z\in X$ 属于$B_Y(y,\varepsilon)$当且仅当 z 是 Y 中的一个点并且它与y 在 Y 中的距离(即它与 y 在 X 中的距离)小于 ε.

现在设 U 是 Y 中的一个开集,由于 Y 的所有球形邻域构成的族是 Y 的拓扑的一个基,U 可以表示为 Y 中的一族球形邻域,设为 $\mathscr{A}$,的并.于是

$$U=\bigcup_{B_Y(y,\varepsilon)\in\mathscr{A}}B_Y(y,\varepsilon)$$

$$= \bigcup_{B_Y(y,\varepsilon)\in\mathscr{A}} (B_X(y,\varepsilon)\cap Y)$$

$$= \Big(\bigcup_{B_Y(y,\varepsilon)\in\mathscr{A}} B_X(y,\varepsilon)\Big)\cap Y$$

设 $V=\bigcup_{B_Y(y,\varepsilon)\in\mathscr{A}}B_X(y,\varepsilon)$，它是 X 中的一个开集，并且我们有 $U=V\cap Y$.

另一方面，设 $U=V\cap Y$，其中 V 是 X 中的一个开集. 如果 $y\in U$，则有 $y\in Y$ 和 $y\in V$. 于是在 X 中存在 y 的一个球形邻域 $B_X(y,\varepsilon)\subset V$. 此时易见，$B_Y(y,\varepsilon)=B_X(y,\varepsilon)\cap Y\subset U$. 这证明 U 是 Y 中的一个开集. ■

按照定理 3.1.1 的启示，我们来逐步完成本节开始时所提出的任务.

定义 3.1.2 设 $\mathscr{A}$ 是一个集族，Y 是一个集合. 集族

$$\{A\cap Y \mid A\in\mathscr{A}\}$$

称为集族 $\mathscr{A}$ 在集合 Y 上的**限制**，记作 $\mathscr{A}|_Y$.

引理 3.1.2 设 Y 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的一个子集. 则集族 $\mathscr{T}|_Y$ 是 Y 的一个拓扑.

证明 我们验证 $\mathscr{T}|_Y$ 满足拓扑定义中的三个条件：

(i) 由于 $X\in\mathscr{T}$ 和 $Y=X\cap Y$，所以 $Y\in\mathscr{T}|_Y$；由于 $\varnothing\in\mathscr{T}$ 和 $\varnothing=\varnothing\cap Y$，所以 $\varnothing\in\mathscr{T}|_Y$.

(ii) 如果 $A,B\in\mathscr{T}|_Y$，即存在 $\tilde{A},\tilde{B}\in\mathscr{T}$ 使得 $A=\tilde{A}\cap Y$，$B=\tilde{B}\cap Y$. 于是

$$A\cap B=(\tilde{A}\cap Y)\cap(\tilde{B}\cap Y)=(\tilde{A}\cap\tilde{B})\cap Y$$

由于 $\tilde{A}\cap\tilde{B}\in\mathscr{T}$，所以 $A\cap B\in\mathscr{T}|_Y$.

(iii) 如果 $\mathscr{T}_1$ 是集族 $\mathscr{T}|_Y$ 的一个子集族，即对于每一个 $A\in\mathscr{T}_1$，存在 $\tilde{A}\in\mathscr{T}$ 使得 $A=\tilde{A}\cap Y$. 于是

$$\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1} A=\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}(\tilde{A}\cap Y)=\Big(\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}\tilde{A}\Big)\cap Y$$

由于 $\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}\tilde{A}\in\mathscr{T}$，所以 $\bigcup_{A\in\mathscr{T}_1}A\in\mathscr{T}|_Y$. ■

定义 3.1.3 设 Y 是拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的一个子集. Y 的拓扑 $\mathscr{T}|_Y$ 称为(**相对于 X 的拓扑 $\mathscr{T}$ 而言的**)**相对拓扑**;拓扑空间 $(Y,\mathscr{T}|_Y)$ 称为拓扑空间的一个(**拓扑**)**子空间**.

我们常说拓扑空间 Y 是拓扑空间 X 的一个子空间,意思就是指 Y 是 X 的一个子集,并且 Y 的拓扑就是对于 X 的拓扑而言的相对拓扑. 此外,我们也常将拓扑空间的子集认为是一个子空间而不另行说明.

假设 Y 是度量空间 X 的一个子空间. 现在有两个途径得到 Y 的拓扑:一是通过 X 的度量诱导出 Y 的度量,然后考虑 Y 的这个度量诱导出来的拓扑;另一是先将 X 考虑成一个拓扑空间,然后考虑 Y 的拓扑为 X 的拓扑在 Y 上引出来的相对拓扑. 事实上,定理 3.1.1 已经指出经由这两种途径得到的 Y 的两个拓扑是一样的. 下面把这层意思重新叙述一遍.

定理 3.1.3 设 Y 是度量空间 X 的一个度量子空间. 则 X 与 Y 都考虑作为拓扑空间时 Y 是 X 的一个(拓扑)子空间. ■

定理 3.1.4 设 X,Y,Z 都是拓扑空间. 如果 Y 是 X 的一个子空间, Z 是 Y 的一个子空间,则 Z 是 X 的一个子空间.

证明 当 Y 是 X 的一个子空间, Z 是 Y 的一个子空间时,我们有 $Z\subset Y\subset X$;并且若设 $\mathscr{T}$ 为 X 的拓扑时, Z 的拓扑是

$$\begin{aligned}(\mathscr{T}|_Y)|_Z &= \{U\cap Y \mid U\in\mathscr{T}\}|_Z\\ &= \{U\cap Y\cap Z \mid U\in\mathscr{T}\}\\ &= \{U\cap Z \mid U\in\mathscr{T}\} = \mathscr{T}|_Z\end{aligned}$$

因此 Z 是 X 的一个子空间. ■

定理 3.1.5 设 Y 是拓扑空间 X 的一个子空间, $y\in Y$. 则

(1) 分别记 $\mathscr{T}$ 和 $\tilde{\mathscr{T}}$ 为 X 和 Y 的拓扑,则 $\tilde{\mathscr{T}}=\mathscr{T}|_Y$;

(2) 分别记 $\mathscr{F}$ 和 $\tilde{\mathscr{F}}$ 为 X 和 Y 的全体闭集构成的族,则
$\tilde{\mathscr{F}}=\mathscr{F}|_Y$;

(3) 分别记 $\mathscr{U}_y$ 和 $\tilde{\mathscr{U}}_y$ 为点 y 在 X 和 Y 中的邻域系,则

$\widetilde{\mathscr{U}}_y = \mathscr{U}_y|_Y$.

证明 (1) 即是子空间和相对拓扑的定义.

(2) 成立是因为:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}|_Y &= \{X-U \mid U\in\mathscr{T}\}|_Y \\ &= \{(X-U)\cap Y \mid U\in\mathscr{T}\} \\ &= \{Y-U\cap Y \mid U\in\mathscr{T}\} \\ &= \{Y-\widetilde{U} \mid \widetilde{U}\in\widetilde{\mathscr{T}}\} = \widetilde{\mathscr{F}}\end{aligned}$$

(3) 设 $U\in\widetilde{\mathscr{U}}_y$. 则存在 $V\in\widetilde{\mathscr{T}}$ 使得 $y\in V\subset U$. 因此存在 $V_1\in\mathscr{T}$ 使得 $V=V_1\cap Y$. 令 $U_1=V_1\cup U$. 由于 $y\in V_1\subset U_1$, 故 $U_1\in\mathscr{U}_y$, 并且

$$U_1\cap Y=(V_1\cup U)\cap Y=V\cup U=U$$

所以 $U\in\mathscr{U}_y|_Y$. 以上证明 $\widetilde{\mathscr{U}}_y\subset\mathscr{U}_y|_Y$. 类似的论证指出 $\widetilde{\mathscr{U}}_y\supset\mathscr{U}_y|_Y$.

■

定理 3.1.6 设 Y 是拓扑空间 X 的一个子空间, A 是 Y 的一个子集. 则

(1) A 在 Y 中的导集是 A 在 X 中的导集与 Y 的交;

(2) A 在 Y 中的闭包是 A 在 X 中的闭包与 Y 的交.

证明 为证明这个定理, 我们仍分别记 A 在 X 中的导集和闭包为 $d(A)$ 和 $\overline{A}$; 而记 A 在 Y 中的导集和闭包分别为 $d_Y(A)$ 和 $c_Y(A)$.

(1) 一方面, 设 $y\in d_Y(A)$. 则对于 y 在 X 中的任何一个邻域 U, 根据定理 3.1.5, $U\cap Y$ 是 y 在 Y 中的一个邻域, 所以

$$U\cap(A-\{y\})\supset(U\cap Y)\cap(A-\{y\})\neq\varnothing$$

因此 $y\in d(A)$. 此外当然有 $y\in Y$. 所以 $y\in d(A)\cap Y$. 这证明 $d_Y(A)\subset d(A)\cap Y$.

另一方面, 设 $y\in d(A)\cap Y$. 令 V 为 y 在 Y 中的任何一个邻域. 则存在 y 在 X 中的一个邻域 U 使得 $V=U\cap Y$. 由于 $U\cap(A-\{y\})\neq\varnothing$, 以及 $A\subset Y$, 我们有 $V\cap(A-\{y\})\subset Y$. 于是

$$V\cap(A-\{y\})=(U\cap(A-\{y\}))\cap Y$$
$$=U\cap(A-\{y\})\neq\varnothing$$

所以 $y\in d_Y(A)$. 这证明 $d_Y(A)\supset d(A)\cap Y$.

(2) 成立是因为

$$\begin{aligned}c_Y(A)&=A\cup d_Y(A)\\&=A\cup(d(A)\cap Y)\\&=(A\cup d(A))\cap(A\cup Y)\\&=\bar{A}\cap Y \quad \blacksquare\end{aligned}$$

定理 3.1.7 设 Y 是拓扑空间 X 的一个子空间, $y\in Y$. 则

(1) 如果 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 X 的一个基,则 $\mathscr{B}|_Y$ 是子空间 Y 的一个基;

(2) 如果 $\mathscr{V}_y$ 是点 y 在拓扑空间 X 中的一个邻域基,则 $\mathscr{V}_y|_Y$ 是点 y 在子空间 Y 中的一个邻域基.

证明 (1) 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个基. 对于 Y 中的任何一个开集 U,存在 X 中的一个开集 V 使得 $U=V\cap Y$;存在 $\mathscr{B}$ 的一个子族 $\mathscr{B}_1$ 使得 $V=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}B$. 因此 $U=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}(B\cap Y)$. 由于上式中的每一个 $B\cap Y$ 是 $\mathscr{B}|_Y$ 中的一个元素,所以在上式中 U 已经表示成了 $\mathscr{B}|_Y$ 中的某些元素之并了. 因此 $\mathscr{B}|_Y$ 是 Y 的一个基.

(2) 设 $\mathscr{V}_y$ 是点 y 在 X 中的一个邻域基. 如果 U 是 y 在 Y 中的一个邻域,则存在 y 在 X 中的一个邻域 V 使得 $U=V\cap Y$;于是存在 $V_1\in\mathscr{V}_y$ 使得 $V_1\subset V$. 从而 $V_1\cap Y$ 是 y 在 Y 中的一个邻域,并且 $V_1\cap Y\subset V\cap Y=U$,其中 $V_1\cap Y\in\mathscr{V}_y|_Y$. 这证明 $\mathscr{V}_y|_Y$ 是 y 在 Y 中的一个邻域基. $\blacksquare$

"子空间"事实上是从大拓扑空间中"切割"出来的一部分. 这里有一个反问题,概言之就是:一个拓扑空间什么时候是另一个拓扑空间的子空间? 换言之,一个拓扑空间在什么条件下能够"镶嵌"到另一个拓扑空间中去? 当然假如我们拘泥于某些细节,例如涉及的拓扑空间是由什么样的点构成的,那么问题会变得十分乏

味；然而我们在§2.2中便提到过，拓扑学的中心任务是研究拓扑不变性质，也就是说我们不去着意区别同胚的两个拓扑空间.在这种意义下，以上问题可以精确地陈述如下：

定义 3.1.4 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$.映射 f 称为一个**嵌入**，如果它是一个单射，并且是从 X 到它的象集 $f(X)$ 的一个同胚.如果存在一个嵌入 $f:X\to Y$，我们说拓扑空间 X **可嵌入**拓扑空间 Y.

在这个定义中谈到映射 $f:X\to Y$ 是从 X 到它的象集 $f(X)$ 的一个同胚，这句话完全精确的意思是：映射 $\tilde{f}:X\to f(X)$，定义为对于任何 $x\in X$ 有 $\tilde{f}(x)=f(x)\in f(X)$，是一个同胚.为了省事，我们也把映射 $\tilde{f}$ 也记作 f，必须区别时在上下文中说明.

事实上，拓扑空间 X 可嵌入拓扑空间 Y 意思就是拓扑空间 X 与拓扑空间 Y 的某一个子空间同胚.换言之，在不区别同胚的两个拓扑空间的意义下，X"就是"Y 的一个子空间.

不能嵌入的一个简单例子是，一个离散空间，如果它含有多于一个点，就决不可能嵌入到任何一个平庸空间中去；反之，一个平庸空间，如果它含有多于一个点，也决不可能嵌入到任何一个离散空间中去.欧氏平面中的单位圆周是否可以嵌入到实数空间(即直线)中去呢？这个问题我们到第四章中再作处理.本书中我们还会涉及一些比较深刻的嵌入定理.

习 题

1. 证明：

(1) 实数空间 $\mathbb{R}$ 同胚于任何一个开区间；

(2) n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 同胚于其中的任何一个开方体，也同胚于其中的任何一个球形邻域.

2. 如果 Y 是拓扑空间 X 的一个开(闭)子集，则 Y 作为 X 的子空间时特别称为 X 的开(闭)子空间.证明：

(1) 如果 Y 是拓扑空间 X 的一个开子空间,则 $A\subset Y$ 是 Y 中的一个开集当且仅当 A 是 X 的一个开集;

(2) 如果 Y 是拓扑空间 X 的一个闭子空间,则 $A\subset Y$ 是 Y 中的一个闭集当且仅当 A 是 X 的一个闭集.

3. 设 Y 是拓扑空间 X 的一个子空间,$A\subset Y$.证明:

(1) $int_X(A)=int_Y(A)\cap int_X(Y)$

(2) $\partial_Y(A)\subset\partial_X(A)\cap Y$,并举例说明等式可以不成立.

其中 int_X 和 int_Y 分别表示在拓扑空间 X 和 Y 中求集合的内部;∂_X 和 ∂_Y 分别表示在拓扑空间 X 和 Y 中求集合的边界.

4. 设 Y 是拓扑空间 X 的一个子空间,$y\in Y$.证明:

(1) 如果 $\mathscr{S}$ 是 X 的一个子基,则 $\mathscr{S}|_Y$ 是 Y 的一个子基;

(2) 如果 $\mathscr{W}_y$ 是点 y 在 X 中的一个邻域子基,则 $\mathscr{W}_y|_Y$ 是点 y 在 Y 中的一个邻域子基.

5. 设 $(X,\mathscr{T})$ 和 $(Y,\mathscr{T}_1)$ 是两个拓扑空间,并且 $Y\subset X$.证明:

(1) 如果 $(Y,\mathscr{T}_1)$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 的一个子空间,则内射 $i:Y\to X$ 是一个连续映射;

(2) 如果内射 $i:Y\to X$ 是一个连续映射,则 $\mathscr{T}_1\supset\mathscr{T}|_Y$.

因此我们说:相对拓扑是使内射连续的最小的拓扑.

6. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间.证明:映射 $f:X\to Y$ 是一个连续映射当且仅当 $f:X\to f(X)$ 是一个连续映射.(这两个映射为何使用同一个符号,请参见正文中的有关说明.)

7. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,A 是 X 的一个子集.证明:如果映射 $f:X\to Y$ 连续,则映射 $f|_A:A\to Y$ 也连续.

8. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,A 是 X 的一个子集.证明:

(1) 如果映射 $f:X\to Y$ 是一个同胚,则映射 $f|_A:A\to f(A)$ 也是一个同胚;

(2) 如果 X 可嵌入 Y,则 X 的任何一个子空间也可嵌入 Y.

9. 在集合 $\mathbb{R}^2$ 中给定一个子集族

$$\mathscr{S}=\{[a,b)\times[c,d)\mid a,b,c,d\in\mathbb{R},a<b,c<d\}$$

验证 $\mathbb{R}^2$ 有唯一的一个拓扑 $\mathscr{T}$ 以 $\mathscr{S}$ 为它的一个子基.令

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x+y=1\}$$

间 A 作为拓扑空间$(\mathbb{R}^2,\mathscr{T})$的一个子空间时有什么特点？(提示：证明拓扑空间$(A,\mathscr{T}_A)$是一个离散空间.)

10. 证明：如果 X 是一个只含可数个点的拓扑空间，则存在一个满的连续映射 $f:\mathbb{Q}\to X$. 其中$\mathbb{Q}$是由所有有理数构成的实数空间$\mathbb{R}$的子空间.

11. 回答以下问题并给出必要的证明：

(1) 有限补空间何时可嵌入可数补空间？

(2) 可数补空间何时可嵌入有限补空间？

§3.2 (有限)积空间

给定了两个拓扑空间，我们首先可以得到一个集合作为它们的笛卡儿积. 如何按某种自然的方式给定这个笛卡儿积一个拓扑使之成为拓扑空间？

为此我们先对度量空间中的同类问题进行研究. 首先回顾 n 维欧氏空间中$\mathbb{R}^n$中的度量是如何通过实数空间中的度量来定义的：如果 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$，则 x 与 y 的距离定义为

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i-y_i\right|^2}$$

其中$|x_i-y_i|$是$\mathbb{R}$中的两个点 x_i 和y_i 的通常距离. 这种定义方式推广到有限个度量空间的笛卡儿积中去不会产生任何困难.

定义 3.2.1 设(X_1,ρ_1)，(X_2,ρ_2)，$\cdots$，(X_n,ρ_n)是 $n\geqslant 1$ 个度量空间. 令 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$. 定义 $\rho:X\times X\to\mathbb{R}$使得对于任何 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X$，

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\rho_i(x_i,y_i)^2}$$

容易验证 ρ 是X 的一个度量.(请自行验证，注意验证中要用到§2.1附录中的 Schwarz 引理.)我们称 ρ 为笛卡儿积$X=X_1\times$

$X_2\times\cdots\times X_n$ 的**积度量**;称度量空间(X,ρ)为 n 个度量空间$(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2),\cdots,(X_n,\rho_n)$的**度量积空间**.

根据上述定义明显可见,n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 就是 n 个实数空间$\mathbb{R}$的度量积空间.

先来考察积度量所诱导出来的拓扑有什么样的性质,以便使我们得到在拓扑空间中应该如何引出积空间的概念的启示.

定理 3.2.1 设$(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2),\cdots,(X_n,\rho_n)$是 $n\geqslant 1$ 个度量空间,(X,ρ)是它们的积空间.又设 $\mathscr{T}_i$ 和 $\mathscr{T}$分别是由度量 ρ_i 和ρ 所诱导出来的X_i 和X 的拓扑,其中 $i=1,2,\cdots,n$.则 X 的子集族

$$\mathscr{B}=\{U_1\times U_2\times\cdots\times U_n\mid U_i\in\mathscr{T}_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

是 X 的拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基.

证明 我们仅就 $n=2$ 的情形加以证明.

首先根据积度量的定义容易得到(请自行验证):对于任意 $x=(x_1,x_2)\in X$ 和任意$\varepsilon>0$,我们有:

$$B_1(x_1,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})\times B_2(x_2,\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}})\subset B(x,\varepsilon)$$
$$\subset B_1(x_1,\varepsilon)\times B_2(x_2,\varepsilon)$$

其中 $B_i(x_i,\mu)(B(x,\mu))$表示 $x_i(x)$在度量空间 $X_i(X)$中的以$x_i(x)$为中心以 μ 为半径的球形邻域,$i=1,2$.

设 $U_1\times U_2\in\mathscr{B}$,其中 U_1 和 U_2 分别是 X_1 和 X_2 中的开集.如果 $x=(x_1,x_2)\in U_1\times U_2$,则存在 $B_1(x_1,\varepsilon_1)\subset U_1$ 和$B_2(x_2,\varepsilon_2)\subset U_2$.于是

$$B(x,\varepsilon)\subset B_1(x_1,\varepsilon)\times B_2(x_2,\varepsilon)\subset U_1\times U_2$$

其中 $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$.这说明 $U_1\times U_2$ 是 x 的一个邻域.由于 x 是$U_1\times U_2$ 中的任意一个点,所以 $U_1\times U_2$ 是 X 中的一个开集.这证明了 $\mathscr{B}\subset\mathscr{T}$.

如果 U 是X 中的任意一个开集,即 $U\in\mathscr{T}$,则对于每一点 x

$\in U$,存在 $B(x,\varepsilon_x)\subset U$.从而

$$B_1\left(x_1,\frac{\varepsilon_x}{\sqrt{2}}\right)\times B_2\left(x_2,\frac{\varepsilon_x}{\sqrt{2}}\right)\subset U$$

由此可见

$$U=\bigcup_{x=(x_1,x_2)\in U}B_1\left(x_1,\frac{\varepsilon_x}{\sqrt{2}}\right)\times B_2\left(x_2,\frac{\varepsilon_x}{\sqrt{2}}\right)$$

这就是说,X 中的每一个开集是 $\mathscr{B}$ 中的某些元素的并.这完成了 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$的一个基的证明.

一般情形的证明是完全类似的,请读者自己补证. ■

在定理 3.2.1 的启示下,我们按以下方式引进有限个拓扑空间的积空间这一概念.

定理 3.2.2 设$(X_1,\mathscr{T}_1),(X_2,\mathscr{T}_2),\cdots,(X_n,\mathscr{T}_n)$是 $n\geqslant 1$ 个拓扑空间.则 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 有唯一的一个拓扑 $\mathscr{T}$ 以 X 的子集族

$$\mathscr{B}=\{U_1\times U_2\times\cdots\times U_n\mid U_i\in\mathscr{T}_i,i=1,2,\cdots,n\}$$

为它的一个基.

证明 我们有:

(1) 由于 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n\in\mathscr{B}$,所以$\bigcup_{B\in\mathscr{B}}B=X$;

(2) 如果 $U_1\times U_2\times\cdots\times U_n,V_1\times V_2\times\cdots\times V_n\in\mathscr{B}$,其中 $U_i,V_i\in\mathscr{T}_i,i=1,2,\cdots,n$,则

$$\begin{aligned}&(U_1\times U_2\times\cdots\times U_n)\cap(V_1\times V_2\times\cdots\times V_n)\\=&(U_1\cap V_1)\times(U_2\cap V_2)\times\cdots\times(U_n\cap V_n)\in\mathscr{B}\end{aligned}$$

应用第二章中的定理 2.6.3 可见本定理的结论成立. ■

定义 3.2.2 设$(X_1,\mathscr{T}_1),(X_2,\mathscr{T}_2),\cdots,(X_n,\mathscr{T}_n)$是 $n\geqslant 1$ 个拓扑空间.则 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 的以子集族

$$\mathscr{B}=\{U_1\times U_2\times\cdots\times U_n\mid U_i\in\mathscr{T}_i,i=1,2\cdots,n\}$$

为它的一个基的那个唯一的拓扑 $\mathscr{T}$称为拓扑 $\mathscr{T}_1,\mathscr{T}_2,\cdots,\mathscr{T}_n$ 的积拓扑,拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为拓扑空间 $(X_1,\mathscr{T}_1),(X_2,\mathscr{T}_2),\cdots,(X_n,\mathscr{T}_n)$

的(拓扑)积空间.

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 $n\geqslant 1$ 个度量空间.则笛卡儿积 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 可以有两种方式得到它的拓扑:一是先将 X 作成度量积空间,然后再由积度量诱导出 X 的拓扑;另一是先用每一个 X_i 的度量诱导出 X_i 的拓扑,然后再将 X 考虑作为诸拓扑空间 X_i 的拓扑积空间.定理 3.2.1 实际上已经指出这两种拓扑是一致的,现将这一点明确陈述如下:

定理 3.2.3 设 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是 $n\geqslant 1$ 个度量空间 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的度量积空间.则将 X 和诸 X_i 都考虑作为拓扑空间时,X 是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的(拓扑)积空间.

特别地,作为拓扑空间,n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 便是 n 个实数空间 $\mathbb{R}$ 的(拓扑)积空间. ■

定理 3.2.4 设 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是 $n\geqslant 1$ 个拓扑空间 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的积空间,对于每一个 $i=1,2,\cdots,n$,拓扑空间 X_i 有一个基 $\mathscr{B}_i$.则 X 的子集族

$$\widetilde{\mathscr{B}}=\{B_1\times B_2\times\cdots\times B_n \mid B_i\in\mathscr{B}_i,\ i=1,2,\cdots,n\}$$

是拓扑空间 X 的一个基.

证明 设 $\mathscr{T}_i$ 为 X_i 的拓扑,$i=1,2,\cdots,n$.令 $\mathscr{B}$ 如积拓扑的定义中的积拓扑的那个基.为证明 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 是积空间 X 的一个基,只需证明 $\mathscr{B}$ 中的每一个元素均可以表示为 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 中的某些元素的并.为证此,设 $U_1\times U_2\times\cdots\times U_n\in\mathscr{B}$,其中 $U_i\in\mathscr{T}_i$.由于 $\mathscr{B}_i$ 是 $\mathscr{T}_i$ 的一个基,故对于每一个 i,存在 $\mathscr{D}_i\subset\mathscr{B}_i$ 使得 $U_i=\bigcup_{B_i\in\mathscr{D}_i}B_i$.于是

$$\begin{aligned}
&U_1\times U_2\times\cdots\times U_n\\
&=\Big(\bigcup_{B_1\in\mathscr{D}_1}B_1\Big)\times\Big(\bigcup_{B_2\in\mathscr{D}_2}B_2\Big)\times\cdots\times\Big(\bigcup_{B_n\in\mathscr{D}_n}B_n\Big)\\
&=\bigcup_{B_1\in\mathscr{D}_1,B_2\in\mathscr{D}_2,\cdots,B_n\in\mathscr{D}_n}B_1\times B_2\times\cdots\times B_n\\
&=\bigcup_{B_1\times B_2\times\cdots\times B_n\in\mathscr{D}}B_1\times B_2\times\cdots\times B_n
\end{aligned}$$

其中

$$\mathscr{D}=\{B_1\times B_2\times\cdots\times B_n\mid B_i\in\mathscr{D}_i,i=1,2,\cdots,n\}\subset\widetilde{\mathscr{B}}$$

这就完成了我们所需的证明. ■

例 3.2.1 由于实数空间$\mathbb{R}$有一个基由所有的开区间构成,故应用定理 3.2.4 立即可见,n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的所有开方体$(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)\times\cdots\times(a_n,b_n)$构成$\mathbb{R}^n$的一个基.特别地,欧氏平面$\mathbb{R}^2$有一个基由所有的开矩形$(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$构成.

定理 3.2.5 设 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是 $n\geqslant1$ 个拓扑空间 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的积空间.令 $\mathscr{T}$ 为 X 的拓扑,$\mathscr{T}_i$ 为 X_i 的拓扑,$i=1,2,\cdots,n$.则 X 以它的子集族

$$\mathscr{S}=\{p_i^{-1}(U_i)\mid U_i\in\mathscr{T}_i\}$$

为它的一个子基.其中,对于每一个 i,映射 $p_i:X\to X_i$ 是笛卡儿积 X 到它的第 i 个坐标集 X_i 的投射.

证明 我们仅证明 $n=2$ 的情形.

首先注意,对于任何 $A_1\subset X_1$ 和 $A_2\subset X_2$ 有

$$p_1^{-1}(A_1)=A_1\times X_2 \text{ 和 } p_2^{-1}(A_2)=X_1\times A_2$$

根据积空间的定义,$\mathscr{B}=\{U_1\times U_2\mid U_i\in\mathscr{T}_i,i=1,2\}$是它的一个基.令$\widetilde{\mathscr{B}}$为$\mathscr{S}$的每一个有限非空子族之交的全体构成的集族,即

$$\widetilde{\mathscr{B}}=\{S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n\mid S_i\in\mathscr{S},i=1,2,\cdots,n,n\in\mathbb{Z}_+\}$$

由于显然有 $\mathscr{S}\subset\mathscr{B}$,所以 $\widetilde{\mathscr{B}}\subset\mathscr{T}$.另一方面,根据 $U_1\times U_2=(U_1\times X_2)\cap(X_1\times U_2)$,可见 $\mathscr{B}\subset\widetilde{\mathscr{B}}$.综上我们有 $\mathscr{B}\subset\widetilde{\mathscr{B}}\subset\mathscr{T}$.明显地,$\widetilde{B}$是$X$的一个基.因此,$\mathscr{S}$是 X 的一个子基.

一般情形的证明是完全类似的,留给读者自己补证. ■

定理 3.2.6 设 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是 $n\geqslant1$ 个拓扑空间 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的积空间.则对于每一个 $i=1,2,\cdots,n$,笛卡儿积 X 到它的第 i 个坐标集 X_i 的投射 $p_i:X\to X_i$ 是一个满的连续开映射.

证明 显然 p_i 是一个满射. 对于 X_i 中每一个开集 U_i，根据定理 3.2.5，$p_i^{-1}(U_i)$是 X 的某一个子基的元素，所以必定是 X 中的一个开集. 这证明 p_i 的连续性.

令 $\mathscr{B}$ 为积拓扑定义中 X 的那个基. 由于一族集合的并的象等于先求这一族集合中每一个集合的象然后再求并(参见定理 1.6.3)，所以为了证明 p_i 是一个开映射，只需验证 $\mathscr{B}$ 中每一个元素的 p_i 象是X_i 中的开集即可；然而这是显然的，因为如果 U_1，U_2，$\cdots$，U_n 分别是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中的开集，则 $p_i(U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n) = U_i$ 是X_i 中的一个开集. ■

例 3.2.2 积空间到它的坐标空间的投射可以不是闭映射. 例如考虑欧氏平面$\mathbb{R}^2$ 到它的第一个坐标空间$\mathbb{R}$ 的投射 $p_1: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. 容易验证集合 $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 = 1\}$ 是$\mathbb{R}^2$ 中的一个闭集，然而 $p_1(B) = \mathbb{R} - \{0\}$却不是$\mathbb{R}$ 中的闭集.

定理 3.2.7 设 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 是 $n \geqslant 1$ 个拓扑空间 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的积空间. 又设 Y 也是一个拓扑空间. 则映射 $f: Y \to X$连续当且仅当对于每一个 $i = 1, 2, \cdots, n$，复合映射 $p_i \circ f: Y \to X_i$连续，其中，$p_i: X \to X_i$ 是积空间 X 对于第 i 个坐标空间 X_i 的投射.

证明 根据定理 3.2.6，每一个投射 p_i 连续，所以当 f 连续时，每一个 $p_i \circ f$ 连续.

另一方面，假设对于每一个 $i = 1, 2, \cdots, n$，复合映射 $p_i \circ f: Y \to X_i$连续. X 的子基(参见定理 3.2.5)

$$\mathscr{S} = \{p_i^{-1}(U_i) \mid U_i \text{ 是 } X_i \text{ 中的一个开集}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

中的每一个元素 $p_i^{-1}(U_i)$的 f 原象

$$f^{-1}(p_i^{-1}(U_i)) = (p_i \circ f)^{-1}(U_i)$$

是 Y 中的一个开集. 根据定理 2.6.5 可见 f 连续. ■

定理 3.2.7 是数学分析中一个相应的定理的推广，在数学分析中的那个定理经常被陈述为：从 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 到 m 维欧氏空间$\mathbb{R}^m$ 的一个函数(映射)是连续的当且仅当它的每一个分量函数连续．下面的定理 3.2.8 则说明积拓扑的一个重要特性．

定理 3.2.8 设 $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 是 $n \geqslant 1$ 个拓扑空间 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的积空间，$\mathscr{T}$是 X 的积拓扑．又设 $\tilde{\mathscr{T}}$ 是 X 的某一个拓扑满足条件：对于 X 的拓扑 $\tilde{\mathscr{T}}$ 而言，从 X 到它的第 i 个坐标空间 X_i 的投射 $p_i : X \to X_i$ 是连续映射，$i = 1, 2, \cdots, n$．则 $\tilde{\mathscr{T}} \supset \mathscr{T}$.

换言之，积拓扑是使从积空间到每一个坐标空间的投射都连续的最小的拓扑．

证明 由于 X 的拓扑$\tilde{\mathscr{T}}$使得对于每一个投射都连续，所以对于任何一个 $i = 1, 2, \cdots, n$ 和 X_i 中的任何一个开集 U_i 我们有 $p_i^{-1}(U_i) \in \tilde{\mathscr{T}}$. 于是 X 的积拓扑 $\mathscr{T}$的子基(参见定理 3.2.5)

$$\mathscr{S} = \{ p_i^{-1}(U_i) \mid U_i \text{ 是 } X_i \text{ 中的一个开集}, i = 1, 2, \cdots, n \}$$

包含于$\tilde{\mathscr{T}}$，从而 $\mathscr{T} \subset \tilde{\mathscr{T}}$. ■

定理 3.2.9 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 $n \geqslant 2$ 个拓扑空间．则积空间 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 同胚于积空间 $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$.

证明 暂时将 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 到第 i 个坐标空间 X_i 的投射记作 p_i；将 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}$ 到第 j 个坐标空间 X_j 的投射记作 q_j；将 $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ 到它的坐标空间 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}$ 和 X_n 的两个投射分别记作 r_1 和 r_2. 根据定理 3.2.6，所有这些投射都是连续的．

定义映射

$$k : X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to (X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$$

使得对于任何 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$,

$$k(x_1, x_2, \cdots, x_n) = ((x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}), x_n)$$

容易验证 k 是一个一一映射．

为证明映射 k 连续，根据定理 3.2.7，只要证明映射 $r_1 \circ k$ 和

$r_2 \circ k$ 连续.映射

$$r_1 \circ k: X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}$$

是连续的,这是因为对于每一个 $j=1,2,\cdots,n-1$,映射 $q_j \circ r_1 \circ k = p_j$ 连续,此外 $r_2 \circ k = p_n$ 也连续.

通过完全类似的证明也可见 k^{-1} 连续.因此 k 是一个同胚.

■

在定理 3.2.9 中,尽管 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 和 $(X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ 作为集合可以是完全不同的,但这个定理告诉我们,假如我们对同胚的空间不予区别,那么这两个拓扑空间却是一样的.这个定理还告诉我们,假如我们对同胚的空间不予区别,有限个拓扑空间的积空间可以通过归纳的方式予以定义.

习　题

1. 设(X,ρ)是一个度量空间.证明映射 $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ 是一个连续映射.

2. 设(X_1,ρ_1)和(X_2,ρ_2)是两个度量空间.定义

$$d_1, d_2: (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}$$

使得对于任何 $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2) \in X_1 \times X_2$,

$$d_1(x,y) = \rho_1(x_1,y_1) + \rho_2(x_2,y_2)$$

$$d_2(x,y) = \max\{\rho_1(x_1,y_1), \rho_2(x_2,y_2)\}$$

(1) 验证 d_1 和 d_2 都是 $X_1 \times X_2$ 的度量;

(2) 证明 $X_1 \times X_2$ 的度量 d_1, d_2 和 ρ 是等价的度量,其中 ρ 是积度量.

3. 将第2题中的结论推广到 n 个度量空间的积空间中去.

4. 设 X_1 和 X_2 是两个拓扑空间,$X_1 \times X_2$ 是它们的积空间.证明:对于任何 $A \subset X_1$ 和 $B \subset X_2$ 有

(1) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$;

(2) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$;

(3) $\partial(A\times B)=(\partial(A)\times\overline{B})\cup(\overline{A}\times\partial(B))$.

(注意,尽管这里在三个不同的空间中求集合的闭包,内部和边界使用的记号分别相同,但并不至于发生混淆.)

5. 设 X_1 和 X_2 是两个拓扑空间,A_1 和 A_2 分别是 X_1 和 X_2 的子空间.证明 $A_1\times A_2$ 作为积空间的拓扑与 $A_1\times A_2$ 作为积空间 $X_1\times X_2$ 的子空间的拓扑两者相同.

6. 设 X_1,X_2 和 X_3 都是拓扑空间.证明:

(1) 积空间 $X_1\times X_2$ 同胚于积空间 $X_2\times X_1$;

(2) 积空间$(X_1\times X_2)\times X_3$ 同胚于积空间 $X_1\times(X_2\times X_3)$;

(3) 存在一个拓扑空间 Y 使得积空间$X_1\times Y$ 同胚于 X_1;

(4) 如果 $X_1\neq\varnothing$ 并且积空间 $X_1\times X_2$ 同胚于积空间 $X_1\times X_3$,则 X_2 同胚于 X_3.

7. 证明§3.1 习题第 9 题中定义的拓扑空间$(\mathbb{R}^2,\mathscr{T})$是两个实数下限拓扑空间$\mathbb{R}_l$(参见例 2.6.1)的积空间.

§3.3 商空间

将一条橡皮筋的两个端点"粘合"起来,我们便得到了一个橡皮圈;将一块正方形的橡皮块一对对边上的点按同样的方向两两"粘合"起来,我们便得到了一个橡皮管,再将这个橡皮管两端的两个圆圈上的点按同样的方向两两"粘合"起来,我们又得到了一个橡皮轮胎……这种从一个给定的图形构造出一个新图形的办法可以一般化.

我们在第一章中讨论过等价关系和商集的概念.所谓商集乃是在一个集合中给定了一个等价关系之后将相对于这个等价关系而言的等价类所构成的集合,通俗地说便是分别将每一个等价类中的所有的点"粘合"为一个点后得到的集合.在定义 1.5.6 中我们也曾说起过在一个集合 X 中给定了一个等价关系R 之后,从集

合 X 到商集 X/R 有一个自然的投射 $p:X\to X/R$，它是一个满射．注意到了这一点，下面引出商拓扑和商空间的概念的方式便显得顺理成章了．

定义 3.3.1 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，Y 是一个集合，$f:X\to Y$ 是一个满射．容易验证(请自行验证) Y 的子集族

$$\mathscr{T}_1=\{U\subset Y\mid f^{-1}(U)\in\mathscr{T}\}$$

是 Y 的一个拓扑．我们称 $\mathscr{T}_1$ 为 Y 的(**相对于满射 f 而言的**)**商拓扑**．

容易直接验证在上述定义的条件下，Y 的一个拓扑 $\tilde{\mathscr{T}}$ 是 Y 的商拓扑当且仅当在拓扑空间 $(Y,\tilde{\mathscr{T}})$ 中 $F\subset Y$ 是一个闭集的充分必要条件是 $f^{-1}(F)$ 是 X 中的一个闭集．

定理 3.3.1 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间，Y 是一个集合，$f:X\to Y$ 是一个满射．则

(1) 如果 $\mathscr{T}_1$ 是 Y 的商拓扑，则 $f:X\to Y$ 是一个连续映射；

(2) 如果 $\tilde{\mathscr{T}}_1$ 是 Y 的一个拓扑，使得对于这个拓扑 $\tilde{\mathscr{T}}_1$ 而言映射 f 是连续的，则 $\tilde{\mathscr{T}}_1\subset\mathscr{T}_1$．

这也就是说商拓扑是使映射 f 连续的最大的拓扑．

证明 (1) 根据定义自明．

(2) 如果 $U\in\tilde{\mathscr{T}}_1$，由于满射 f 对于 Y 的拓扑 $\tilde{\mathscr{T}}_1$ 而言连续，故 $f^{-1}(U)\in\mathscr{T}$，因此 $U\in\mathscr{T}_1$．这证明 $\tilde{\mathscr{T}}_1\subset\mathscr{T}_1$． ■

定义 3.3.2 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$．我们称映射 f 为一个**商映射**，如果它是一个满射并且 Y 的拓扑是对于映射 f 而言的商拓扑．

根据定理 3.3.1 可见商映射是连续的．下面的这个定理告诉我们如何利用商映射来验证一类映射的连续性．

定理 3.3.2 设 X，Y 和 Z 都是拓扑空间，且 $f:X\to Y$ 是一个商映射．则映射 $g:Y\to Z$ 连续当且仅当映射 $g\circ f:X\to Z$ 连续．

证明 由于商映射 f 连续,故当 g 连续时 $g\circ f$ 连续.

另一方面,设 $g\circ f$ 连续.若 W 是 Z 中的一个开集,则 $(g\circ f)^{-1}(W)$ 是 X 中的一个开集.然而

$$(g\circ f)^{-1}(W)=f^{-1}(g^{-1}(W))$$

所以根据商拓扑的定义 $g^{-1}(W)$ 是 Y 中的一个开集.这便证明了 g 连续. ■

为了应用定理 3.3.2,如何知道一个拓扑空间的拓扑是相对于从另一个拓扑空间到它的一个满射而言的商拓扑便成了一个有意思的问题.我们在这里只给出一个简单的必要条件.为此先陈述开映射和闭映射的定义.

定义 3.3.3 设 X 和 Y 是两个拓扑空间.映射 $f:X\to Y$ 称为一个**开映射**(**闭映射**),如果对于 X 中的任何一个开集(闭集)U,象集 $f(U)$ 是 Y 中的一个开集(闭集).

定理 3.3.3 设 X 和 Y 是两个拓扑空间.如果映射 $f:X\to Y$ 是一个连续的满射,并且是一个开映射(闭映射),则 Y 的拓扑便是相对于满射 f 而言的商拓扑.

证明 我们证明当 f 是开映射的情形.如果 V 是 Y 中的一个开集,由于映射 f 连续,所以 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的一个开集,因此 V 是 Y 中对于商拓扑而言的一个开集.另一方面,如果 V 是 Y 中对于商拓扑而言的一个开集,则 $f^{-1}(V)$ 是 X 中的一个开集,由于 f 是一个开的满射,所以 $f(f^{-1}(V))=V$ 是 Y 中的一个开集.综上所述,我们证明了 Y 的拓扑便是商拓扑.当 f 是闭映射的情形时,证明是类似的. ■

定义 3.3.4 设 $(X,\mathscr{T})$ 是一个拓扑空间,R 是 X 中的一个等价关系.商集 X/R 的(相对于自然的投射 $p:X\to X/R$ 而言的)商拓扑 $\mathscr{T}_R$ 称为 X/R 的(相对于等价关系 R 而言的)**商拓扑**,拓扑空间 $(X/R,\mathscr{T}_R)$ 称为拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 的(相对于等价关系 R 而言的)

商空间.

如果 X 是一个拓扑空间,R 是 X 中的一个等价关系,若无另外的说明,我们总认为商集 X/R 的拓扑是商拓扑,也就是说将商集 X/R 认作拓扑空间时,指的就是商空间.因此投射 $p:X\to X/R$ 是一个商映射.

通过在一个拓扑空间中给定等价关系的办法来得到商空间是构造新的拓扑空间的一个重要手法.下面给出若干例子.

例 3.3.1 在实数空间$\mathbb{R}$中给定一个等价关系

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid \text{或者 } x,y\in\mathbb{Q};\text{或者 } x,y\notin\mathbb{Q}\}$$

所得到的商空间$\mathbb{R}/R$ 实际上便是由两个点构成的平庸空间.(请读者自行验证.)然而,明确地写出上面那个等价关系 R 有时是很麻烦的,我们经常采用一种较为通俗的简便说法,将这个商空间$\mathbb{R}/R$ 说成是"在实数空间中将所有有理点和所有无理点分别粘合(或等同)为一点所得到的商空间".

例 3.3.2 在单位闭区间 $I=[0,1]$中给定一个等价关系

$$\sim=\{(x,y)\in I^2\mid \text{或者 } x=y,\text{或者}\{x,y\}=\{0,1\}\}$$

我们便得到了一个商空间$[0,1]/\sim$.由于与例 3.3.1 中同样的理由,习惯上也将这个商空间说成是"在单位闭区间 I 中粘合两个端点所得到的商空间".事实上(参见习题 6),这个商空间与单位圆周 S^1 同胚.

类似地我们还可以构造出许多为读者熟悉或不熟悉的拓扑空间.例如在单位正方形 $I^2=[0,1]^2$ 中将它的一对竖直的对边上的每一对具有相同的第二个坐标的点$(0,x)$和$(1,x)$粘合,得到的商空间将同胚于一截"管子",而将它的一对竖直的对边上的每一对点$(0,x)$和$(1,1-x)$粘合得到的商空间通常叫做 Mobius 带.数学中许多重要的对象如环面,Clain 瓶,射影平面和射影空间等也都可以作为商空间而给出,我们在此不做进一步的介绍.

习 题

1. 证明:离散空间(平庸空间)的任何一个商空间都是离散空间(平庸空间).

2. 设 X, Y 和 Z 都是拓扑空间. 证明:如果 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$ 都是商映射,则 $g\circ f: X\to Z$ 也是商映射.

3. 定义映射 $p:\mathbb{R}\to S^1$,使得对于任何 $t\in\mathbb{R}$ 有

$$p(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))\in S^1$$

证明:p 是一个商映射.(提示:事实上 p 是一个开映射.)

4. 定义映射 $p:\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}\to S^1$, 使得对于任何 $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ 有

$$p(x,y)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\in S^1$$

证明:p 是一个商映射.

5. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f: X\to Y$ 是一个商映射. 令

$$R=\{(x,y)\in X^2\mid f(x)=f(y)\}$$

证明:

(1) R 是 X 中的一个等价关系;

(2) Y 同胚于商空间 X/R.

6. 定义映射 $p: I\to S^1$,使得对于任何 $t\in I$ 有

$$p(t)=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))\in S^1$$

其中 $I=[0,1]$,证明:

(1) p 是满的连续闭映射;

(2) 例 3.3.2 中的商空间 I/R 与 S^1 同胚.

7. 举例说明商映射可以既不是开映射也不是闭映射.

第 4 章　连　通　性

本章讨论拓扑空间的几种拓扑不变性质，包括连通性，局部连通性和弧连通性，并且涉及某些简单的应用.这些拓扑不变性质的研究也使我们能够区别一些互不同胚的空间.

§4.1　连通空间

我们先通过直观的方式考察一个例子.在实数空间$\mathbb{R}$中的两个区间$(0,1)$和$[1,2)$，尽管它们互不相交，但它们的并$(0,1)\cup[1,2)=(0,2)$却是一个"整体"；而另外两个区间$(0,1)$和$(1,2)$，它们的并$(0,1)\cup(1,2)$是明显的两个"部分".产生上述不同情形的原因在于，对于前一种情形，区间$(0,1)$有一个凝聚点 1 在$[1,2)$中；而对于后一种情形，两个区间中的任何一个都没有凝聚点在另一个中.我们通过以下的定义，用术语来区别这两种情形.

定义 4.1.1　*设 A 和 B 是拓扑空间 X 中的两个子集.如果*

$$(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=\varnothing$$

*则称子集 A 和 B 是***隔离的**.

明显地，定义中的条件等价于 $A\cap\overline{B}=\varnothing$和 $B\cap\overline{A}=\varnothing$同时成立，也就是说，$A$ 与 B 无交并且其中的任何一个不包含另一个的任何凝聚点.

应用这一术语我们就可以说，在实数空间$\mathbb{R}$中，子集$(0,1)$和$(1,2)$是隔离的，而子集$(0,1)$和$[1,2)$不是隔离的.

又例如，易见，平庸空间中任何两个非空子集都不是隔离的，而在离散空间中任何两个无交的子集都是隔离的.

定义 4.1.2 设 X 是一个拓扑空间. 如果 X 中有两个非空的隔离子集 A 和 B 使得 $X=A\cup B$, 则称 X 是一个**不连通空间**; 否则, 则称 X 是一个**连通空间**.

显然, 包含着多于两个点的离散空间是不连通空间, 而任何平庸空间都是连通空间.

定理 4.1.1 设 X 是一个拓扑空间. 则下列条件等价:

(1) X 是一个不连通空间;

(2) X 中存在着两个非空的闭子集 A 和 B 使得 $A\cap B=\varnothing$ 和 $A\cup B=X$ 成立;

(3) X 中存在着两个非空的开子集 A 和 B 使得 $A\cap B=\varnothing$ 和 $A\cup B=X$ 成立;

(4) X 中存在着一个既开又闭的非空真子集.

证明 (1) 蕴涵(2). 设(1)成立. 令 A 和 B 是 X 中的两个非空的隔离子集使得 $A\cup B=X$, 显然 $A\cap B=\varnothing$, 并且这时我们有

$$\begin{aligned}\overline{B}&=\overline{B}\cap X\\&=(\overline{B}\cap A)\cup(\overline{B}\cap B)=B\end{aligned}$$

因此 B 是 X 中的一个闭子集; 同理 A 也是一个 X 中的一个闭子集. 这证明了集合 A 和 B 满足条件(2)中的要求.

(2) 蕴涵(3). 如果 X 的子集 A 和 B 满足条件(2)中的要求, 则由于这时有 $A=B'$ 和 $B=A'$, 易见 A 和 B 也满足条件(3)中的要求.

(3) 蕴涵(4). 如果 X 的子集 A 和 B 满足条件(3)中的要求, 则易见 A 和 B 都是 X 中的既开又闭的非空真子集, 所以条件(4)成立.

(4) 蕴涵(1). 设 X 中有一个既开又闭的非空真子集 A. 令 $B=A'$. 则 A 和 B 都是 X 中的非空的闭子集, 它们是无交的并且使得 $A\cup B=X$. 易见两个无交的闭子集必定是隔离的. 因此(1)成立. ■

例 4.1.1 有理数集 $\mathbb{Q}$ 作为实数空间 $\mathbb{R}$ 的子空间是一个不连

通空间. 这是因为对于任何一个无理数 $r\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, 集合 $(-\infty,r)\cap\mathbb{Q}\,(=(-\infty,r]\cap\mathbb{Q})$ 是 $\mathbb{Q}$ 中的一个既开又闭的非空真子集.

定理 4.1.2 实数空间 $\mathbb{R}$ 是一个连通空间.

证明 我们用反证法来证明这个定理. 假设实数空间 $\mathbb{R}$ 是不连通空间, 则根据定理 4.1.1, 在 $\mathbb{R}$ 中有两个非空闭集 A 和 B 使得 $A\cap B=\varnothing$ 和 $A\cup B=\mathbb{R}$ 成立. 任意选取 $a\in A$ 和 $b\in B$, 不失一般性可设 $a<b$. 令 $\widetilde{A}=A\cap[a,b]$ 和 $\widetilde{B}=B\cap[a,b]$. 于是 $\widetilde{A}$ 和 $\widetilde{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的两个非空闭集分别包含 a 和 b, 并且使得 $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}=\varnothing$ 和 $\widetilde{A}\cup\widetilde{B}=[a,b]$ 成立. 集合 $\widetilde{A}$ 有上界 b, 故有上确界, 设为 $\tilde{b}$. 由于 $\widetilde{A}$ 是一个闭集, 所以 $\tilde{b}\in\widetilde{A}$, 并且因此可见 $\tilde{b}<b$, 因为 $\tilde{b}=b$ 将导致 $b\in\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$, 而这与 $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}=\varnothing$ 矛盾. 因此 $(\tilde{b},b]\subset\widetilde{B}$. 由于 $\widetilde{B}$ 是一个闭集, 所以 $\tilde{b}\in\widetilde{B}$. 这又导致 $\tilde{b}\in\widetilde{A}\cap\widetilde{B}$, 也与 $\widetilde{A}\cap\widetilde{B}=\varnothing$ 矛盾. ■

定义 4.1.3 设 Y 是拓扑空间 X 的一个子集. 如果 Y 作为 X 的子空间是一个连通空间, 则称 Y 是 X 的一个**连通子集**; 否则, 称 Y 是 X 的一个**不连通子集**.

拓扑空间 X 的子集 Y 是否是连通的, 按照定义只与子空间 Y 的拓扑有关. 因此, 如果 $Y\subset Z\subset X$, 则 Y 是 X 的连通子集当且仅当 Y 是 Z 的连通子集. 这一点后面要经常用到.

定理 4.1.3 设 Y 是拓扑空间 X 的一个子集, $A,B\subset Y$. 则 A 和 B 是子空间 Y 中的隔离子集当且仅当它们是拓扑空间 X 中的隔离子集.

因此, Y 是 X 的一个不连通子集当且仅当存在 X 中的两个非空隔离子集 A 和 B 使得 $A\cup B=Y$.

证明 集合 A 与集合 B 在 Y 中的闭包之交等于集合 A, 集合 B 在 X 中的闭包, 以及集合 Y 这三个集合之交, 也就等于集合 A 与集合 B 在 X 中的闭包之交; 同理集合 B 与集合 A 在 Y 中的闭包之交等于集合 B 与集合 A 在 X 中的闭包之交. 因此根据隔离子集的定义可见定理的第一个论断成立. 定理的第二个论断则根据

第一个论断明显地推出. ■

定理 4.1.4 设 Y 是拓扑空间 X 中的一个连通子集. 如果 X 中有隔离子集 A 和 B 使得 $Y \subset A \cup B$, 则或者 $Y \subset A$, 或者 $Y \subset B$.

证明 如果 A 和 B 是 X 中的隔离子集使得 $Y \subset A \cup B$, 则

$$
\begin{aligned}
&((A \cap Y) \cap \overline{B \cap Y}) \cup ((B \cap Y) \cap \overline{A \cap Y}) \\
&\subset (A \cap Y \cap \overline{B}) \cup (B \cap Y \cap \overline{A}) \\
&= Y \cap ((A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})) = \varnothing
\end{aligned}
$$

这说明 $A \cap Y$ 和 $B \cap Y$ 也是隔离子集. 然而

$$(A \cap Y) \cup (B \cap Y) = (A \cup B) \cap Y = Y$$

因此根据定理 4.1.3, 集合 $A \cap Y$ 和 $B \cap Y$ 中必有一个是空集. 如果 $A \cap Y = \varnothing$, 据上式立即可见 $Y \subset B$, 如果 $B \cap Y = \varnothing$, 同理可见 $Y \subset A$. ■

定理 4.1.5 设 Y 是拓扑空间 X 的一个连通子集, $Z \subset X$ 满足条件 $Y \subset Z \subset \overline{Y}$. 则 Z 也是 X 的一个连通子集.

证明 假设 Z 是 X 中的一个不连通子集. 根据定理 4.1.3, 在 X 中有非空隔离子集 A 和 B 使得 $Z = A \cup B$. 因此 $Y \subset A \cup B$. 由于 Y 是连通的, 根据定理 4.1.4, 或者 $Y \subset A$, 或者 $Y \subset B$. 如果 $Y \subset A$, 由于 $Z \subset \overline{Y} \subset \overline{A}$, 所以 $Z \cap B \subset \overline{A} \cap B = \varnothing$, 因此 $B = Z \cap B = \varnothing$; 同理如果 $Y \subset B$, 则 $A = \varnothing$. 这两种情形都与假设矛盾. ■

定理 4.1.6 设 $\{Y_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ 是拓扑空间 X 的连通子集构成的一个子集族. 如果 $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma \neq \varnothing$, 则 $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$ 是 X 的一个连通子集.

证明 设 A 和 B 是 X 中的两个隔离子集, 使得 $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma = A \cup B$. 任意选取 $x \in \bigcap_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$, 不失一般性, 设 $x \in A$. 对于每一个 $\gamma \in \Gamma$, 由于 Y_γ 连通, 根据定理 4.1.4, 或者 $Y_\gamma \subset A$ 或者 $Y_\gamma \subset B$; 由于 $x \in Y_\gamma \cap A$, 所以 $Y_\gamma \subset A$. 这蕴涵着 $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma \subset A$ 和 $B = \varnothing$. 根据定理 4.1.3, 这就证明了 $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} Y_\gamma$ 是连通的. ■

定理 4.1.7 设 Y 是拓扑空间 X 中的一个子集. 如果对于任

意 $x,y\in Y$ 存在 X 中的一个连通子集 Y_{xy} 使得 $x,y\in Y_{xy}\subset Y$，则 Y 是 X 中的一个连通子集.

证明 如果 $Y=\varnothing$，显然 Y 是连通的. 下设 $Y\neq\varnothing$. 任意选取 $a\in Y$，容易验证 $Y=\bigcup_{y\in Y}Y_{ay}$，并且 $a\in\bigcap_{y\in Y}Y_{ay}$. 应用定理4.1.6，可见 Y 是连通的. ■

我们曾经说过，拓扑学的中心任务便是研究拓扑不变性质(参见§2.2). 所谓拓扑不变性质，乃是为一个拓扑空间具有必为任何一个与其同胚的拓扑空间所具有的性质. 事实上，如果拓扑空间的某一个性质，它是藉助于开集或者藉助于经由开集定义的其它概念表达的，则此性质必然是拓扑不变性质.

拓扑空间的某种性质，如果为一个拓扑空间所具有也必然为它在任何一个连续映射下的象所具有，则称这个性质是一个**在连续映射下保持不变的性质**. 由于同胚是连续的满射，所以在连续映射下保持不变的性质必然是拓扑不变性质.

拓扑空间的某种性质，如果为一个拓扑空间所具有也必然为它的任何一个商空间所具有，则称这个性质是一个**可商性质**. 由于拓扑空间到它的商空间的自然的投射是一个连续的满射，所以在连续映射下保持不变的性质必然是可商性质.

以下定理4.1.8指出，连通性(即一个拓扑空间是连通的这一性质)是一个在连续映射下保持不变的性质. 因此，它是拓扑不变性质，也是可商性质.

定理4.1.8 设 $f:X\to Y$ 是从连通空间 X 到拓扑空间 Y 的一个连续映射. 则 $f(X)$ 是 Y 的一个连通子集.

证明 如果 $f(X)$ 是 Y 的一个不连通子集，则存在 Y 的非空隔离子集 A 和 B 使得 $f(X)=A\cup B$. 于是 $f^{-1}(A)$ 和 $f^{-1}(B)$ 是 X 的非空子集，并且

$$\begin{aligned}&(f^{-1}(A)\cap\overline{f^{-1}(B)})\cup(f^{-1}(B)\cap\overline{f^{-1}(A)})\\\subset&(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(\overline{B}))\cup(f^{-1}(B)\cap f^{-1}(\overline{A}))\\=&f^{-1}((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}))=\varnothing\end{aligned}$$

所以 $f^{-1}(A)$和 $f^{-1}(B)$是 X 的非空隔离子集.此外,

$$f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)=f^{-1}(A\cup B)$$
$$=f^{-1}(f(X))=X$$

这说明 X 不连通.与定理假设矛盾. ■

拓扑空间的某种性质 P 称为**有限可积性质**,如果任意 $n\geqslant 1$ 个拓扑空间 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 都具有性质P,蕴涵着积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 也具有性质P.

例如,容易直接证明,如果拓扑空间 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 都是离散空间(平庸空间),则积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 也是离散空间(平庸空间),因此我们可以说拓扑空间的离散性和平庸性都是有限可积性质.

根据定理 3.2.9 以及紧随其后的说明可见:假设已知拓扑空间的某一个性质 P 是一个拓扑不变性质.为了证明性质 P 是一个有限可积性质我们只要证明任何两个具有性质 P 的拓扑空间的积空间也是具有性质P 的拓扑空间.

定理 4.1.9 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个连通空间.则积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 也是连通空间.

证明 根据前一段中的说明,我们只要对于 $n=2$ 的情形加以证明.

首先我们指出:如果 $x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in X_1\times X_2$ 两个点有一个坐标相同,则 $X_1\times X_2$ 有一个连通子集同时包含 x 和 y.

不失一般性,设 $x_1=y_1$.定义映射 $k:X_2\to X_1\times X_2$ 使得对于任何 $z_2\in X_2$ 有 $k(z_2)=(x_1,z_2)$.由于 $p_1\circ k:X_2\to X_1$ 是取常值 x_1 的映射,$p_2\circ k:X_2\to X_2$ 为恒同映射,它们都是连续映射,其中 p_1 和 p_2 分别是 $X_1\times X_2$ 到第 1 和第 2 个坐标空间的投射.因此,k 是一个连续映射.根据定理 4.1.8,$k(X_2)$是连通的.此外易见,

$k(X_2)=\{x_1\}\times X_2$,因此它同时包含 x 和 y.

现在来证明:$X_1\times X_2$ 中任何两个点 $x=(x_1,x_2)$ 和 $y=(y_1,y_2)$ 同时属于 $X_1\times X_2$ 的某一个连通子集.这是因为这时若令 $z=(x_1,y_2)\in X_1\times X_2$,则根据前段结论,可见有 $X_1\times X_2$ 的一个连通子集 Y_1 同时包含 x 和 z,也有 $X_1\times X_2$ 的一个连通子集 Y_2 同时包含 y 和 z.由于 $z\in Y_1\cap Y_2$,所以根据定理 4.1.6,$Y_1\cup Y_2$ 是连通的,它同时包含 x 和 y.

于是应用定理 4.1.7 可见 $X_1\times X_2$ 是一个连通空间. ■

由于 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是 n 个实数空间 $\mathbb{R}$ 的笛卡儿积,而实数空间 $\mathbb{R}$ 又是一个连通空间,所以应用这个定理可见,n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是一个连通空间.

习 题

1. 设 A 和 B 是拓扑空间 X 的隔离子集.证明:如果 $A_1\subset A$,$B_1\subset B$,则 A_1 和 B_1 也是隔离子集.

2. 设 A_1,A_2,B_1,B_2 都是拓扑空间 X 的子集.证明:集合 $A_1\cup A_2$ 和 $B_1\cup B_2$ 是隔离子集当且仅当对于任何 $i,j\in\{1,2\}$,集合 A_i 和 B_j 是隔离子集.

3. 设 A 和 B 是拓扑空间 X 的隔离子集.证明:如果 $A\cup B$ 是开集(闭集),则 A 和 B 都是开集(闭集).

4. 有限补空间和可数补空间何时是连通的何时是不连通的?给出结论和证明.

5. 设 $\mathscr{T}$ 和 $\tilde{\mathscr{T}}$ 是集合 X 的两个拓扑,并且 $\tilde{\mathscr{T}}\subset\mathscr{T}$.证明:如果拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 是连通的,则拓扑空间 $(X,\tilde{\mathscr{T}})$ 也是连通的.

6. 设 A 是拓扑空间 X 的一个连通子集,B 是 X 的一个既开又闭的集合.证明:如果 $A\cap B\neq\varnothing$,则 $A\subset B$.

7. 设 X 是一个拓扑空间,Y 是 X 的一个子集.证明:Y 是不连通子集当且仅当存在 X 的开集(闭集) A 和 B 使得 $Y\subset A\cup B$,$A\cap B\subset X-Y$,$A\cap Y$

$\neq\varnothing$ 和 $B\cap Y\neq\varnothing$ 成立.

8. 设 Y 是拓扑空间 X 的一个连通子集. 证明:如果 A 和 B 是 X 的两个无交的开集(闭集)使得 $Y\subset A\cup B$,则或者 $Y\subset A$ 或者 $Y\subset B$.

9. 设 Y 是拓扑空间 X 的一个子集. 证明:$\overline{Y}$ 是 X 的一个不连通子集当且仅当 X 中存在两个非空集合 A 和 B 使得 $Y\subset A\cup B$, $\overline{A}\cap\overline{B}=\varnothing$, $Y\cap A\neq\varnothing$ 和 $Y\cap B\neq\varnothing$ 成立.

10. 设 $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是拓扑空间 X 的一个由连通子集构成的子集族. 证明:如果对于任意 $\alpha,\beta\in\Gamma$,在指标集 Γ 中有有限个元素 $\gamma_1=\alpha,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$, $\gamma_{n+1}=\beta$,使得对于任何 $i=1,2,\cdots,n$,集合 Y_{γ_i} 和 $Y_{\gamma_{i+1}}$ 不是隔离子集,则集合 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$ 是 X 的一个连通子集.(事实上,定理 4.1.6 是这个习题的特殊情形.)

11. 设 A 是连通空间 X 中的一个非空的真子集. 证明:$\partial(A)\neq\varnothing$.

12. 设 Y 是一个离散空间,并且含有不止一个点. 证明:拓扑空间 X 是连通的当且仅当每一个连续映射 $f:X\to Y$ 都是常值映射.

13. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f:X\to Y$ 是一个连续映射. 证明:如果 Z 是 X 的一个连通子集,则 $f(Z)$ 是 Y 的一个连通子集.

14. 证明:欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中所有至少有一个坐标为有理数的点构成的集合是一个连通子集.

15. 在欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中令 A 是所有第二个坐标为有理数的点构成的集合,B 是所有第一个坐标为 0 的点构成的集合. 证明:A 是不连通子集,$A\cup B$ 是连通子集.

16. 在欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 中令

$$L_{\frac{1}{n}}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x-\frac{1}{n}y=0\},\ n=1,2,\cdots$$

$$L_0=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\in\mathbb{R}\}$$

证明:对于任何 $A\subset L_0$, $A\neq\varnothing$,子集 $A\cup(\bigcup_{n=1,2,\cdots}L_{\frac{1}{n}})$ 是连通的.

17. 证明:如果积空间 $X_1\times X_2$ 是一个连通空间,则它的坐标空间 X_1 和 X_2 都是连通空间.

18. 设 Y 和 Z 都是拓扑空间 X 的子集,其中 Y 是连通的. 证明:如果 $Z\cap Y\neq\varnothing$ 和 $Z\cap Y'\neq\varnothing$,则 $Z\cap\partial(Y)\neq\varnothing$.

§4.2　连通性的某些简单应用

让我们回忆实数集合$\mathbb{R}$中区间的精确定义:$\mathbb{R}$的子集E称为一个区间,如果它至少包含两个点,并且如果$a,b\in E$,$a<b$,则有

$$[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}\subset E$$

读者熟知,实数集合$\mathbb{R}$中的区间共有以下九类:

$$(-\infty,\infty),(a,\infty),[a,\infty),(-\infty,a),(-\infty,a]$$
$$(a,b),(a,b],[a,b),[a,b]$$

因为,一方面以上九类集合中的每一个显然都是区间;另一方面,如果$E\subset\mathbb{R}$是一个区间,可视E有无上(下)界,以及在有上(下)界的情形下视其上(下)确界是否属于E,而将E归入以上九类之一.

在定理4.1.2中我们证明了实数空间$\mathbb{R}$是一个连通空间.由于区间(a,∞),$(-\infty,a)$和(a,b)都同胚于$\mathbb{R}$(请读者自己写出必要的同胚映射),所以这些区间也都是连通的;由于

$$\overline{(a,\infty)}=[a,\infty),\overline{(-\infty,a)}=(-\infty,a]$$
$$(a,b)\subset[a,b)\subset[a,b],(a,b)\subset(a,b]\subset[a,b]$$

根据定理4.1.5可见区间$[a,\infty)$,$(-\infty,a]$,$[a,b)$,$(a,b]$和$[a,b]$都是连通的.

另一方面,假设E是$\mathbb{R}$的一个子集,并且它包含着不少于两个点.如果E不是一个区间,则存在$a,b\in\mathbb{R}$,$a<b$,使得$[a,b]\not\subset E$,也就是说,存在$a<c<b$使得$c\notin E$;从而,若令

$$A=(-\infty,c)\cap E,B=(c,\infty)\cap E$$

则可见A和B都是E的非空开集,并且有$A\cup B=E$和$A\cap B=\varnothing$,因此E不连通.

综合以上两个方面,我们已经证明了:

定理 4.2.1 设 E 是实数空间$\mathbb{R}$ 的一个子集. E 是包含着不少于两个点的一个连通子集当且仅当 E 是一个区间. ■

定理 4.2.2 设 X 是一个连通空间, $f:X\to\mathbb{R}$ 是一个连续映射. 则 $f(X)$是$\mathbb{R}$ 中的一个区间.

因此,如果 $x,y\in X$,则对于 $f(x)$与 $f(y)$之间的任何一个实数 t(即当 $f(x)\leqslant f(y)$时, $f(x)\leqslant t\leqslant f(y)$; 当 $f(y)\leqslant f(x)$时, $f(y)\leqslant t\leqslant f(x)$),存在 $z\in X$ 使得 $f(z)=t$.

证明 这个定理的第一段是定理 4.1.8 和定理 4.2.1 的明显推论. 以下证明第二段. 设 $x,y\in X$. 如果 $f(x)=f(y)$,则没有什么要证明的. 现在设 $f(x)\neq f(y)$,并且不失一般性,设 $f(x)<f(y)$. 由于 $f(X)$是一个区间,所以$[f(x),f(y)]\subset f(X)$. 因此对于任何 t, $f(x)\leqslant t\leqslant f(y)$,有 $t\in f(X)$,所以存在 $z\in X$ 使得 $f(z)=t$. ■

根据定理 4.2.2,立即可以推出数学分析中的介值定理和不动点定理.

定理 4.2.3 [介值定理]设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是从闭区间$[a,b]$到实数空间$\mathbb{R}$ 的一个连续映射. 则对于 $f(a)$与 $f(b)$之间的任何一个实数 r,存在 $z\in[a,b]$使得 $f(z)=r$. ■

定理 4.2.4 [不动点定理]设 $f:[0,1]\to[0,1]$是一个连续映射. 则存在 $z\in[0,1]$使得 $f(z)=z$.

证明 如果 $f(0)=0$ 或者 $f(1)=1$,则定理显然成立. 下设 $f(0)>0$ 和 $f(1)<1$. 定义映射 $F:[0,1]\to\mathbb{R}$ 使得对于任何 $x\in[0,1]$有 $F(x)=x-f(x)$. 容易验证 F 是一个连续映射,并且这时有 $F(0)<0$ 和 $F(1)>0$. 因此根据介值定理可见存在 $z\in[0,1]$使得 $F(z)=0$,即 $f(z)=z$. ■

容易证明欧氏平面$\mathbb{R}^2$ 中的单位圆周 $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2=1\}$是连通的. 这是因为如果定义映射 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ 使得对于任意 $t\in\mathbb{R}$ 有 $f(t)=(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)\in S^1$,则易于验证 f 是一个连续映射,并且 $f(\mathbb{R})=S^1$. 因此 S^1 是连通空间$\mathbb{R}$ 在一个连续映

射下的象，所以它是连通的.

设 $x=(x_1,x_2)\in S^1$. 点 $-x=(-x_1,-x_2)\in S^1$ 称为点 x 的**对径点**. 映射 $r:S^1\to S^1$ 使得任何 $x\in S^1$ 有 $r(x)=-x$，称为**对径映射**. 对径映射是一个连续映射，因为它是欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 到自身的反射 $l:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 在单位圆周上的限制. 其中，映射 l 定义为对于任何 $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ 有 $l(x)=-x=(-x_1,-x_2)$，容易验证(请读者自行验证)是一个连续映射.

定理 4.2.5　[Borsuk－Ulam 定理]设 $f:S_1\to\mathbb{R}$ 是一个连续映射. 则在 S^1 中存在一对对径点 x 和 $-x$，使得 $f(x)=f(-x)$.

证明　定义映射 $F:S^1\to\mathbb{R}$ 使得对于任何 $x\in S^1$ 有 $F(x)=f(x)-f(-x)$. 容易证明 F 是一个连续映射.(请读者自补证明)如果存在 $a\in S^1$ 使得 $f(a)\neq f(-a)$，则 $F(a)$ 与 $F(-a)$ 是具有相反的符号的两个非 0 实数. 所以根据定理 4.2.2，存在 $z\in S^1$ 使得 $F(z)=0$，即 $f(z)=f(-z)$.　■

我们已经知道 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是连通空间，下面进一步指出：

定理 4.2.6　$n>1$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集 $\mathbb{R}^n-\{0\}$ 是一个连通子集，其中 $0=(0,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$.

证明　我们只证明 $n=2$ 的情形. 根据定理 4.1.9，$\mathbb{R}^2$ 中的子集 $(-\infty,0)\times\mathbb{R}$ 和 $(0,\infty)\times\mathbb{R}$ 都是连通的. 由于

$$(0,\infty)\times\mathbb{R}\subset[0,\infty)\times\mathbb{R}-\{0\}\subset[0,\infty)\times\mathbb{R}=\overline{(0,\infty)\times\mathbb{R}}$$

所以根据定理 4.1.5，$\mathbb{R}^2$ 中的子集 $A=[0,\infty)\times\mathbb{R}-\{0\}$ 是连通的；同理，子集 $B=(-\infty,0]\times\mathbb{R}-\{0\}$ 也是连通的. 由于 $A\cap B\neq\varnothing$ 以及 $A\cup B=\mathbb{R}^2-\{0\}$，所以根据定理 4.1.6 可见，$\mathbb{R}^2-\{0\}$ 是连通的.

一般情形的证明类似，请读者自行补证.　■

定理 4.2.6 可以得到进一步的改善.(参见习题第 4 题.)

定理 4.2.7　欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 和实数空间 $\mathbb{R}$ 不同胚.

证明　假设 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}$ 同胚，并且设 $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是一个同胚. 因

此对于连续映射

$$\psi=\varphi|_{\mathbb{R}^2-\{0\}}:\mathbb{R}^2-\{0\}\to\mathbb{R}$$

我们有 $\psi(\mathbb{R}^2-\{0\})=\mathbb{R}-\{\varphi(0)\}$. 但根据定理 4.2.6, $\mathbb{R}^2-\{0\}$ 是连通的，而根据定理 4.2.1, $\mathbb{R}-\{\varphi(0)\}$ 是不连通的. 这与定理 4.1.8 矛盾. ■

定理 4.2.7 给出了利用拓扑不变性质判定两个空间不同胚的第一个实例.

定理 4.2.4, 定理 4.2.5 和定理 4.2.7 尽管简单但确有意思，特别是这几个定理都有高维"版本"，我们分别陈述如下：

定理 4.2.8 [Brouwer 不动点定理] 设 $f:D^n\to D^n$ 是一个连续映射，其中 D^n 是 n 维球体. 则存在 $z\in D^n$ 使得 $f(z)=z$.

定理 4.2.9 [Borsuk－Ulam 定理] 设 $f:S^n\to\mathbb{R}^l$ 是一个连续映射，其中 $n\geq l$，则存在 $x\in S^n$ 使得 $f(x)=f(-x)$.

定理 4.2.10 如果 $n\neq l$，则欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^l$ 不同胚.

这些定理的证明(除去我们已经证明过的情形)一般都需要代数拓扑知识，例如同调论或同伦论，请参阅有关的专门书籍.

习 题

1. 将实数空间 $\mathbb{R}$ 中的所有区间进行同胚分类，使得属于同一类的任何两个区间同胚，不同类的两个区间不同胚. 这种区间的同胚类一共有多少个?

2. 证明：$n\geq1$ 维球面 S^n，开球体 D^n，闭球体 E^n，开方体 $(a,b)^n$，闭方体 $[a,b]^n$ (有关定义见 §2.1) 都是连通的.

3. 证明：$n\geq2$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 和 $n\geq1$ 维球面 S^n 都不能嵌入到实数空间 $\mathbb{R}$ 中去.

4. 设 A 是 $n\geq2$ 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个可数子集. 证明：$\mathbb{R}^n-A$ 是连通的.

5. 设 A 是 $n\geq2$ 维球面 S^n 的一个可数子集. 证明：S^n-A 是连通的.

6. 设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 是一个连续映射. 证明：在 $\mathbb{R}$ 中最多存在 2 个点，它的 f 原象是非空的可数集.

7. 设 $\xi: S^1 \to S^1$ 是一个同胚,满足条件:对于任何 $x \in S^1$ 有 $\xi(\xi(x)) = x$.证明:对于任何一个连续映射 $f: S^1 \to \mathbb{R}$,存在点 $z \in S^1$ 使得 $f(z) = f(\xi(z))$.(这个结论加强了定理 4.2.5.)

§4.3 连通分支

从前面两节中的内容可以看出,知道一个拓扑空间是否连通给我们处理一些问题带来很大的方便.这导致我们去考察一个我们并不知道是否连通的拓扑空间中的"最大"连通子集(即连通分支).

定义 4.3.1 设 X 是一个拓扑空间,$x, y \in X$.如果 X 中有一个连通子集同时包含 x 和 y,我们则称点 x 和 y 是**连通的**.

根据定义可见,如果 x, y, z 都是拓扑空间 X 中的点,则

(1) x 和 x 连通(因为每一个单点集都是连通子集);

(2) 如果 x 和 y 连通,则 y 和 x 也连通;(显然)

(3) 如果 x 和 y 连通,并且 y 和 z 连通,则 x 和 z 连通.

(这是因为,这时存在 X 中的连通子集 A 和 B 使得 $x, y \in A$ 和 $y, z \in B$.从而由于 $y \in A \cap B$ 可见 $A \cup B$ 连通,并且 $x, z \in A \cup B$.因此 x 和 z 连通.)

以上结论归结为:拓扑空间中点的连通关系是一个等价关系.

定义 4.3.2 设 X 是一个拓扑空间.对于 X 中的点的连通关系而言的每一个等价类称为拓扑空间 X 的一个**连通分支**.

如果 Y 是拓扑空间 X 的一个子集.Y 作为 X 的子空间的每一个连通分支称为 X 的子集 Y 的一个**连通分支**.

拓扑空间 $X \neq \varnothing$ 的每一个连通分支都不是空集;X 的不同的连通分支无交;以及 X 的所有连通分支之并便是 X 本身.此外,$x, y \in X$ 属于 X 的同一个连通分支当且仅当 x 和 y 连通.

拓扑空间 X 的子集 A 中的两个点 x 和 y 属于 A 的同一个连

通分支当且仅当A有一个连通子集同时包含点x和y.

定理 4.3.1 设X是一个拓扑空间,C是拓扑空间X的一个连通分支.则

(1) 如果Y是X的一个连通子集,并且$Y\cap C\neq\varnothing$,则$Y\subset C$;

(2) C是一个连通子集;

(3) C是一个闭集.

本定理中的条件(1)和(2)说明,拓扑空间的每一个连通分支都是X的一个最大的连通子集.

证明 (1)任意选取$x\in Y\cap C$.对于任何$y\in Y$由于x和y连通,故$y\in C$.这证明$Y\subset C$.

(2) 对于任何$x,y\in C$,根据定义可见,存在X的一个连通子集Y_{xy}使得$x,y\in Y_{xy}$.显然$Y_{xy}\cap C\neq\varnothing$,故根据(1),$Y_{xy}\subset C$.应用定理4.1.7可知,$C$是连通的.

(3) 由于C连通,根据定理4.1.5,$\overline{C}$连通.显然,$\overline{C}\cap C=C\neq\varnothing$.所以根据(1),$\overline{C}\subset C$.因此$C=\overline{C}$.从而$C$是一个闭集. ■

但是,一般说来连通分支可以不是开集.例如考虑有理数集$\mathbb{Q}$(作为实数空间$\mathbb{R}$的子空间).设$x,y\in\mathbb{Q}$,$x\neq y$.不失一般性,设$x<y$.如果$\mathbb{Q}$的一个子集E同时包含x和y,令$A=(-\infty,r)\cap E$和$B=(r,\infty)\cap E$,其中r是任何一个无理数,$x<r<y$.此时易见A和B都是$\mathbb{Q}$的非空开集,并且$E=A\cup B$.因此E不连通.以上论述说明E中任何一个包含着多于两个点的集合都是不连通的,也就是说,$\mathbb{Q}$的连通分支都是单点集.然而易见$\mathbb{Q}$中的每一个单点集都不是开集.

习 题

1. 设X是一个拓扑空间,$x,y\in X$是连通的.证明:如果E是一个既开又闭的子集,则或者$x,y\in E$或者$x,y\notin E$.(此命题的逆命题不成立,见下

题.)

2. 在欧氏平面$\mathbb{R}^2$中令

$$Y_n=\{\frac{1}{n}\}\times[0,1],n=1,2,\cdots$$

$$Y=(\bigcup_{n=1,2,\cdots}Y_n)\cup\{(0,0),(0,1)\}$$

(注意,本题中$[0,1]$表示闭区间,而$(0,0)$和$(0,1)$却表示$\mathbb{R}^2$中的点.)证明:

(1) 单点集$\{(0,0)\}$和$\{(0,1)\}$都是Y的连通分支,因此点$(0,0)$和$(0,1)$不是连通的;

(2) 如果E是Y的一个既开又闭的子集,则点$(0,0)$和$(0,1)$或者同时属于E或者同时不属于E.

3. 证明:一个拓扑空间的任何一个既开又闭的连通子集必定是这个拓扑空间的一个连通分支.

4. 设拓扑空间X只有有限个连通分支.证明:X的每一个连通分支都是X的既开又闭的子集.

5. 设X是一个拓扑空间,$G\subset X$是一个开集,E是G的一个连通分支.证明:$\partial(E)\subset\partial(G)$.

6. 设X是一个拓扑空间,$G\subset X$是一个连通开集.证明:G是$X-\partial(G)$的一个连通分支.

7. 设X和Y是两个拓扑空间.分别记$x\in X$和$y\in Y$在拓扑空间X和Y中所属的连通分支为$C(x)$和$D(y)$.设$f:X\to Y$是一个连续映射.定义映射

$$\tilde{f}:\{C(x)\mid x\in X\}\to\{D(y)\mid y\in Y\}$$

使得对于任何$x\in X$,$\tilde{f}(C(x))=D(f(x))$.证明:

(1) 映射$\tilde{f}$的定义是合理的,即如果$x_1,x_2\in X$使得$C(x_1)=C(x_2)$,则$D(f(x_1))=D(f(x_2))$;

(2) 如果f是一个同胚,则$\tilde{f}$是一个一一映射.

8. 在欧氏平面$\mathbb{R}^2$中令$Y=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2\mid y\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\mid x\in\mathbb{R}\}$,证明:$Y$与实数空间$\mathbb{R}$不同胚.

§4.4 局部连通空间

引进新的概念之前,我们先来考察一个例子.

例 4.4.1 在欧氏平面$\mathbb{R}^2$中令 $S=\{(x,\sin\frac{1}{x})\mid x\in(0,1]\}$ 和 $T=\{0\}\times[-1,1]$. 其中 S 被称作**拓扑学家的正弦曲线**,它是区间$(0,1]$在一个连续映射下的象,因此是连通的. 此外,也容易验证$\overline{S}=S\cup T$,因此 $S_1=S\cup T$ 也是连通的. 尽管如此,倘若我们查看 S_1 中的点,容易发现它们明显地分为两类:S 中的每一个点的任何一个"较小的"邻域中都包含着一个连通的邻域,而 T 中的每一个点的任何一个邻域都是不连通的. 我们用以下的术语将这两个类型的点区别开来.

定义 4.4.1 *设 X 是一个拓扑空间,$x\in X$. 如果 x 的每一个邻域 U 中都包含着 x 的某一个连通的邻域 V,则称拓扑空间 X 在点 x 处是***局部连通的**.

*如果拓扑空间 X 在它的每一个点处都是局部连通的,则称 X 是一个***局部连通空间**.

回到例 4.4.1 中所定义的拓扑空间 S_1. 容易证明,S_1 在其属于 S 的每一个点处是局部连通的,而在其属于 T 的每一个点处都不是局部连通的. 也因此,尽管 S_1 是一个连通空间,但它却不是一个局部连通的空间.

局部连通的拓扑空间也不必是连通的. 例如,每一个离散空间都是局部连通空间,但包含着多于两个点的离散空间却不是连通空间. 又例如,n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的任何一个开子空间都是局部连通的(这是因为每一个球形邻域都同胚于整个欧氏空间$\mathbb{R}^n$,因而是连通的),特别,欧氏空间$\mathbb{R}^n$本身是局部连通的. 另一方面,欧氏空间$\mathbb{R}^n$中由两个无交的非空开集的并作为子空间就一定不是连通的(请读者自己证明).

此外根据定义立即可见:拓扑空间 X 在点 $x\in X$ 处是局部连通的当且仅当 x 的所有连通邻域构成点 x 处的一个邻域基.

定理 4.4.1 *设 X 是一个拓扑空间. 则以下条件等价:*

(1) *X 是一个局部连通空间;*

(2) X 的任何一个开集的任何一个连通分支都是开集；

(3) X 有一个基，它的每一个元素都是连通的.

证明 (1)蕴涵(2). 设 C 是 X 的一个开集 U 的一个连通分支. 如果 $x\in C$，由于 U 是 x 的一个邻域，所以当(1)成立时 x 有一个连通邻域 V 包含于 U. 又由于 $V\cap C$ 包含着点 x 所以不是空集，根据定理 4.3.1 可见 $V\subset C$. 因此 C 是点 x 的一个邻域. 这证明 C 是属于它的任何一个点 x 的邻域，因此 C 是一个开集.

(2) 蕴涵(3). 若(2)成立，则 X 的所有开集的所有连通分支(它们都是开集)构成的集族，由于每一个集合是它的所有连通分支之并，恰是 X 的一个基.

(3) 蕴涵(1). 显然. ■

我们常用到定理 4.4.1 的一个推论：局部连通空间的每一个连通分支都是开集.

定理 4.4.2 设 X 和 Y 都是拓扑空间，其中 X 是局部连通的. 又设 $f:X\to Y$ 是一个连续开映射. 则 $f(X)$ 是一个局部连通空间.

证明 根据定理 4.4.1，可设 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个基，其中的每一个元素都是连通的. 对于每一个 $B\in\mathscr{B}$，集合 $f(B)$ 是连通的，并且由于 f 是一个开映射，$f(B)$ 是 Y 中的一个开集，因此也是 $f(X)$ 的一个开集. 这证明集族 $\widetilde{\mathscr{B}}=\{f(B)\mid B\in\mathscr{B}\}$ 是一个由 $f(X)$ 的连通开集构成的族. 我们指出 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 是 $f(X)$ 的一个基，这是因为，如果 U 是 $f(X)$ 中的一个开集，则 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的一个开集，因此存在 $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}$ 使得 $f^{-1}(U)=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}B$，于是

$$U=f(f^{-1}(U))=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}f(B)$$

是 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 中某些元素之并. 于是根据定理 4.4.1 可知 $f(X)$ 是局部连通的. ■

根据定理 4.4.2 易见，拓扑空间的局部连通性是一个拓扑不变性质.

定理 4.4.3 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 $n \geqslant 1$ 个局部连通空间. 则积空间 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 也是局部连通空间.

证明 我们只要对 $n=2$ 的情形给出证明(参见§4.1).

根据定理 4.4.1 可设 $\mathscr{B}_1$ 和 $\mathscr{B}_2$ 分别是 X_1 和 X_2 的基,它们的元素分别是 X_1 和 X_2 的连通开集. 根据定理 3.2.4,集族 $\widetilde{\mathscr{B}} = \{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathscr{B}_1, B_2 \in \mathscr{B}_2\}$是积空间 X 的一个基. 对于任何 $B_1 \in \mathscr{B}_1$ 和 $B_2 \in \mathscr{B}_2$,由于它们都是连通的,所以根据定理 4.1.9,集合 $B_1 \times B_2$ 也是连通的. 因此积空间 X 有一个基 $\widetilde{\mathscr{B}}$,其每一个元素都是连通的. 根据定理 4.4.1,积空间 X 是一个局部连通空间. ■

应用这些定理,有些事情说起来就会简单得多. 例如,实数空间$\mathbb{R}$ 由于所有的开区间构成它的一个基,所以它是局部连通的;n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 是 n 个$\mathbb{R}$ 的积空间,所以它也是局部连通的. 当然这些事情我们早就知道了.

习 题

1. 设 X 是一个拓扑空间. 证明:X 是局部连通空间当且仅当如果 $x \in X$ 并且 U 是 x 的一个邻域,则 U 的包含 x 的连通分支是 x 的一个邻域.

2. 证明:任何一个有限补空间和任何一个可数补空间都是局部连通空间.

3. 证明:局部连通空间的任何一个开集作为子空间是一个局部连通空间.

§4.5 道路连通空间

较之于连通空间的概念,道路连通空间这个概念似觉更符合我们的直觉因而易于理解些. 我们先定义"道路".

定义 4.5.1 设 X 是一个拓扑空间. 从单位闭区间$[0,1]$到

X 的每一个连续映射 $f:[0,1]\to X$ 叫做 X 中的一条**道路**，并且此时 $f(0)$ 和 $f(1)$ 分别称为道路 f 的**起点**和**终点**. 当 $x=f(0)$ 和 $y=f(1)$ 时，称 f 是 X 中从 x 到 y 的一条道路. 起点和终点相同的道路称为**闭路**，并且这时，它的起点(也是它的终点)称为闭路的**基点**.

如果 f 是 X 中的一条道路，则道路 f 的象集 $f([0,1])$ 称为 X 中的一条**曲线**或**弧**，并且这时道路 f 的起点和终点也分别称为曲线 $f([0,1])$ 的**起点**和**终点**.

或许应当提醒读者，"道路"这个词在这里所表达的意思已经与我们对它原有的理解颇有不同，希望读者不要因此而混淆了我们在这里严格定义的道路和曲线这两个不同的概念.

定义 4.5.2 设 X 是一个拓扑空间. 如果对于任何 x,y，存在着 X 中的一条从 x 到 y 的道路(或曲线)，我们则称 X 是一个**道路连通空间**. X 中的一个子集 Y 称为 X 中的一个**道路连通子集**，如果它作为 X 的子空间是一个道路连通空间.

实数空间 $\mathbb{R}$ 是道路连通的. 这是因为如果 $x,y\in\mathbb{R}$，则连续映射 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ 定义为对于任何 $t\in[0,1]$ 有 $f(t)=x+t(y-x)$，便是 $\mathbb{R}$ 中的一条以 x 为起点以 y 为终点的道路. 也容易验证任何一个区间都是道路连通的.

定理 4.5.1 如果拓扑空间 X 是一个道路连通空间，则 X 必然是一个连通空间.

证明 对于任何 $x,y\in X$，由于 X 道路连通，故存在从 x 到 y 的一条道路 $f:[0,1]\to X$. 这时曲线 $f([0,1])$，作为连通空间 $[0,1]$ 在连续映射下的象，是 X 中的一个连通子集，并且我们有 $x,y\in f([0,1])$. 因此根据定理 4.1.7 可见 X 是一个连通空间.

■

连通空间可以不是道路连通的. 我们已经指出例 4.4.1 中的 S_1 是一个连通空间. 不难证明(留作习题，见习题第 3 题)它不是道路连通的.

道路连通与局部连通之间更没有必然的蕴涵关系.例如离散空间都是局部连通的,然而包含着多于两个点的离散空间不是连通空间,当然也就不是道路连通空间了.

定理 4.5.2 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,其中 X 是道路连通的,$f:X\to Y$ 是一个连续映射.则 $f(X)$ 是道路连通的.

证明 设 $y_1,y_2\in f(X)$.任意选取 $x_1,x_2\in X$ 使得 $f(x_1)=y_1$ 和 $f(x_2)=y_2$.由于 X 是道路连通的,故 X 中有从 x_1 到 x_2 的一条道路 $g:[0,1]\to X$.易见,映射 $h:[0,1]\to f(X)$,定义为对于任意 $t\in[0,1]$ 有 $h(t)=f\circ g(t)$,是 $f(X)$ 中从 y_1 到 y_2 的一条道路.这证明 $f(X)$ 是道路连通的. ■

根据定理 4.5.2 可见,空间的道路连通性是一个拓扑不变性质,也是一个可商性质.

定理 4.5.3 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 $n\geqslant1$ 个道路连通空间.则积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 也是道路连通空间.

证明 我们只需要对 $n=2$ 的情形加以证明.(参见 §4.1.)设 $x=(x_1,x_2)$,$y=(y_1,y_2)\in X_1\times X_2$.对于 $i=1,2$,由于 X_i 是道路连通空间,故在 X_i 中有从 x_i 到 y_i 的一条道路 $f_i:[0,1]\to X_i$.定义映射 $f:[0,1]\to X_1\times X_2$,使得对于任何 $t\in[0,1]$ 有 $f(t)=(f_1(t),f_2(t))$.容易验证(应用定理 3.2.7)f 是连续的.并且有 $f(0)=x$ 和 $f(1)=y$.这也就是说 f 是 $X_1\times X_2$ 中从 x 到 y 的一条道路.这证明 $X_1\times X_2$ 是一个道路连通空间. ■

作为定理 4.5.3 的一个直接的推论立即可见:n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是一个道路连通空间.(这个结论也容易直接验证.)

为了今后的需要我们证明以下引理.

定理 4.5.4 [黏结引理]设 A 和 B 是拓扑空间 X 中的两个开集(闭集),并且有 $X=A\cup B$.又设 Y 是一个拓扑空间,$f_1:A\to Y$ 和 $f_2:B\to Y$ 是两个连续映射,满足条件:

$$f_{1|A\cap B}=f_{2|A\cap B}$$

定义映射 $f:X\to Y$ 使得对于任何 $x\in X$，

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x) & 如果\ x\in A\\ f_2(x) & 如果\ x\in B\end{cases}$$

则 f 是一个连续映射.

证明 首先注意，由于 $f_{1|A\cap B}=f_{2|A\cap B}$，映射 f 的定义是确切的.因为当 $x\in A\cap B$ 时，有 $f_1(x)=f_2(x)$.

其次，我们有：对于 Y 的任何一个子集 Z 有

$$f^{-1}(Z)=f_1^{-1}(Z)\cup f_2^{-1}(Z)$$

这是由于 $f_1^{-1}(Z)=f^{-1}(Z)\cap A$ 和 $f_2^{-1}(Z)=f^{-1}(Z)\cap B$.

现在设 U 是 Y 的一个开集.由于 f_1 和 f_2 都连续，所以 $f_1^{-1}(U)$ 和 $f_2^{-1}(U)$ 分别是 A 和 B 的开集.然而 A 和 B 都是 X 的开集，所以 $f_1^{-1}(U)$ 和 $f_2^{-1}(U)$ 也都是 X 的开集.因此 $f^{-1}(U)=f_1^{-1}(U)\cup f_2^{-1}(U)$ 是 X 的一个开集.这便证明了 f 是一个连续映射.

当 A 和 B 都是 X 的闭集时，证明是完全类似的. ■

我们现在按建立连通分支概念完全类似的方式建立道路连通分支的概念.

定义 4.5.3 设 X 是一个拓扑空间，$x,y\in X$.如果 X 中有一条从 x 到 y 的道路，我们则称点 x 和 y 是**道路连通的**.

根据定义可见，如果 x,y,z 都是拓扑空间 X 中的点，则

(1) x 和 x 道路连通；(因为取常值 x 的映射 $f:[0,1]\to X$（它必然是连续的）便是一条从 x 到 x 的道路.)

(2) 如果 x 和 y 连通，则 y 和 x 也连通；(设 $f:[0,1]\to X$ 是 X 中从 x 到 y 的一条道路.定义映射 $\tilde{f}:[0,1]\to X$，使得对于任何 $t\in[0,1]$ 有 $\tilde{f}(t)=f(1-t)$.容易验证 $\tilde{f}$ 是一条从 y 到 x 的道路.)

(3) 如果 x 和 y 连通，并且 y 和 z 连通，则 x 和 z 连通.（设 $f_1,f_2:[0,1]\to X$ 分别是 X 中从 x 到 y 和从 y 到 z 的道路. 定义映射 $f:[0,1]\to X$ 使得对于任何 $t\in[0,1]$,

$$f(t)=\begin{cases} f_1(2t) & \text{如果 } t\in[0,\frac{1}{2}] \\ f_2(2t-1) & \text{如果 } t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

应用黏结引理立即可见 f 是连续的，此外我们有 $f(0)=f_1(0)=x$ 和 $f(1)=f_2(1)=z$. 因此 f 是从 x 到 z 的一条道路.）

以上结论归结为：拓扑空间中点的道路连通关系是一个等价关系.

定义 4.5.4 设 X 是一个拓扑空间. 对于 X 中的点的道路连通关系而言的每一个等价类称为拓扑空间 X 的一个**道路连通分支**.

如果 Y 是拓扑空间 X 的一个子集. Y 作为 X 的子空间的每一个道路连通分支称为 X 的子集 Y 的一个**道路连通分支**.

拓扑空间 $X\neq\varnothing$ 的每一个道路连通分支都不是空集；X 的不同的道路连通分支无交；以及 X 的所有道路连通分支之并便是 X 本身. 此外，$x,y\in X$ 属于 X 的同一个道路连通分支当且仅当 x 和 y 道路连通.

拓扑空间 X 的子集 A 中的两个点 x 和 y 属于 A 的同一个道路连通分支的充分必要条件是 A 中有一条从 x 到 y 的道路.

根据定义易见，拓扑空间中每一个道路连通分支都是一个道路连通子集；根据定理 4.5.1，它也是一个连通子集；又根据定理 4.3.1，它必然包含在某一个连通分支之中.

作为定理 4.5.1 在某种特定情形下的一个逆命题，我们有下述定理：

定理 4.5.5 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的任何一个连通开集都是道路连通的.

证明 首先我们注意 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的任何一个球形邻域都是道路连通的，这是因为它同胚于 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$本身.

现在证明 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的任何一个开集的任何一个道路连通分支都是一个开集：设 U 是$\mathbb{R}^n$的一个开集，C 是 U 的一个道路连通分支. 设 $x\in C$. 由于 U 是一个包含 x 的开集，所以也包含着以 x 为中心的某一个球形邻域$B(x,\epsilon)$. 由于球形邻域 $B(x,\epsilon)$是道路连通的，并且 $B(x,\epsilon)\cap C$ 包含着 x，故非空. 这导致 $B(x,\epsilon)\subset C$. 所以 C 是一个开集.

现在设 V 是$\mathbb{R}^n$的一个连通开集. 如果 $V=\varnothing$，则没有什么要证明的. 下设 V 非空. V 是它的所有道路连通分支的无交并，根据前一段中的结论，每一个道路连通分支都是开集. 因此如果 V 有多于一个道路连通分支，易见这时 V 可以表示为两个无交的非空开集之并，因此 V 是不连通的，这与假设矛盾. 因此 V 只可能有一个道路连通分支，也就是说 V 是道路连通的. ■

推论 4.5.6 *n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中任何开集的每一个道路连通分支同时也是它的一个连通分支.*

证明 由于 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$是一个局部连通空间，根据定理 4.4.1，它的任何开集的任何连通分支都是开集. 根据定理 4.5.5，$\mathbb{R}^n$的任何开集的任何连通分支都是道路连通的，因此包含于这个开集的某一个道路连通分支之中. 另一方面，任何一个集合的道路连通分支，由于它是连通的，所以包含于这个集合的某一个连通分支之中. 因此，本推论的结论成立. ■

通过引进局部道路连通的概念，定理 4.5.5 和推论 4.5.6 的结论可以得到推广.（参见习题 5.）

习 题

1. 设 A 是实数空间$\mathbb{R}$中的一个子集. 证明：A 是连通的当且仅当 A 是道路连通的.

2. 证明:$n\geqslant 1$ 维单位球面 S^n 是道路连通的.

3. 证明:例 4.4.1 中的拓扑空间 S_1 不是道路连通空间.

4. 设 X 是一个拓扑空间,$\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是由 X 中道路连通的子集所构成的一个族. 证明:如果集族 $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 满足条件:对于任意 $\alpha,\beta\in\Gamma$,存在 Γ 中有限个元素 $\gamma_1=\alpha,\gamma_2,\cdots,\gamma_n,\gamma_{n+1}=\beta$ 使得

$$Y_i\cap Y_{i+1}\neq\varnothing \qquad i=1,2,\cdots,n$$

则 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$ 是 X 中的一个道路连通子集.

5. 设 X 是一个拓扑空间. 如果对于任何 $x\in X$ 和 x 的任何一个邻域 U,存在 x 的一个道路连通的邻域 V 使得 $V\subset U$,则称拓扑空间 X 是一个**局部道路连通空间**. X 的一个子集称为是**局部道路连通的**,如果它作为 X 的子空间是一个局部道路连通的空间. 证明:

(1) 每一个局部道路连通空间都是一个局部连通空间;

(2) 如果 $f:X\to Y$ 是从局部道路连通空间 X 到拓扑空间 Y 的一个连续开映射,则 $f(X)$ 是局部道路连通的;

(3) 如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个局部道路连通空间,则积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是一个局部道路连通空间;

(4) 局部道路连通空间 X 中的一个开集 U 是 X 中的一个道路连通子集当且仅当 U 是 X 中的一个连通子集.

6. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$\mathscr{A}$ 是由 X 中的开集构成的一个集族,使得 $\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A=X$. 证明:映射 $f:X\to Y$ 是连续的当且仅当对于每一个 $A\in\mathscr{A}$,映射 $f|_A:A\to Y$ 是连续的.

第 5 章　有关可数性的公理

§5.1　第一与第二可数性公理

从§2.6 中的讨论可知，基和邻域基对于确定拓扑空间的拓扑和验证映射的连续性都有着重要的意义，它们的元素的“个数”越少，讨论起来越是方便．因此我们试图对拓扑空间的基或邻域基的元素“个数”加以限制，但又希望加了限制的拓扑空间仍能包容绝大多数常见的拓扑空间，如欧氏空间，度量空间等．以下的讨论表明，将基或邻域基的元素“个数”限定为可数是恰当的．

某拓扑空间的一个基或在某一点处的一个邻域基，如果是一个可数族，我们则分别简称之为一个**可数基**和一个**可数邻域基**．

定义 5.1.1　一个拓扑空间如果有一个可数基，则称这个拓扑空间是一个**满足第二可数性公理的空间**，或简称为 A_2 空间．

定理 5.1.1　实数空间$\mathbb{R}$满足第二可数性公理．

证明　令 $\mathscr{B}$ 为所有以有理数为它的两个端点的开区间构成的族．显然，$\mathscr{B}$ 是一个可数族．

设 U 是$\mathbb{R}$中的一个开集．对于每一个 $x\in U$，存在实数 $\varepsilon_x>0$ 使得以 x 为中心以 ε_x 为半径的球形邻域

$$B(x,\varepsilon_x)=(x-\varepsilon_x,x+\varepsilon_x)$$

包含于 U．选取有理数 a_x 和 b_x 使得

$$x-\varepsilon_x<a_x<x<b_x<x+\varepsilon_x$$

于是我们有 $(a_x,b_x)\subset U$．于是 $U=\bigcup_{x\in U}(a_x,b_x)$，这也就是说

U 可以表示为 $\mathscr{B}$ 中的某些元素之并. 这就证明了 $\mathscr{B}$ 是 $\mathbb{R}$ 的一个基.

$\mathbb{R}$ 有可数基 $\mathscr{B}$, 所以 $\mathbb{R}$ 满足第二可数性公理. ■

由于离散空间中的每一个单点子集都是开集, 而一个单点集不能表为异于自身的非空集合的并, 因此离散空间的每一个基必定包含着它的所有单点子集. 所以包含着不可数多个点的离散空间是不满足第二可数性公理的空间.

定义 5.1.2 一个拓扑空间如果在它的每一点处有一个可数邻域基, 则称这个拓扑空间是一个**满足第一可数性公理的空间**或简称为 **A_1 空间**.

定理 5.1.2 每一个度量空间都满足第一可数性公理.

证明 设 X 是一个度量空间, $x\in X$. 则所有以 x 为中心以有理数为半径的球形邻域构成 x 处的一个可数邻域基. ■

例 5.1.1 不满足第一可数性公理的空间的例子.

设 X 是包含着不可数多个点的可数补空间. 我们证明 X 在它的任何一点处都没有可数邻域基. 因此 X 不满足第一可数性公理.

用反证法来证明这一点. 设 X 在点 $x\in X$ 处有一个可数邻域基 $\mathscr{V}$. 则对于任何 $y\in X, y\neq x$, 由于 $\{y\}'$ 是一个包含 x 的开集, 所以存在 $V_y\in\mathscr{V}$ 使得 $\{y\}'\supset V_y$, 因此 $\{y\}\subset V'_y$. 将这个包含关系式的两边分别对于 X 中所有的异于 x 的点 y 求并, 可见

$$\{x\}'\subset\bigcup_{y\in\{x\}'}V'_y$$

由于 X 是一个不可数集, 所以上式的左边是一个不可数集; 由于 $\mathscr{V}$ 中只有可数个元素, 并且每一个元素的补集都是可数集, 所以上式的右边是一个可数集. 这样, 我们便得到了一个矛盾.

定理 5.1.3 每一个满足第二可数性公理的空间都满足第一可数性公理.

证明 设 X 是一个满足第二可数性公理的空间, $\mathscr{B}$ 是它的一

个可数基. 对于每一个 $x\in X$, 根据定理2.6.7,

$$\mathscr{B}_x=\{B\in\mathscr{B}\mid x\in B\}$$

是点 x 处的一个邻域基, 它是 $\mathscr{B}$ 的一个子族所以是可数族. 于是 X 在点 x 处有可数邻域基 $\mathscr{B}_x$. ■

定理5.1.3的逆命题不成立. 因为任何一个离散空间显然满足第一可数性公理, 而前面已经说过包含着不可数多个点的离散空间不满足第二可数性公理.

定理 5.1.4 设 X 和 Y 是两个拓扑空间, $f:X\to Y$ 是一个满的连续开映射. 如果 X 满足第二可数性公理(满足第一可数性公理), 则 Y 也满足第二可数性公理(满足第一可数性公理).

证明 设 X 满足第二可数性公理, $\mathscr{B}$ 是它的一个可数基. 由于 f 是一个开映射, $\widetilde{\mathscr{B}}=\{f(B)\mid B\in\mathscr{B}\}$ 是由 Y 中开集构成的一个可数族. 只需证明 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 是 Y 的一个基. 设 U 是 Y 中的一个开集, 则 $f^{-1}(U)$ 是 X 中的一个开集. 因此存在 $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}$ 使得 $f^{-1}(U)=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}B$. 由于 f 是一个满射, 我们有

$$U=f(f^{-1}(U))=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}f(B)$$

即 U 是 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 中某些元素的并. 这完成 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 是 Y 的一个基的证明.

本定理关于满足第一可数性公理的情形证明类似, 请读者自己补证. ■

根据定理5.1.4可见, 拓扑空间满足第一可数性公理和满足第二可数性公理的性质都是拓扑不变性质.

拓扑空间的某种性质称为**可遗传性质**, 如果一个拓扑空间具有这个性质那么它的任何一个子空间也都具有这个性质.

例如离散性, 平庸性都是可遗传的性质, 但连通性却明显是不可遗传的.

拓扑空间的某种性质称为**对于开子空间(或闭子空间)可遗传的性质**, 如果一个拓扑空间具有这个性质那么它的任何一个开子空间(闭子空间)也都具有这个性质.

例如,局部连通性虽然不是可遗传的性质,但对于开子空间却是可遗传的.(参见§4.4 习题第 3 题)将来我们会接触到一些对闭子空间可遗传的性质.

紧接着的两个定理表明拓扑空间满足第一(或第二)可数性公理的性质是可遗传的,也是有限可积的.

定理 5.1.5 满足第二可数性公理(满足第一可数性公理)的空间的任何一个子空间是满足第二可数性公理(满足第一可数性公理)的空间.

证明 设 X 是一个满足第二可数性公理的空间,$\mathscr{B}$ 是它的一个可数基.如果 Y 是 X 的一个子集,根据定理 3.1.7,集族 $\mathscr{B}|_Y=\{B\cap Y\mid B\in\mathscr{B}\}$ 是子空间 Y 的一个基,它明显是可数族.

本定理关于满足第一可数性公理的情形证明类似,请读者自己补证. ■

定理 5.1.6 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 n 个满足第二可数性公理(满足第一可数性公理)的空间.则积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 满足第二可数性公理(满足第一可数性公理).

证明 我们只要证明 $n=2$ 的情形.(参见§4.1.)

设 X_1 和 X_2 都是满足第二可数性公理的空间,$\mathscr{B}_1$ 和 $\mathscr{B}_2$ 分别是它们的可数基.根据定理 3.2.4,集族

$$\tilde{\mathscr{B}}=\{B_1\times B_2\mid B_i\in\mathscr{B}_i,i=1,2\}$$

是积空间 $X_1\times X_2$ 的一个基,它明显是一个可数族.

本定理当 $n=2$ 时关于满足第一可数性公理的情形证明类似,请读者自己补证. ■

根据定理 5.1.1,定理 5.1.5 和定理 5.1.6,我们立即可知:(事实上,这个推论也容易直接证明(参见习题 1).)

推论 5.1.7 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 的每一个子空间都满足第二可数性公理. ■

本节的余下部分我们讨论满足第一可数性公理的空间中序列

的性质.读者将会看到在这种拓扑空间中序列的性质与我们在数学分析中见到过的有着较多的类似之处,特别是定理 2.7.2 和定理 2.7.3 的逆命题对于这类拓扑空间成立.

定理 5.1.8　设 X 是一个拓扑空间.如果在点 $x\in X$ 处有一个可数邻域基,则在点 x 处有一个可数邻域基 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 使得对于任何 $i\in\mathbb{Z}_+$ 有 $U_i\supset U_{i+1}$,即

$$U_1\supset U_2\supset\cdots\supset U_i\supset U_{i+1}\supset\cdots$$

证明　设 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是点 $x\in X$ 处的一个可数邻域基.对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,令

$$U_i=V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_i$$

容易直接验证 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 便是点 x 处的满足定理要求的一个可数邻域基. ■

定理 5.1.9　设 X 是一个满足第一可数性公理的空间,$A\subset X$.则点 $x\in X$ 是集合 A 的一个凝聚点的充分必要条件是在集合 $A-\{x\}$ 中有一个序列收敛于 x.

证明　定理的充分性部分的证明已见于第二章定理 2.7.2,以下完成必要性部分的证明.

设 $x\in X$ 是集合 A 的一个凝聚点,并且根据定理 5.1.8 可设 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是点 x 处的一个可数邻域基,满足条件:对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,$U_i\supset U_{i+1}$.由于 $U_i\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$,可选取 $x_i\in U_i\cap(A-\{x\})$.序列 $\{x_i\}$ 是在 $A-\{x\}$ 中的.我们证明 $\lim_{i\to\infty}x_i=x$ 如下:如果 U 是 x 的一个邻域,则由于 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是 x 处的一个邻域基,所以存在 $N>0$ 使得 $U_N\subset U$.于是当 $i\geqslant N$ 时,我们有

$$x_i\in U_i\subset U_N\subset U \quad ■$$

定理 5.1.10　设 X 和 Y 是两个拓扑空间,其中 X 满足第一可数性公理;$x\in X$.则映射 $f:X\to Y$ 在点 $x\in X$ 处连续的充分必要条件是:如果 X 中的序列 $\{x_i\}$ 收敛于 x,则 Y 中的序列 $\{f(x_i)\}$ 收敛于 $f(x)$.

证明 定理的必要性部分的证明已见于定理 2.7.3，以下完成充分性部分的证明.

假设定理中陈述的条件成立，我们要证明映射 $f: X \to Y$ 在点 x 处连续. 用反证法. 假设映射 f 在点 x 处不连续，这也就是说 $f(x)$ 有一个邻域 V 使得 $f^{-1}(V)$ 不是 x 的邻域. 而这又意味着，x 的任何一个邻域 U 都不能包含在 $f^{-1}(V)$ 中，即对于 x 的任何一个邻域 U，包含关系 $U \subset f^{-1}(V)$ 不成立，也就是说 $f(U) \cap V' \neq \emptyset$.

总括上一段的论证可见：$f(x)$ 有一个邻域 V 使得对于 x 的任何一个邻域 U 有 $f(U) \cap V' \neq \emptyset$.

现在设 $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+}$ 是点 x 处的一个可数邻域基，满足条件：对于每一个 $i \in \mathbb{Z}_+$，$U_i \supset U_{i+1}$. 选取 $x_i \in U_i$ 使得 $f(x_i) \in f(U) \cap V'$，即 $f(x_i) \notin V$. 明显地，序列 $\{x_i\}$ 收敛于 x. 然而序列 $\{f(x_i)\}$ 在 $f(x)$ 的邻域 V 中却没有任何一个点，所以不收敛于 $f(x)$. 这与反证假设矛盾. 因此反证假设不成立，所以映射 f 在点 x 处连续. ■

定理 5.1.11 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，其中 X 满足第一可数性公理. 则映射 $f: X \to Y$ 是一个连续映射的充分必要条件是：如果 X 中的序列 $\{x_i\}$ 收敛于 $x \in X$，则 Y 中的序列 $\{f(x_i)\}$ 收敛于 $f(x)$.

证明 这是因为一个映射是一个连续映射当且仅当这个映射在它的定义域的每一个点处连续.（参见定理 2.3.5.） ■

习 题

1. 设 A 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个子空间. 给出 A 的一个具体的可数基.

2. 证明：一个拓扑空间满足第二可数性公理当且仅当它有一个可数子基.

3*. 证明:满足第二可数性公理的空间的每一个基中都包含着这个空间的一个可数基.(提示:设$\mathscr{B}$是满足第二可数性公理的空间X的一个基,$\mathscr{B}_1$是X的一个可数基.要证明这个$\mathscr{B}$包含着X的某一个可数基,先证明$\mathscr{B}_1$中的每一个元素都可以表示为$\mathscr{B}$中某可数个元素之并.)

4. 证明:满足第二可数性公理的空间中每一个由两两无交的开集构成的子集族都是可数族.

5. 证明:对于实数下限拓扑空间$\mathbb{R}_l$,有

(1) $\mathbb{R}_l$满足第一可数性公理;

(2) $\mathbb{R}_l$不满足第二可数性公理.(提示:应用习题3.)

6. 设X是一个满足第一可数性公理的空间,$A\subset X$.证明:A是一个开子集当且仅当对于X中的任何一个序列$\{x_i\}$,只要$\lim_{i\to\infty} x_i = x\in A$,则存在$N>0$使得当$i\geqslant N$时有$x_i\in A$.

§5.2　可分空间

定义 5.2.1　设X是一个拓扑空间,$D\subset X$.如果D的闭包等于整个拓扑空间X,即$\overline{D}=X$,则称D是X的一个**稠密子集**.

以下定理从一个侧面说明了讨论拓扑空间中的稠密子集的意义.

定理 5.2.1　设X是一个拓扑空间,D是X中的一个稠密子集.又设$f,g:X\to\mathbb{R}$都是连续映射.如果$f|_D=g|_D$,则$f=g$.

证明　设$f|_D=g|_D$.如果$f\neq g$,则存在$x\in X$使得$f(x)\neq g(x)$.令$\varepsilon=|f(x)-g(x)|$,则$\varepsilon>0$.令

$$V_1=(f(x)-\frac{\varepsilon}{2},f(x)+\frac{\varepsilon}{2})$$

$$V_2=(g(x)-\frac{\varepsilon}{2},g(x)+\frac{\varepsilon}{2})$$

则$V_1\cap V_2=\varnothing$.根据映射f和g的连续性可知$f^{-1}(V_1)$和$g^{-1}(V_2)$都是x的邻域,从而$U=f^{-1}(V_1)\cap g^{-1}(V_2)$也是$x$的

一个邻域. 由于子集 D 是稠密的, 所以 $U\cap D\neq\varnothing$. 对于任意一个 $y\in U\cap D$, 我们有 $f(y)=g(y)\in V_1\cap V_2$. 因此 $V_1\cap V_2$ 非空, 矛盾. ■

我们也希望讨论有着较少"点数"稠密子集的拓扑空间, 例如具有有限稠密点集的拓扑空间. 但这类拓扑空间比较简单, 大部分我们感兴趣的拓扑空间都不是这种情形, 讨论起来意思不大. 例如一个度量空间如果有一个有限的稠密子集的话, 那么这个空间一定就是一个离散空间. 相反, 后继的讨论表明, 许多重要的拓扑空间都有可数稠密子集.

定义 5.2.2 设 X 是一个拓扑空间. 如果 X 中有一个可数稠密子集, 则称 X 是一个**可分空间**.

定理 5.2.2 每一个满足第二可数性公理的空间都是可分空间.

证明 设 X 是一个满足第二可数性公理的空间, $\mathscr{B}$ 是它的一个可数基. 在 $\mathscr{B}$ 中的每一个非空元素 B 中任意取定一个点 $x_B\in B$. 令

$$D=\{x_B\mid B\in\mathscr{B},B\neq\varnothing\}$$

这是一个可数集. 由于 X 中的每一个非空开集都能够表示为 $\mathscr{B}$ 中若干个元素(其中当然至少会有一个不是空集)之并, 因此这个非空开集一定与 D 有非空的交, 所以可数集 D 是 X 的一个稠密子集. ■

包含着不可数多个点的离散空间一定不是可分的. 这是因为在这样一个拓扑空间中, 任何一个可数子集的闭包都等于它的自身而不可能等于整个空间.

可分性不是一个可遗传的性质, 也就是说一个可分空间可能有子空间不是可分的. 例子见后面的例 5.2.1. 然而由于满足第二可数性公理是一个可遗传的性质, 因此根据定理 5.2.2 我们立即得到:

推论 5.2.3 满足第二可数性公理的空间的每一个子空间都

是可分空间.

特别,n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 中的每一个子空间(包括它自己)都是可分空间. ■

例 5.2.1 设$(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间,∞是任何一个不属于 X 的元素(例如我们可以取$\infty=X$).令 $X^*=X\cup\{\infty\}$和 $\mathscr{T}^*=\{A\cup\{\infty\}\mid A\in\mathscr{T}\}\cup\{\varnothing\}$.容易验证(请读者自己证明)$(X^*,\mathscr{T}^*)$是一个拓扑空间.

我们依次给出以下三个论断:

(1) $(X^*,\mathscr{T}^*)$是可分空间.这是因为∞属于$(X^*,\mathscr{T}^*)$中的每一个非空开集,所以单点集$\{\infty\}$是$(X^*,\mathscr{T}^*)$中的一个稠密子集.

(2) $(X^*,\mathscr{T}^*)$满足第二可数性公理当且仅当$(X,\mathscr{T})$满足第二可数性公理.

事实上,$\mathscr{B}$是$(X,\mathscr{T})$的基当且仅当$\mathscr{B}^*=\{B\cup\{\infty\}\mid B\in\mathscr{B}\}$是$(X^*,\mathscr{T}^*)$的一个基,而$\mathscr{B}$与$\mathscr{B}^*$有相同的基数则是显然的.

(3) $(X,\mathscr{T})$是$(X^*,\mathscr{T}^*)$的一个子空间.因为$\mathscr{T}=\mathscr{T}^*|_X$.

根据这三个论断,我们可有以下两个结论:

(A) 可分空间可以不满足第二可数性公理.因为如果任意选取一个不满足第二可数性公理的空间$(X,\mathscr{T})$,我们便能得到一个不满足第二可数性公理的可分空间$(X^*,\mathscr{T}^*)$.

(B) 可分空间的子空间可以不是可分空间.因为如果选取$(X,\mathscr{T})$为一个不是可分的空间,我们便能得到一个可分空间$(X^*,\mathscr{T}^*)$以$(X,\mathscr{T})$为它的一个子空间.

定理 5.2.4 每一个可分的度量空间都满足第二可数性公理.

证明 设(X,d)是一个可分的度量空间,D是X中的一个可数稠密子集.令

$$\mathscr{B}=\{B(x,\frac{1}{n})\mid x\in D,n\in\mathbb{Z}_+\}$$

易见$\mathscr{B}$是由 X 中的开集构成的一个可数族.

设 $y\in X$, U 是 y 的一个邻域. 则存在 $k\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $B(y,\frac{1}{k})\subset U$. 由于 D 是 X 中的一个稠密子集, 所以

$$B(y,\frac{1}{2k})\cap D\neq\varnothing$$

任意选取

$$\tilde{y}\in B(y,\frac{1}{2k})\cap D$$

如果 $x\in B(\tilde{y},\frac{1}{2k})$, 则有 $d(x,\tilde{y})<\frac{1}{2k}$, 于是

$$d(x,y)\leqslant d(x,\tilde{y})+d(\tilde{y},y)<\frac{1}{k}$$

即 $x\in B(y,\frac{1}{k})$. 因此我们有:

$$B(\tilde{y},\frac{1}{2k})\subset B(y,\frac{1}{k})\subset U$$

由于 $\tilde{y}\in D$, 所以 $B(\tilde{y},\frac{1}{2k})\in\mathscr{B}$. 综合以上所说, 我们证明了: 对于任何 $y\in X$ 和 y 的任何一个邻域 U, 存在某一个 $B(\tilde{y},\frac{1}{2k})\in\mathscr{B}$ 使得

$$y\in B(\tilde{y},\frac{1}{2k})\subset U$$

因此根据定理 2.6.2 可知 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个基. ■

根据定理 5.2.4 及推论 5.2.3 可知:

推论 5.2.5 可分度量空间的每一个子空间都是可分空间.

■

有关可分性是拓扑不变性质, 有限可积性质, 可商性质以及对于开子空间可遗传性质等问题我们列在习题中, 由读者自己去研究.

习　题

1. 试将定理5.2.1中的实数空间$\mathbb{R}$改为任何一个度量空间，然后证明相应的结论.

2. 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续映射，满足条件：对于任何$x,y\in\mathbb{R}$有$f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明：存在$a\in\mathbb{R}$使得$f(x)=ax$对于任何$x\in\mathbb{R}$成立.

3. 证明：

(1) 有理数集$\mathbb{Q}$是实数空间$\mathbb{R}$中的一个可数稠密子集；

(2) n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中全体有理点（即每一个坐标都是有理数的点）构成的集合是n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的一个可数稠密子集.

4. 设X和Y是两个拓扑空间，$f:X\to Y$是一个连续映射. 证明：如果X是一个可分空间，则$f(X)$也是可分的.（这说明可分性是一个连续映射所保持的性质，并且由此可见，它是一个拓扑不变性质，可商性质.）

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是$n\geqslant 1$个可分空间. 证明积空间$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$也是一个可分空间.（也就是说，可分性是有限可积性质.）

6. 证明实数下限拓扑空间$\mathbb{R}_l$是一个可分空间.（这也是一个不满足第二可数性公理的可分空间的例子. 参见§5.1习题5.）

§5.3　Lindelöff空间

我们先引进一些术语.

定义5.3.1　设$\mathscr{A}$是一个集族，B是一个集合. 如果

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\supset B$$

则称集族$\mathscr{A}$是集合B的一个**覆盖**，并且当$\mathscr{A}$是可数族或有限族时，分别称集族$\mathscr{A}$是集合B的一个**可数覆盖**或**有限覆盖**.

设集族$\mathscr{A}$是集合B的一个覆盖. 如果集族$\mathscr{A}$的一个子族$\mathscr{A}_1$也是集合B的覆盖，则称集族$\mathscr{A}_1$是覆盖$\mathscr{A}$（关于集合B）的一个**子覆盖**.

设 X 是一个拓扑空间.如果由 X 中开(闭)子集构成的集族 $\mathscr{A}$ 是 X 的子集 B 的一个覆盖,则称集族 $\mathscr{A}$ 是集合 B 的一个**开(闭)覆盖**.

在数学分析中读者所熟知的 Heine－Borel 定理告诉我们:实数空间 $\mathbb{R}$ 的子集 A 是一个有界闭集当且仅当 A 的每一个开覆盖都有有限子覆盖.因而具有"每一个开覆盖都有有限子覆盖"的拓扑空间自有其重要性.对于这类拓扑空间我们将要在第七章中称之为"紧致空间"并且用整章的篇幅加以讨论.但是另一方面,正如所知,连实数空间本身都不能包容在这类拓扑空间之中.这使我们有必要放松一点限制.

定义 5.3.2 设 X 是一个拓扑空间.如果 X 的每一个开覆盖都有一个可数子覆盖,则称拓扑空间 X 是一个 **Lindelöff 空间**.

包含着不可数多个点的离散空间不是一个 Lindelöff 空间.这是因为这个拓扑空间中的所有单点子集构成它的一个开覆盖,这个开覆盖没有任何可数子覆盖.

定理 5.3.1 [Lindelöff 定理]任何一个满足第二可数性公理的空间都是 Lindelöff 空间.

证明 设拓扑空间 X 满足第二可数性公理,$\mathscr{B}$ 是它的一个可数基.

设 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖.对于每一个 $A\in\mathscr{A}$,由于 A 是一个开集,所以存在 $\mathscr{B}_A\subset\mathscr{B}$ 使得 $A=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_A}B$.令 $\mathscr{B}_1=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}\mathscr{B}_A$.由于 $\mathscr{B}_1$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子族,所以是一个可数族.并且

$$\begin{aligned}\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}B&=\bigcup_{B\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}}\mathscr{B}_A}B\\&=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}\Big(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_A}B\Big)\\&=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A=X\end{aligned}$$

这就是说,$\mathscr{B}_1$ 也是 X 的一个覆盖.如果 $B\in\mathscr{B}_1$,则存在 $A\in\mathscr{A}$ 使得 $B\in\mathscr{B}_A$,因此 $B\subset A$.于是对于每一个 $B\in\mathscr{B}_1$ 我们可以选定某

一个 $A_B\in\mathscr{A}$ 使得 $B\subset A_B$. 记 $\mathscr{A}_1=\{A_B\mid B\in\mathscr{B}_1\}$, 它是 $\mathscr{A}$ 的一个子族,并且

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}_1}A=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}A_B\supset\bigcup_{B\in\mathscr{B}_1}B=X$$

所以 $\mathscr{A}_1$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子覆盖. 此外由于 $\mathscr{B}_1$ 是可数的,所以 $\mathscr{A}_1$ 也是可数的. 于是开覆盖 $\mathscr{A}$ 有一个可数子覆盖 $\mathscr{A}_1$. 这证明 X 是一个 Lindelöff 空间. ■

推论 5.3.2 满足第二可数性公理的空间的每一个子空间都是 Lindelöff 空间.

特别,n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的每一个子空间都是 Lindelöff 空间.

■

例 5.3.1 定理 5.3.1 和推论 5.3.2 的逆命题都不成立.

考虑包含着不可数多个点的可数补空间 X. 例 5.1.1 中已经指出它不满足第一可数性公理,所以它也不满足第二可数性公理. 以下证明它是一个 Lindelöff 空间. 设 $\mathscr{A}$ 是它的一个开覆盖. 任意在 $\mathscr{A}$ 中取定一个非空集合 A. 对于每一个 $x\in A'$ 在 $\mathscr{A}$ 中选取一个 A_x 使得 $x\in A_x$. 由于 A' 是一个可数集,所以 $\mathscr{A}$ 的子族 $\{A_x\mid x\in A'\}\cup\{A\}$ 也是可数的,易见它也覆盖 X. 因此,包含着不可数多个点的可数补空间是定理 5.3.1 的逆命题不成立的例子.

也不难证明 X 的每一个子空间都是 Lindelöff 空间. (请读者自补证明)因此,包含着不可数多个点的可数补空间也是推论 5.3.2 的逆命题不成立的例子.

定理 5.3.3 每一个 Lindelöff 的度量空间都满足第二可数性公理.

证明 设 (X,d) 是一个 Lindelöff 的度量空间.

对于每一个 $k\in\mathbb{Z}_+$, 集族 $\widetilde{\mathscr{B}}=\{B(x,\frac{1}{k})\mid x\in X\}$ 是 X 的一个开覆盖. 由于 X 是一个 Lindelöff 空间,所以 $\widetilde{\mathscr{B}}$ 有一个可数子覆盖,设为 $\mathscr{B}_k=\{B(x_{ki},\frac{1}{k})\mid i\in\mathbb{Z}_+\}$. 从而开集族 $\mathscr{B}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}_+}\mathscr{B}_k$ 是一

个可数族.以下证明它是 X 的一个基.

对于任何一个 $x\in X$ 和 x 的任何一个邻域 U,存在 ε 使得 $B(x,\varepsilon)\subset U$.令 k 为任何一个大于$\frac{2}{\varepsilon}$的正整数.由于 $\mathscr{B}_k$ 是 X 的一个覆盖,所以有某一个 $B(x_{ki},\frac{1}{k})\in\mathscr{B}_k$ 使得 $x\in B(x_{ki},\frac{1}{k})$.对于任何 $y\in B(x_{ki},\frac{1}{k})$,我们有

$$d(x,y)\leqslant d(x,x_{ki})+d(x_{ki},y)<\frac{2}{k}<\varepsilon$$

所以 $B(x_{ki},\frac{1}{k})\subset B(x,\varepsilon)$.于是 $x\in B(x_{ki},\frac{1}{k})\subset U$.根据定理 2.6.2 可见 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个基.因此 X 满足第二可数性公理. ■

例 5.3.2 Lindelöff 空间的子空间可以不是 Lindelöff 空间的例子.

设 X 是一个不可数集,$z\in X$.令 $X_1=X-\{z\}$,

$$\mathscr{T}=\mathscr{P}(X_1)\cup\{U\in\mathscr{P}(X)\mid z\in U,U'\text{是一个可数集}\}$$

容易验证 $\mathscr{T}$是 X 的一个拓扑.(请读者自己验证.)

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是一个 Lindelöff 空间.因为如果 $\mathscr{A}$是 X 的一个开覆盖,则存在 $A\in\mathscr{A}$使得 $z\in A$.于是 A'是一个可数集.对于每一个 $x\in A'$,选取 $A_x\in\mathscr{A}$使得 $x\in A_x$.易见$\{A\}\cup\{A_x\mid x\in A'\}$是 $\mathscr{A}$的一个可数子覆盖.

另外,容易验证 $\mathscr{T}|_{X_1}=\mathscr{P}(X_1)$.这也就是说 X_1 作为 X 的子空间是一个包含着不可数多个点的离散空间.所以 X_1 不是一个 Lindelöff 空间.

此外,两个 Lindelöff 空间的积空间也可以不是 Lindelöff 空间.有关的例子可见习题第 4 题.

尽管 Lindelöff 性质不可遗传,但它对于闭子空间却是可遗传的.我们证明:

定理 5.3.4 Lindelöff 空间的每一个闭子空间都是 Lindelöff 空间.

证明 设 Y 是 Lindelöff 空间 X 的一个闭子空间,$\mathscr{A}$ 是子空间 Y 的一个开覆盖.则对于每一个 $A\in\mathscr{A}$ 存在 X 中的一个开集 U_A 使得 $U_A\cap Y=A$.于是 $\{U_A\mid A\in\mathscr{A}\}\cup\{Y'\}$ 是 X 的一个开覆盖,它有一个可数子覆盖,设为 $\{U_{A_1},U_{A_2},\cdots\}\cup\{Y'\}$.(即使可以找到一个子覆盖不包含 Y',但添上一个元素也无何不可.)这时易见,$\{A_1,A_2,\cdots\}$,其中 $A_i=U_{A_i}\cap Y,i\in\mathbb{Z}_+$,便是 $\mathscr{A}$ 的一个(关于子空间 Y 的)可数子覆盖. ■

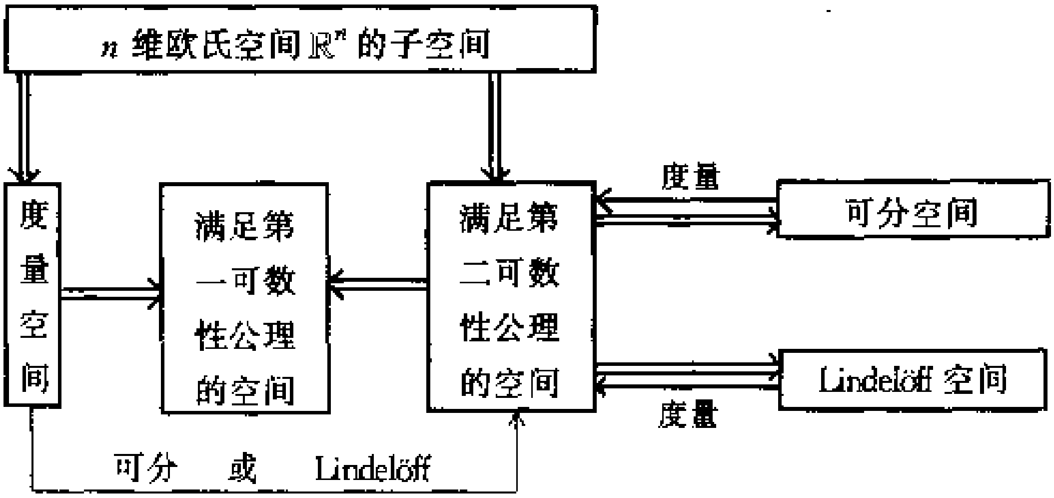
定理 5.3.5 设拓扑空间 X 的任何一个子空间都是 Lindelöff 空间.如果 $A\subset X$ 是一个不可数集,则 A 中必定包含 A 的某一个凝聚点,即 $A\cap dA\neq\varnothing$.

特别,如果 X 是一个满足第二可数性公理的空间,则 X 的每一个不可数子集 A 中都包含着 A 的某一个凝聚点.

证明 设 $A\subset X$ 是一个不可数集.如果 A 中没有 A 的凝聚点,则对于每一个 $a\in A$,存在 a 在 X 中的一个邻域 U_a 使得 $U_a\cap A=\{a\}$,这说明单点集 $\{a\}$ 是子空间 A 中的一个开集.从而子空间 A 便是一个包含着不可数多个点的离散空间,它必然不是一个 Lindelöff 空间,这与定理的条件矛盾. ■

我们将本章中讨论过的各类拓扑空间之间的关系列为图表 5.1.[①]

① 本图表以及后文同类的图表按如下方式理解:(1)双线箭头表示必然的蕴涵关系.例如我们可以从本图表中读到,每一个度量空间都是满足第一可数性公理的空间等;(2)单线箭头表示有条件的蕴涵关系(有关的条件附注在箭头的旁边).例如我们也可以从本图表中读到,一个度量空间如果是可分的或 Lindelöff 的,则它满足第二可数性公理.



图表 5.1: 有关可数性的几个公理之间的关系

习 题

1. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$ 是一个连续映射. 证明：如果 X 是一个 Lindelöff 空间，则 $f(X)$ 也是一个 Lindelöff 空间.

2. 设 X 是一个拓扑空间，$A\subset X$. 点 $x\in A$ 称为是集合 A 的一个$\aleph_1$凝聚点，如果 x 的每一个邻域中都包含着 A 中的不可数多个点. 证明：如果 X 满足第二可数性公理，则 X 的任何不可数子集 A 中都有 A 的某一个$\aleph_1$凝聚点.

如果将"X 满足第二可数性公理"改为"X 的每一个子空间都是 Lindelöff 空间"相应的命题是否仍然成立？

3. 设$(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间，∞是一个不属于 X 的元素. 记 $X^*=X\cup\{\infty\}$. 令 $\mathscr{T}^*$ 是 X^* 的一个子集族，使得 $U\subset X^*$ 是 $\mathscr{T}^*$ 的一个元素当且仅当或者 $U\in\mathscr{T}$，或者 $X^*-U\subset X$ 并且作为 X 的子空间是一个 Lindelöff 空间. 证明.

(1) $\mathscr{T}^*$ 是 X^* 的一个拓扑；

(2) 拓扑空间$(X^*,\mathscr{T}^*)$是一个 Lindelöff 空间.

4*. (两个 Lindelöff 空间的积空间不是 Lindelöff 空间的例子.)

(1) 证明：实数的下限拓扑空间 $\mathbb{R}_l$ 是一个 Lindelöff 空间. (提示：为证明$\mathbb{R}_l$ 是一个 Lindelöff 空间，首先指出只要证明$\mathbb{R}_l$ 有一个基使得由这个基的元素构成的$\mathbb{R}_l$ 的覆盖都有可数子覆盖. 选取 $\mathscr{T}_l$ 的一个基 $\mathscr{B}$ 如例 2.6.1 中.

设 $\mathscr{U}$ 是由基 $\mathscr{B}$ 中的元素构成的 $\mathbb{R}_l$ 的一个覆盖，先证明对于任何 $n\in\mathbb{Z}$，覆盖 $\mathscr{U}$ 有一个可数子族覆盖 $[n,\infty)$，然后由此得到覆盖 $\mathscr{U}$ 有一个可数子覆盖.)

(2) 证明：两个实数下限拓扑空间的积空间 $\mathbb{R}_l^2$ 不是一个 Lindelöff 空间.（提示：$\mathbb{R}_l^2$ 的子集 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}_l^2\mid x+y=1\}$ 是 $\mathbb{R}_l^2$ 中的一个闭集，但作为子空间是具有不可数多个点的离散空间.)

第6章　分离性公理

§6.1　T_0, T_1, Hausdorff 空间

现在我们回到我们在第二章中提出来的什么样的拓扑空间的拓扑可以由它的某一个度量诱导出来这一问题.为了回答这个问题势必要求我们对度量空间的拓扑性质有充分的了解.读者将会发现,本章中所提到的诸分离性公理,实际上是模仿度量空间的拓扑性质逐步建立起来的.对诸分离性的充分研究使我们在§6.5中能够对于前述问题作一个比较深刻的(虽然不是完全的)回答.

定义 6.1.1　设 X 是一个拓扑空间,如果 X 中的任意两个不相同的点中必有一个点有一个开邻域不包含另一个点(即如果 $x,y\in X$, $x\neq y$,则或者 x 有一个开邻域[①] U 使得 $y\notin U$,或者 y 有一个开邻域 V 使得 $x\notin V$),则称拓扑空间 X 是一个 T_0 **空间**.

拓扑空间自然不必都是 T_0 空间.例如包含着不少于两个点的平庸空间就不是 T_0 空间.

定理 6.1.1　拓扑空间 X 是一个 T_0 空间当且仅当 X 中任意两个不同的单点集有不同的闭包.(即如果 $x,y\in X$, $x\neq y$,则 $\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$.)

证明　**充分性**　设定理中的条件成立.则对于任何 $x,y\in X$,

① 在这个定义中,或是在后文类似的定义中,将所有的"开邻域"换成"邻域"得到的新定义与原来的定义是等价的.

$x\neq y$,由于$\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$,因此或者$\overline{\{x\}}-\overline{\{y\}}\neq\varnothing$成立,或者$\overline{\{y\}}-\overline{\{x\}}\neq\varnothing$成立.当$\overline{\{x\}}-\overline{\{y\}}\neq\varnothing$成立时,必定有$x\notin\overline{\{y\}}$.(因为如果$x\in\overline{\{y\}}$,即$\{x\}\subset\overline{\{y\}}$,从而$\overline{\{x\}}\subset\overline{\{y\}}$,于是$\overline{\{x\}}-\overline{\{y\}}=\varnothing$.)这推出$x$有一个不包含$y$的开邻域$\overline{\{y\}}'$.同理,当$\overline{\{y\}}-\overline{\{x\}}\neq\varnothing$成立时,$y$有一个不包含$x$的开邻域$\overline{\{x\}}'$.这证明$X$是一个$T_0$空间.

必要性 设X是一个T_0空间.若$x,y\in X,x\neq y$,则或者x有一个开邻域U使得$y\notin U$,或者y有一个开邻域V使得$x\notin V$.若属前一种情形,由于$U\cap\{y\}=\varnothing$,所以$x\notin\overline{\{y\}}$,于是$\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$;若属后一种情形,同样也有$\overline{\{x\}}\neq\overline{\{y\}}$. ■

定义 6.1.2 设X是一个拓扑空间.如果X中的任意两个不相同的点中每一个点都有一个开邻域[1]不包含另一个点(即如果$x,y\in X,x\neq y$则x有一个开邻域U使得$y\notin U$),则称拓扑空间X是一个T_1**空间**.

在定义 6.1.2 中的括号里面看起来好象是少写了一句话"y也有一个邻域V使得$x\notin V$".但这蕴涵在括号中已经写了的话中.(将x和y换一下次序,然后应用括号中描述的条件即可.)

T_1空间当然是T_0空间.但反之不然.例如设$X=\{0,1\}$,$\mathscr{T}=\{\varnothing,\{0\},X\}$,则$\mathscr{T}$是$X$的一个拓扑,并且拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是$T_0$的但不是$T_1$的.(请读者自己验证.)

定理 6.1.2 设X是一个拓扑空间,则以下条件等价:

(1) X是一个T_1空间;

(2) X中每一个单点集都是闭集;

(3) X中每一个有限子集都是闭集.

证明 (1) 蕴涵(2).设$x\in X$.当X是一个T_1空间时,对于

---

① 参见第151页脚注.

任何 $y\in X, y\neq x$，点 y 有一个邻域 U 使得 $x\notin U$，即 $U\cap\{x\}=\varnothing$，因此 $y\notin\overline{\{x\}}$. 从而 $\overline{\{x\}}=\{x\}$. 这证明单点集 $\{x\}$ 是一个闭集.

(2) 蕴涵(3). 设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是 X 的一个有限子集. 当(2)成立时，我们有：

$$\begin{aligned}\overline{\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}}&=\overline{\{x_1\}\cup\{x_2\}\cup\cdots\cup\{x_n\}}\\&=\overline{\{x_1\}}\cup\overline{\{x_2\}}\cup\cdots\cup\overline{\{x_n\}}\\&=\{x_1\}\cup\{x_2\}\cup\cdots\cup\{x_n\}\\&=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\end{aligned}$$

即 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是一个闭集.

(3) 蕴涵(1). 设 $x,y\in X, x\neq y$. 当(3)成立时，单点集 $\{x\}$ 和 $\{y\}$ 都是闭集. 从而 $\{x\}'$ 和 $\{y\}'$ 分别是 y 和 x 的开邻域，前者不包含 x，后者不包含 y. 这就证明了 X 是一个 T_1 空间. ■

下面的两个定理表明，T_1 空间中关于凝聚点和序列收敛的性质和我们在数学分析中熟知的多了一些类似之处.

定理 6.1.3 设 X 是一个 T_1 空间. 则点 $x\in X$ 是 X 的子集 A 的一个凝聚点当且仅当 x 的每一个邻域 U 中都含有 A 中的无限多个点，即 $U\cap A$ 是一个无限集.

证明 定理充分性部分是明显的. 以下证明必要性部分. 假设 $x\in X$ 是 X 的子集 A 的一个凝聚点. 如果 x 有一个开邻域 U 使得 $U\cap A$ 是一个有限集，则集合 $B=U\cap A-\{x\}$ 也是一个有限集，因此是一个闭集. 因此 $U-B$ 是一个开集，并且是 x 的一个邻域. 此外易见 $(U-B)\cap A=\varnothing$. 这蕴涵着 x 不是 A 的凝聚点，与假设矛盾. ■

定理 6.1.4 设 X 是一个 T_1 空间. 则 X 中的一个由有限个点构成的序列 $\{x_i\}$（即集合 $\{x_i\mid i\in\mathbb{Z}_+\}$ 是一个有限集）收敛于点 $x\in X$ 当且仅当存在 $N>0$ 使得 $x_i=x$ 对于任何 $i\geqslant N$ 成立.

证明 由于 X 是一个 T_1 空间，集合

$$A=\{x_i\mid x_i\neq x, i=1,2,\cdots\}$$

是一个有限集，所以是一个闭集．从而 A' 是 x 的一个开邻域．于是存在 $N>0$ 使得当 $i\geqslant N$ 有 $x_i\in A'$，因而 $x_i=x$． ■

定义 6.1.3 设 X 是一个拓扑空间．如果 X 中任何两个不相同的点各自有一个开邻域[①]使得这两个开邻域互不相交（即如果 x，$y\in X$，$x\neq y$，则点 x 有一个开邻域 U，点 y 有一个开邻域 V，使得 $U\cap V=\varnothing$），则称拓扑空间 X 是一个 **Hausdorff 空间**，或 **T_2 空间**．

Hausdorff 空间一定是 T_1 空间，但反之不然．

例 6.1.1 非 Hausdorff 的 T_1 空间的例子．

设 X 是一个包含着无限多个点的有限补空间．由于 X 中的每一个有限子集都是闭集，所以它是一个 T_1 空间．然而在拓扑空间 X 中任何两个非空的开集一定会有非空的交．这是因为 X 中每一个非空开集都是 X 中的有限子集的补集，而 X 又是一个无限集的缘故．由此易见 X 必然不是一个 Hausdorff 空间．

定理 6.1.5 Hausdorff 空间中的任何一个收敛序列只有一个极限点．

证明 设 $\{x_i\}$ 是 Hausdorff 空间 X 中的一个序列，并且有 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=y_1$ 和 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=y_2$，其中 $y_1\neq y_2$．于是对于 $j=1,2$，点 y_j 有一个开邻域 V_j，使得 $V_1\cap V_2=\varnothing$．故存在 $N_j>0$ 使得当 $i\geqslant N_j$ 时有 $x_i\in V_j$．任意选取 $M>\max\{N_1,N_2\}$．可见 $x_M\in V_1\cap V_2$，故 $V_1\cap V_2$ 非空，这是一个矛盾． ■

但在 T_1 空间中定理 6.1.5 却可以不成立．例如设拓扑空间 X 如例 6.1.1 中所述，$\{x_i\}$ 是 X 中的任何一个由两两不同的点构成的序列，即当 $i\neq j$ 时有 $x_i\neq x_j$．此时对于任何 $y\in X$ 和 y 的任何一个邻域 U，由于 U 的补集 U' 是一个有限集，所以存在 $N>0$ 使得当 $i\geqslant N$ 时有 $x_i\in U$．于是 $\lim\limits_{i\to\infty}x_i=y$．也就是说，序列 $\{x_i\}$ 收

---

① 参见第 151 页脚注．

敛于 X 中的任何一个点.

习 题

1. 设 X 是一个拓扑空间.证明:X 是 T_0 空间当且仅当对于任何 $x,y\in X$, $x\neq y$,或者 $\{x\}\cap\overline{\{y\}}=\varnothing$ 或者 $\{y\}\cap\overline{\{x\}}=\varnothing$.

2. 设 X 是一个 T_1 空间.证明:如果 X 有一个基只有有限个元素,则 X 是一个只含有有限多个点的离散空间.

3. 设$(X,\mathscr{T})$是一个 T_1 空间,∞是任何一个不属于 X 的元素.令 $X^*=X\cup\{\infty\}$ 和 $\mathscr{T}^*=\mathscr{T}\cup\{X^*\}$.证明:

(1) $(X^*,\mathscr{T}^*)$是一个拓扑空间;

(2) $(X^*,\mathscr{T}^*)$是一个 T_0 空间但不是 T_1 空间.

4. 证明:T_1 空间中的任何一个子集的导集都是闭集.

5. 设 X 是一个拓扑空间.证明:X 是 T_1 空间当且仅当对于任何 $x\in X$,点 x 的所有邻域的交恰为单点集$\{x\}$.

6. 证明:T_1 空间中任何一个包含着多于一点的有限子集都不连通.可数子集如何?给出结论和论证.

7. 设 X 是一个集合.证明:X 有一个拓扑 $\mathscr{T}$ 使得

(1) 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是一个 T_1 空间;

(2) 如果$\widetilde{\mathscr{T}}$是 X 的一个拓扑并且是 $\mathscr{T}$ 的一个真子集,则拓扑空间$(X,\widetilde{\mathscr{T}})$不是 T_1 空间.

8. 设 X 是一个 T_1 空间,$x\in X$.证明:如果 X 中由异于 x 的点构成的一个序列$\{x_i\}$收敛于 x,则序列$\{x_i\}$有一个由两两不同的点构成的一个子序列收敛于 x.

9. 设 $\mathscr{T}$ 和 $\widetilde{\mathscr{T}}$ 是集合 X 的两个拓扑,并且 $\widetilde{\mathscr{T}}\subset\mathscr{T}$.证明:如果拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是一个 T_0 或 T_1 空间,则拓扑空间$(X,\widetilde{\mathscr{T}})$相应也是 T_0 或 T_1 空间.

10. 设 X 是一个拓扑空间,Y 是一个 Hausdorff 空间,$f:X\to Y$ 是一个连续映射.又设$\{x_i\}$是 X 中的一个序列.证明:

(1) 如果 Y 中的序列$\{f(x_i)\}$收敛于 $y\in f(X)$,则序列$\{x_i\}$的任何一个收敛的子序列的任何一个极限点都属于 $f^{-1}(y)$;

(2) 如果 Y 中的序列 $\{f(x_i)\}$ 收敛于 $y\notin f(X)$，则序列 $\{x_i\}$ 没有收敛的子序列.

11. 设 X 是一个满足第一可数性公理的空间. 证明：X 是 Hausdorff 空间当且仅当 X 中每一个收敛序列都只有一个极限点.

12. 设 X 是一个拓扑空间. 证明 X 是 Hausdorff 空间当且仅当积空间 $X\times X$ 的对角线 $\Delta=\{(x,x)\in X\times X\mid x\in X\}$ 是一个闭集.

§6.2　正则，正规，T_3，T_4 空间

我们先将点的邻域的定义推广到对于集合有效.

定义 6.2.1　设 X 是一个拓扑空间，$A, U\subset X$. 如果 A 包含于 U 的内部，即 $A\subset U^\circ$，则称集合 U 是集合 A 的一个邻域. 如果 U 是 A 的一个邻域，并且还是一个开集(闭集)，则称 U 是 A 的一个开(闭)邻域.

定义 6.2.2　设 X 是一个拓扑空间. 如果 X 中的任何一个点和任何一个不包含这个点的闭集都各有一个开邻域[①]，它们互不相交(即如果 $x\in X$ 和 $A\subset X$ 是一个闭集，使得 $x\notin A$，则存在 x 的一个开邻域 U 和 A 的一个开邻域 V 使得 $U\cap V=\varnothing$)，则称拓扑空间 X 是一个**正则空间**.

定理 6.2.1　设 X 是一个拓扑空间. 则 X 是一个正则空间当且仅当对于任何点 $x\in X$ 和 x 的任何一个开邻域 U，存在 x 的一个开邻域 V 使得 $\overline{V}\subset U$.

证明　**必要性**　设 X 是一个正则空间. 如果 $x\in X$，集合 U 是 x 的一个开邻域，则 U 的补集 U' 便是一个不包含点 x 的闭集. 于是 x 和 U' 分别有开邻域 U_1 和 V_1 使得 $U_1\cap V_1=\varnothing$. 从而 $U_1\subset V'_1$，所以

---

① 参见第 151 页脚注.

$$U_1^- \subset V_1'^- = V_1' \subset U$$

即 $U_1^- \subset U$.

充分性 设 $x \in X$ 和 A 是一个不包含 x 的闭集.这时 A 的补集 A' 是 x 的一个开邻域,根据定理中所陈述的条件可见,有 x 的开邻域 U 使得 $\overline{U} \subset A'$.令 $V = U^{-\prime}$,则有 $V \supset A$.所以 V 是 A 的一个开邻域,并且易见 $U \cap V = \varnothing$.这证明 X 是一个正则空间.

■

定义 6.2.3 设 X 是一个拓扑空间.如果 X 中的任何两个互不相交的闭集各有一个开邻域并且这两个邻域互不相交(即如果 $A, B \subset X$ 都是闭集,则存在 A 的一个开邻域 U 和 B 的一个开邻域[1] V 使得 $U \cap V = \varnothing$),则称拓扑空间 X 是一个**正规空间**.

定理 6.2.2 设 X 是一个拓扑空间.则 X 是一个正规空间当且仅当对于任何一个闭集 $A \subset X$ 和 A 的任何一个开邻域 U,存在 A 的一个开邻域 V 使得 $\overline{V} \subset U$.

证明 证明类似于定理 6.2.1,请读者自己写出. ■

正则、正规性质与 §6.1 中定义的 T_0,T_1 以及 Hausdorff 诸性质之间并无必然的蕴涵关系.

例 6.2.1 正则且正规的空间但非 T_0 空间(因而也是非 T_1,非 Hausdorff 空间)的例子.

令 $X = \{1,2,3\}$ 和 $\mathscr{T} = \{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.容易验证 $(X, \mathscr{T})$ 是一个拓扑空间,并且是一个正则且正规的空间.留意点 2 和点 3 立即可见它不是一个 T_0 空间.

例 6.2.2 Hausdorff 空间(因而也是 T_1,T_0 空间)但非正则空间、也非正规空间的例子.

记实数空间 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑为 $\mathscr{T}$.令

---

① 参见第 151 页脚注.

$$K=\{\frac{1}{n}\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$$

$$\mathscr{T}_1=\{G-E\mid G\in\mathscr{T},E\subset K\}$$

我们先验证 $\mathscr{T}_1$ 是$\mathbb{R}$ 的一个拓扑.

(1) $\mathbb{R}=\mathbb{R}-\varnothing$,其中$\mathbb{R}\in\mathscr{T}$, $\varnothing\subset K$,所以$\mathbb{R}\in\mathscr{T}_1$. 此外同样易见 $\varnothing=\varnothing-\varnothing\in\mathscr{T}_1$.

(2) 如果 $A,B\in\mathscr{T}_1$,即存在 $G_1,G_2\in\mathscr{T}$和 $E_1,E_2\subset K$ 使得 $A=G_1-E_1$ 和 $B=G_2-E_2$,则有

$$\begin{aligned}A\cap B&=(G_1-E_1)\cap(G_2-E_2)\\&=(G_1\cap G_2)-(E_1\cup E_2)\end{aligned}$$

由于 $G_1\cap G_2\in\mathscr{T}$和 $E_1\cup E_2\subset K$,故 $A\cap B\in\mathscr{T}_1$.

(3) 设$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是 $\mathscr{T}_1$ 的一个子集族. 则对于每一个 $\gamma\in\Gamma$,存在 $G_\gamma\in\mathscr{T}$和 $E_\gamma\subset K$ 使得 $A_\gamma=G_\gamma-E_\gamma$. 令 $A=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ 和 $G=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}G_\gamma$,则显然有 $A\subset G$. 并且容易验证 $E=G-A\subset K$. (因为如果 $x\in E$,则存在 $\gamma\in\Gamma$ 使得 $x\in G_\gamma$. 然而 $x\notin A_\gamma$,因此 $x\in E_\gamma\subset K$.) 于是我们得到 $A=G-E\in\mathscr{T}_1$.

我们已经证明了($\mathbb{R}$,$\mathscr{T}_1$)是一个拓扑空间. 此外我们也容易看出 $\mathscr{T}_1\supset\mathscr{T}$. 由于实数空间 ($\mathbb{R}$,$\mathscr{T}$)是一个 Hausdorff 空间,所以拓扑空间($\mathbb{R}$,$\mathscr{T}_1$)也是一个 Hausdorff 空间.

以下我们指出($\mathbb{R}$,$\mathscr{T}_1$)不是一个正则空间,也不是一个正规空间. 为此注意点 0 和不包含点 0 的闭集 K(由于$\mathbb{R}-K\in\mathscr{T}_1$,所以 K 是拓扑空间($\mathbb{R}$,$\mathscr{T}_1$)中的一个闭集). 假设点 0 和闭集 K 在拓扑空间($\mathbb{R}$,$\mathscr{T}_1$)中分别有开邻域 U 和 V 使得 $U\cap V=\varnothing$,并且设 $G_1,G_2\in\mathscr{T}$和 $E_1,E_2\subset K$ 使得 $U=G_1-E_1$ 和 $V=G_2-E_2$ 成立. 这时应有

$$U\cap V=(G_1\cap G_2)-(E_1\cup E_2)=\varnothing$$

由于 $E_1\cup E_2$ 是一个可数集,而当 $G_1\cap G_2$ 非空时必然是一个不

可数集(实数空间中的开集必然包含着一个开区间).因而当 $G_1\cap G_2$ 非空时上式将导致从一个不可数集中除掉一个可数集后会是一个空集的矛盾.这表明 $G_1\cap G_2$ 一定是一个空集.从而由此得到 0 和 K 在实数空间中各有一个邻域 G_1 和 G_2 使得 $G_1\cap G_2=\varnothing$.这又是一个矛盾,因为在实数空间中点 0 是集合 K 的一个凝聚点.这个矛盾说明我们原先的假定不正确.也就是说,点 0 和不包含点 0 的拓扑空间$(\mathbb{R},\mathscr{T}_1)$中的闭集 K 在这个拓扑空间中不能分别有开邻域 U 和 V 使得 $U\cap V=\varnothing$.这就证明了拓扑空间$(\mathbb{R},\mathscr{T}_1)$不是一个正则空间.此外如果我们注意到单点集$\{0\}$也是拓扑空间$(\mathbb{R},\mathscr{T}_1)$中的一个闭集,那么以上论证无需改变,便使我们立即可见拓扑空间$(\mathbb{R},\mathscr{T}_1)$也不是一个正规空间.

拓扑空间的正则性和正规性之间也没有必然的蕴涵关系.

例 6.2.3 *正规空间而非正则空间的简单例子是$(X,\mathscr{T})$,其中 $X=\{1,2,3\}$和$\mathscr{T}=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$.*

定义 6.2.4 *正则的 T_1 空间称为* **T_3 空间**,*正规的 T_1 空间称为* **T_4 空间**.

由于 T_1 空间中的每一个单点集都是闭集,因此 T_4 空间一定是 T_3 空间,T_3 空间一定是 Hausdorff 空间.T_3 而非 T_4 空间的一个例子(它自然也是正则而非正规空间的例子)可见于习题第 6 题.

最后,我们证明度量空间满足本章中在此之前所有我们引进的那些定义(指 T_0 至 T_4,以及正则正规等).为此,我们只要证明:

定理 6.2.3 *每一个度量空间都是 T_4 空间.*

证明 设(X,d)是一个度量空间.如果 $x,y\in X,x\neq y$,则 $d(x,y)>0$.令 $\varepsilon=d(x,y)$.于是球形邻域 $B(x,\frac{\varepsilon}{2})$和 $B(y,\frac{\varepsilon}{2})$分别是 x 和 y 的开邻域,并且易见它们无交.因此 X 是一个

Hausdorff 空间，自然它也是 T_1 空间.

现在设 A 和 B 是 X 中的两个无交的闭集. 假如 A 和 B 中有一个是空集，例如 $B=\varnothing$. 这时我们可以取 X 为 A 的开邻域，$\varnothing$ 为 B 的开邻域，它们的交当然是空集. 以下假定 A 和 B 都不是空集. 根据定理 2.4.9 可见，对于 $x,y\in X$，如果 $x\notin B$，则 $d(x,B)>0$；如果 $y\notin A$，则 $d(y,A)>0$. 记

$$\varepsilon(x)=\frac{1}{2}d(x,B),\quad \delta(x)=\frac{1}{2}d(x,A)$$

并且令

$$U=\bigcup_{x\in A}B(x,\varepsilon(x)),\quad V=\bigcup_{y\in B}B(y,\delta(y))$$

显然 U 和 V 分别是 A 和 B 的开邻域. 以下证明 $U\cap V=\varnothing$. 若不然，$U\cap V\neq\varnothing$. 设 $z\in U\cap V$. 由于 $z\in U$，所以存在 $x_1\in A$ 使得 $d(z,x_1)<\varepsilon(x_1)$，由于 $z\in V$，所以存在 $y_1\in B$ 使得 $d(z,y_1)<\delta(y_1)$. 不失一般性，设 $\varepsilon(x_1)\geqslant\delta(y_1)$. 于是我们有

$$\begin{aligned}d(x_1,y_1)&\leqslant d(x_1,z)+d(z,y_1)\\&<2\varepsilon(x_1)=d(x_1,B)\end{aligned}$$

这与 $d(x_1,B)$ 的定义 ($d(x_1,B)=\inf\{d(x_1,y)\mid y\in B\}$) 矛盾. 这就证明了 X 是一个正规空间. ■

习 题

1. 设 X 是一个拓扑空间. 证明：X 是一个正则空间当且仅当如果 $x\in X$，A 是 X 中的一个闭集，使得 $x\notin A$，则 x 和 A 分别有开邻域 U 和 V 使得 $\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$.

2. 设 X 是一个拓扑空间. 证明：X 是一个正规空间当且仅当如果 A 和 B 是 X 中的两个闭集，使得 $A\cap B=\varnothing$，则 A 和 B 分别有开邻域 U 和 V 使得 $\overline{U}\cap\overline{V}=\varnothing$.

3. 证明：每一个正则的 T_0 空间都是 T_3 空间.

4. 设 X 是一个拓扑空间. 如果 X 的任意两个隔离子集 A 和 B 分别有开

邻域 U 和 V 使得 $U\cap V=\varnothing$，则称拓扑空间是一个**完全正规空间**. 证明：一个拓扑空间是完全正规的当且仅当它的每一个子空间都是正规空间.

5*. 令 $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2\mid x_2\geqslant 0\}$ 和

$$\mathscr{B}=\{B(x,\varepsilon)\mid 0<\varepsilon<x_2, x=(x_1,x_2)\in X\}$$
$$\cup\{B(x,x_2)\cup\{(x_1,0)\}\mid x=(x_1,x_2)\in X\}$$

(其中 (x_1,x_2) 表示的是 $\mathbb{R}^2$ 中的点，而不是开区间，$B(x,\varepsilon)$ 表示 $\mathbb{R}^2$ 中通常意义下的球形邻域.) 证明：

(1) $\mathscr{B}$ 是 X 的某一个拓扑 $\mathscr{T}$ 的基；

(2) 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 是一个 T_3 空间；

(3) 拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 不是正规空间.

(提示：为证明(3)考虑以下两个集合

$$A=\{(x_1,0)\in X\mid x_1\text{ 是一个有理数}\}$$
$$B=\{(x_1,0)\in X\mid x_1\text{ 是一个无理数}\}$$

证明它们不满足正规空间定义中的条件.)

6. 记实数集合 $\mathbb{R}$ 的通常拓扑为 $\mathscr{T}$. 令

$$\mathscr{T}_1=\{G-E\mid G\in\mathscr{T}, E\subset\mathbb{Q}\}$$

证明：

(1) $\mathscr{T}_1$ 是实数集合 $\mathbb{R}$ 的一个拓扑；

(2) 拓扑空间 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_1)$ 是一个 Hausdorff 空间；

(3) 拓扑空间 $(\mathbb{R},\mathscr{T}_1)$ 不是正则空间，也不是正规空间.

§6.3 Urysohn 引理和 Tietze 扩张定理

定理 6.3.1 [Urysohn 引理] 设 X 是一个拓扑空间，$[a,b]$ 是一个闭区间. 则 X 是一个正规空间当且仅当对于 X 中任意两个无交的闭集 A 和 B，存在一个连续映射 $f:X\to[a,b]$ 使得当[①] $x\in$

---

① 如果把这话写成 $f(A)=\{a\}$ 就不对了，因为我们并没有假定 $A\neq\varnothing$. 同样，也不能把后面一句话改成 $f(B)=\{b\}$.

A 时 $f(x)=a$ 和当 $x\in B$ 时 $f(x)=b$.

证明 由于闭区间 $[a,b]$ 同胚于单位闭区间 $[0,1]$,所以我们只要对 $[a,b]=[0,1]$ 的情形证明这个定理.

充分性 假设定理中陈述的条件成立.设 A 和 B 是 X 中的两个无交的闭集,$f:X\to[0,1]$ 是一个连续映射使得当 $x\in A$ 时有 $f(x)=0$ 和当 $x\in B$ 时有 $f(x)=1$.由于集合 $[0,\frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2},1]$ 是 $[0,1]$ 中两个无交的开集,所以 $U=f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$ 和 $V=f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ 是 X 中的两个无交的开集,并且易见 $A\subset U$ 和 $B\subset V$.这证明 X 是一个正规空间.

必要性 设 X 是一个正规空间.设 A 和 B 是 X 中的两个无交的闭集.

令 $\mathbb{Q}_I=\mathbb{Q}\cap[0,1]$,即 $\mathbb{Q}_I$ 是 $[0,1]$ 中的全体有理数构成的集合.由于 $\mathbb{Q}_I$ 是一个无限的可数集,故有一个一一映射 $r:\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Q}_I$.因此 $\mathbb{Q}_I=\{r(1),r(2),r(3),\cdots\}$.我们不妨设 $r(1)=1$ 和 $r(2)=0$.我们欲将每一个有理数 $r(n)\in\mathbb{Q}_I$,对应着 A 的一个开邻域 $U_{r(n)}$ 使得满足条件:

(1) $U_{r(1)}=B'$;

(2) 如果 $r(n)<r(m)$,则 $U_{r(n)}^-\subset U_{r(m)}$.

现在我们来按归纳的方式定义 A 的诸开邻域 $U_{r(n)}$ 如下:首先令 $U_1=U_{r(1)}=B'$,并且(根据定理 6.2.2)任意选取 $U_0=U_{r(2)}$ 为 A 的一个开邻域使得 $U_{r(2)}^-\subset U_{r(1)}$.此时易见 $U_{r(1)}$ 和 $U_{r(2)}$ 满足以上条件(1)和(2).对于 $n>2$,假定 A 的诸开邻域 $U_{r(1)},U_{r(2)},\cdots,U_{r(n-1)}$ 已经定义并且满足上述条件(1)和(2),我们来定义 $U_{r(n)}$:记在诸实数 $r(1),r(2),\cdots,r(n-1)$ 中小于 $r(n)$ 的各数中的最大的一个为 s,大于 $r(n)$ 的各数中最小的一个为 b,根据定理6.2.2,我们选取 $U_{r(n)}$ 为 U_s^- 的一个开邻域使得 $U_{r(n)}^-\subset U_b$.

从 $U_{r(n)}$ 的取法直接可见 A 的诸开邻域 $U_{r(1)}, U_{r(2)}, \cdots, U_{r(n-1)}, U_{r(n)}$ 仍然满足条件(1)和(2).

根据归纳原则,A 的诸开邻域 $U_{r(1)}, U_{r(2)}, U_{r(3)}, \cdots$ 已经全部定义并且它们满足条件(1)和(2).

定义映射 $f: X \to [0,1]$ 使得对于任何 $x \in X$,

$$f(x)=\begin{cases}\inf\{r\in\mathbb{Q}_I \mid x\in U_r\} & \text{如果 } x\notin B\\ 1 & \text{如果 } x\in B\end{cases}$$

显然,如果 $x\in A$,则由于 $x\in U_0(=U_{r(2)})$,所以 $f(x)=0$,如果 $x\in B$,则根据映射 f 的定义便有 $f(x)=1$.剩下的工作便只有验证映射 f 的连续性了.

我们已知

$$\tilde{\mathscr{S}}=\{(a,\infty)\mid a\in\mathbb{R}\}\cup\{(-\infty,b)\mid b\in\mathbb{R}\}$$

是实数空间$\mathbb{R}$ 的一个子基(参见例 2.6.2),令 $\mathscr{S}_1$ 是集族 $\tilde{\mathscr{S}}$ 在$[0,1]$上的限制,即 $\mathscr{S}_1=\tilde{\mathscr{S}}|_{[0,1]}$.则

$$\mathscr{S}_1=\{(a,1]\mid a\in[0,1)\}\cup\{[0,b)\mid b\in(0,1]\}\cup\{\varnothing,[0,1]\}$$

是$[0,1]$的一个子基(参见 §3.1 习题 4).事实上容易知道,从 δ_1 中去掉 $\varnothing$ 和$[0,1]$两个元素后得到的集族

$$\mathscr{S}=\mathscr{S}_1-\{\varnothing,[0,1]\}$$

仍是$[0,1]$的一个子基.根据定理 2.6.5,为验证映射 f 的连续性,只要验证$[0,1]$的子基 $\mathscr{S}$ 的每一个元素的 f 原象都是 X 的开集.因此为验证 f 的连续性只要验证下面的(a)和(b)两条.

(a) 对于任何 $a\in[0,1)$,集合 $f^{-1}((a,1])$ 是 X 中的一个开集.

为证此,设 $a\in[0,1)$.则 $x\in f^{-1}((a,1])$ 当且仅当 $f(x)>a$,这又当且仅当或者 $\inf\{r\in\mathbb{Q}_I\mid x\in U_r\}>a$ 或者 $x\in B$.然而 $\inf\{r\in\mathbb{Q}_I\mid x\in U_r\}>a$ 的一个充分必要条件是存在一个有理数 $r>a$ 使得 $x\notin U_r^-$.因此

$$f^{-1}((a,1])=(\bigcup_{r>a,r\in\mathbb{Q}_I}U_r^{-\prime})\cup B$$

然而由于对于任何 $r\in\mathbb{Q}_I$，我们都有 $B\subset U_r^{-\prime}$，所以

$$f^{-1}((a,1])=\bigcup_{r>a,r\in\mathbb{Q}_I}U_r^{-\prime}$$

因此 $f^{-1}((a,1])$是 X 中一族开集之并，所以它是 X 中的一个开集.

(b) 对于任何 $b\in(0,1]$，集合 $f^{-1}([0,b))$是 X 中的一个开集.

为证此，设 $b\in(0,1]$. $x\in f^{-1}([0,b))$当且仅当 $f(x)<b$，亦即 $\inf\{r\in\mathbb{Q}_I\mid x\in U_r\}<b$，这也就是说存在有理数 $r<b$ 使得 $x\in U_r$. 所以

$$f^{-1}([0,b))=\bigcup_{r<b,r\in\mathbb{Q}_I}U_r$$

即 $f^{-1}([0,b))$是 X 中一族开集之并，所以它是 X 中的一个开集.

至此，定理全部证明完毕. ■

Urysohn 引理是我们在本书中迄今接触到的内容最为深刻，并且有着许多重要应用的一个定理(本节后文中将其应用于证明 Tietze 扩张定理便是一例). 作为它的应用的一个简单的例子，我们先给出：

定理 6.3.2 T_4 空间中任何一个连通子集如果包含着多于一个点，则它一定是一个不可数集.

证明 设 C 是 T_4 空间 X 中的一个连通子集. 如果 C 不只包含着一个点，任意选取 $x,y\in C$，$x\neq y$. 对于 T_4 空间 X 中的两个无交的闭集$\{x\}$和$\{y\}$，应用 Urysohn 引理可见，存在一个连续映射 $f:X\to[0,1]$使得 $f(x)=0$ 和 $f(y)=1$. 由于 C 是 X 中一个连通子集，所以 $f(C)$也连通. 由于 $0,1\in f(C)$，所以 $f(C)=[0,1]$. 由于$[0,1]$是一个不可数集，所以 C 也是一个不可数集. ■

在证明 Tietze 扩张定理之前，预先给出一个引理. Urysohn 引

理在证明 Tietze 扩张定理中的作用完全体现在这个引理的证明之中.

引理 6.3.3 设 X 是一个正规空间, A 是 X 中的一个闭子集, λ 是一个正实数. 则对于任何一个连续映射

$$g: A \to [-\lambda, \lambda]$$

存在着一个连续映射

$$g^*: X \to \left[-\frac{1}{3}\lambda, \frac{1}{3}\lambda\right]$$

使得对于任何 $a \in A$ 有

$$|g(a) - g^*(a)| \leqslant \frac{2}{3}\lambda$$

证明 设 $g: A \to [-\lambda, \lambda]$是一个连续映射. 令

$$P = \left[-\lambda, -\frac{1}{3}\lambda\right], \ Q = \left[\frac{1}{3}\lambda, \lambda\right]$$

以及

$$\widetilde{P} = g^{-1}(P), \ \widetilde{Q} = g^{-1}(Q)$$

$\widetilde{P}$ 和 $\widetilde{Q}$ 是 A 中的, 从而也是 X 中的, 两个无交的闭集. 根据 Urysohn 引理(定理 6.3.1)存在一个连续映射 $g^*: X \to [-\frac{1}{3}\lambda, \frac{1}{3}\lambda]$ 使得当 $x \in \widetilde{P}$ 时有 $g^*(x) = -\frac{1}{3}\lambda$, 当 $x \in \widetilde{Q}$ 时有 $g^*(x) = \frac{1}{3}\lambda$. 以下验证映射 g^* 满足引理要求: 设 $a \in A$. 如果 $a \in \widetilde{P}$, 则有 $g(a) \in [-\lambda, -\frac{1}{3}\lambda]$和 $g^*(a) = -\frac{1}{3}\lambda$, 因此

$$0 \leqslant g^*(a) - g(a) \leqslant \frac{2}{3}\lambda$$

类似地, 当 $a \in \widetilde{Q}$ 时有

$$0 \leqslant g(a) - g^*(a) \leqslant \frac{2}{3}\lambda$$

此外, 如果 $a \in A - (\widetilde{P} \cup \widetilde{Q})$则有 $g(a), g^*(a) \in [-\frac{1}{3}\lambda, \frac{1}{3}\lambda]$,

因此

$$|g(a)-g^*(a)|\leqslant\frac{2}{3}\lambda \qquad \blacksquare$$

定理 6.3.4 [Tietze 扩张定理] 设 X 是一个拓扑空间,$[a,b]$是一个闭区间.则 X 是一个正规空间当且仅当对于 X 中的任何一个闭集 A 和任何一个连续映射

$$f:A\to[a,b]$$

有一个连续映射

$$g:X\to[a,b]$$

是 f 的扩张.

证明 由于任何一个闭区间都同胚于$[-1,1]$,不失一般性,我们可以假定$[a,b]=[-1,1]$.

充分性 设 A 和 B 是 X 中的两个无交的闭集.定义映射 $f:A\cup B\to[-1,1]$使得当 $x\in A$ 时有 $f(x)=-1$ 和当 $x\in B$ 时有 $f(x)=1$.易见 f 是一个连续映射.因此根据定理中所陈述的条件,映射 f 有一个连续的扩张 $g:X\to[-1,1]$.显然当 $x\in A$ 时有 $g(x)=-1$ 和当 $x\in B$ 时有 $g(x)=1$.根据定理 6.3.1,这就证明了 X 是一个正规空间.

必要性 设 X 是一个正规空间,A 是 X 中的一个闭集,$f:A\to[-1,1]$是一个连续映射.我们按归纳方式对于每一个 $n\geqslant 0$ 定义一个连续映射

$$f_n:A\to\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^n,\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

和对于每一个 $n\geqslant1$ 定义一个连续映射

$$g_n:X\to\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$$

如下:令 $f_0=f:A\to[-1,1]$.对于 $n>0$,假设映射 f_{n-1}已经定义.由引理 6.3.3 知存在连续映射 g_n 使得对于任何$a\in A$,

$$|f_{n-1}(a)-g_n(a)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

并且定义映射 f_n,使得对于每一个 $a\in A$ 有 $f_n(a)=f_{n-1}(a)-g_n(a)$. 显然映射 f_n 是连续的. 根据归纳原则映射序列 $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ 和映射序列 $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ 均已定义.

定义映射 $g:X\to[-1,1]$ 使得对于每一个 $x\in X$,

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$$

设 $x\in X$. 由于对于每一个 $n\geqslant 1$ 有

$$|g_n(x)|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ 收敛,并且收敛于 $[-1,1]$ 中的点,因此映射 g 的定义是确切的.

以下验证 g 满足定理的要求. 首先验证映射 g 是连续映射 f 在 X 上的一个扩张. 设 $a\in A$. 对于每一个 $n\geqslant 1$,由于

$$\sum_{i=1}^{n}f_i(a)=\sum_{i=1}^{n}(f_{i-1}(a)-g_i(a))$$

所以

$$f_n(a)=f_0(a)-\sum_{i=1}^{n}g_i(a)$$

于是

$$\left|f_0(a)-\sum_{i=1}^{n}g_i(a)\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

在上式中令 $n\to\infty$ 可见 $f(a)=f_0(a)=g(a)$.

剩下要做的事是验证映射 g 的连续性. 为此设 x 是 X 中的任意一点. 对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$,选取整数 $N>0$ 使得

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}<\frac{1}{4}\varepsilon$$

对于每一个 $n=1,2,\cdots,N$,由于映射 g_n 是连续的,故存在 x 的一个邻域,设为 U_n,使得当 $y\in U_n$ 时有

$$|g_n(y)-g_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$$

于是当 $y\in U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_N$ 我们便有

$$\begin{aligned}&|g(y)-g(x)|\\&=\left|\sum_{n=1}^{\infty}g_n(y)-\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)\right|\\&\leqslant\sum_{n=1}^{N}|g_n(y)-g_n(x)|+\sum_{n=N+1}^{\infty}|g_n(y)|\\&\quad+\sum_{n=N+1}^{\infty}|g_n(x)|<\varepsilon\end{aligned}$$

这就证明了映射 g 在点 x 处的连续性. 由于 x 是 X 中的任意一个点,所以映射 g 是一个连续映射. ■

习　题

1. 设 X 是一个 T_4 空间,U 是 X 中的一个开集,C 是 X 中的一个连通子集,并且 $U\cap C\neq\varnothing$. 证明:如果 C 包含着多于一个点,则 $U\cap C$ 是一个不可数集.

2. 设 A 是正规空间 X 中的一个闭集. 证明:对于任何一个连续映射 $f:A\to[0,1]^n$,有一个连续映射 $g:X\to[0,1]^n$ 是映射 f 的扩张.

3. 证明 Tietze 扩张定理蕴涵 Urysohn 引理.

4*. 设 X 是一个正规空间,A 是 X 中的一个闭子集,$f:A\to\mathbb{R}$ 是一个连续映射. 证明:有一个连续映射 $g:X\to\mathbb{R}$ 是映射 f 的扩张.

§6.4　完全正则空间,Tychonoff 空间

定义 6.4.1　设 X 是一个拓扑空间. 如果对于任意 $x\in X$ 和 X 中任何一个不含点 x 的闭集 B 存在一个连续映射 $f:X\to[0,1]$

使得 $f(x)=0$ 以及对于任何 $y\in B$ 有 $f(y)=1$,[①]则称拓扑空间 X 是一个**完全正则空间**.

完全正则的 T_1 空间称为 Tychonoff **空间**,或 $T_{3.5}$**空间**.

定理 6.4.1 每一个完全正则空间都是正则空间.

证明 设 X 是一个完全正则空间.设 $x\in X$,B 是 X 中的一个不含点 x 的闭集.则存在连续映射 $f:X\to[0,1]$使得 $f(x)=0$ 和对于任何 $b\in B$ 有 $f(b)=1$.于是 $f^{-1}([0,\frac{1}{2}))$和 $f^{-1}((\frac{1}{2},1])$ 分别是点 x 和闭集 B 的开邻域,并且它们无交.这表明 X 是一个正则空间. ■

根据定理 6.4.1 明显可见,每一个 Tycholoff 空间都是 T_3 空间.根据 Urysohn 引理也容易看出,每一个 T_4 空间都是 Tycholoff 空间,但反之不真,有关的例子可以参见§6.2 习题第 5 题.

定理 6.4.2 每一个正则且正规的空间都是完全正则空间.

证明 设 X 是一个既正则又正规的空间.设 $x\in X$,B 是 X 中的一个不包含点 x 的闭集.由于 X 是一个正则空间,根据定理 6.2.1,点 x 有一个开邻域 U 使得 $\overline{U}\subset B'$.令 $A=\overline{U}$ 则 A 和 B 是 X 中无交的两个闭集.由于 X 是一个正规空间,应用 Urysohn 引理可见,存在一个连续映射 $f:X\to[0,1]$使得对于任何 $y\in A$ 有 $f(y)=0$和对于任何 $y\in B$ 有 $f(y)=1$.由于 $x\in A$,故 $f(x)=1$,这就证明了 X 是一个完全正则空间. ■

定理 6.4.3 [Tychonoff 定理] 每一个正则的 Lindelöff 空间都是正规空间.

证明 设 X 是一个正则的 Lindelöff 空间.设 A 和 B 是 X 中的两个无交的闭集.对于每一个 $x\in A$,由于 $x\notin B$,根据定理 6.2.1 可见,存在 x 的一个开邻域 U_x 使得 $U_x^-\subset B'$,即 $U_x^-\cap B=\varnothing$.集族$\{U_x\mid x\in A\}$是闭集 A 的一个开覆盖.由于 Lindelöff 空间

① 不能把这句话写成 $f(B)=\{1\}$,因为没有 B 非空的假定.

的每一个闭子空间都是 Lindelöff 空间(参见定理 5.3.4),易见 A 的开覆盖 $\{U_x \mid x\in A\}$ 中有一个可数子族,设为 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$,仍然覆盖 A. 注意:对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,有 $U_i^-\cap B=\varnothing$. 同理,集合 B 也有一个可数开覆盖 $\{V_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$,使得对于任何 $i\in\mathbb{Z}_+$ 有 $V_i^-\cap A=\varnothing$.

现在,对于每一个 $n\in\mathbb{Z}_+$,令

$$U_n^*=U_n-\bigcup_{i=1}^{n}V_i^-$$

$$V_n^*=V_n-\bigcup_{i=1}^{n}U_i^-$$

显然 U_n^* 和 V_n^* 都是开集. 对于任何 $m,n\in\mathbb{Z}_+$,

$$U_n^*\cap V_m^*=\varnothing$$

因为若设 $m\leqslant n$,则有

$$V_m^*\subset V_m\subset\bigcup_{i=1}^{n}V_i^-$$

令

$$U^*=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+}U_n^*,\quad V^*=\bigcup_{n\in\mathbb{Z}_+}V_n^*$$

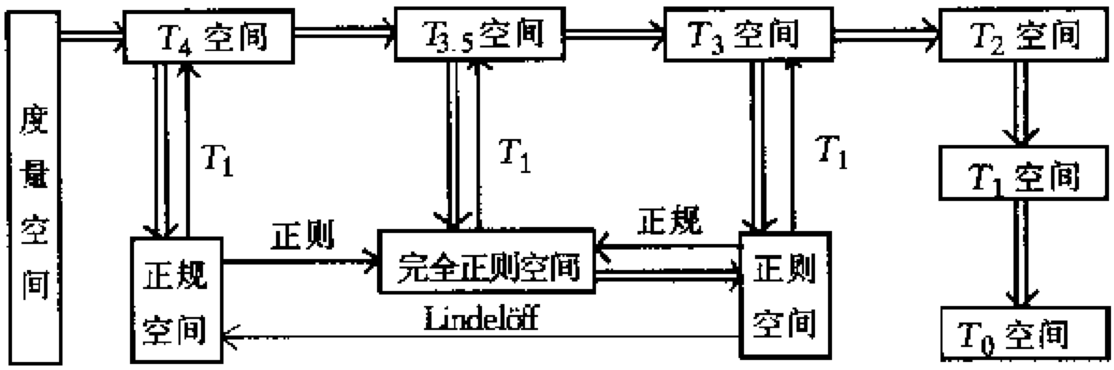
它们都是开集,并且

$$U^*\cap V^*=\bigcup_{m,n\in\mathbb{Z}_+}(U_n^*\cap V_m^*)=\varnothing$$

现在只剩下证明 $A\subset U^*$ 和 $B\subset V^*$ 了. 不失一般性,我们验证前者:如果 $x\in A$,则存在 $n\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $x\in U_n$. 另一方面,由于诸 V_i^- 与 A 无交,所以对于任意 $i\in\mathbb{Z}_+$ 有 $x\notin V_i^-$. 因此 $x\in U_n^*$. 于是 $x\in U^*$. ■

§6.1, §6.2 和本节中定义的 T_0, T_1, T_2(即 Hausdorff), T_3, $T_{3.5}$(即 Tychonoff), T_4 以及正则和正规等拓扑空间的性质统称为分离性公理. 现将满足诸分离性公理的拓扑空间类之间的蕴

涵关系列为图表 6.1.[①]



图表 6.1: 各分离性公理之间的关系

习 题

1. 设 X 是一个拓扑空间. 证明: X 是一个 Tychonoff 空间当且仅当对于任何 $x\in X$ 和任何一个不包含点 x 的闭集或单点子集 A, 存在一个连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使得 $f(x)=0$ 和对于任何 $a\in A$ 有 $f(a)=1$.

2. 设 X 是一个连通的 Tychonoff 空间, 并且 X 不是单点集. 证明: X 中的每一个非空开集都是一个不可数集.

3. 证明: 每一个满足第二可数性公理的正则空间都是完全正则空间.

4. 设 X 是一个拓扑空间. 记 F 为从 X 到单位闭区间 $[0,1]$ 的所有连续映射构成的集合. 对于每一个 $f\in F$, 记 $Z_f=\{x\in X\mid f(x)\neq 0\}$. 证明: X 是一个完全正则空间当且仅当集族 $\{Z_f\mid f\in F\}$ 是 X 的一个基.

§6.5 分离性公理与子空间,(有限)积空间和商空间

本书正文中提到的所有的分离性公理有 T_0, T_1, T_2 (即

① 参见第 148 页脚注.

Hausdorff), T_3, $T_{3.5}$(即 Tychonoff), T_4 以及正则和正规等，它们都是经由开集或者经由通过开集定义的概念来陈述的，所以它们必然都会是拓扑不变性质. 但是我们还是愿意完全形式地作一番验证，但只是以一种情形为例. 其它的请读者自己去作.

定理 6.5.1 设 X 和 Y 是两个同胚的拓扑空间. 如果 X 是一个完全正则的空间，则 Y 也是一个完全正则的空间.

证明 设 $h:X\to Y$ 是一个同胚. 对于 Y 中的任意一个点 x 和任何一个不包含点 x 的闭集 B, $h^{-1}(x)$ 和 $h^{-1}(B)$ 分别是 X 中的一个点和一个不包含点 $h^{-1}(x)$ 的闭集. 由于 X 是一个完全正则空间，故存在一个连续映射 $f:X\to[0,1]$ 使得 $f(h^{-1}(x))=0$ 和对于任何 $y\in f^{-1}(B)$ 有 $f(y)=1$. 于是连续映射 $g=f\circ h^{-1}:Y\to[0,1]$ 满足条件: $g(x)=0$ 和对于任何 $z\in B$ 有 $g(z)=1$. ■

T_0, T_1, T_2 即 Hausdorff, T_3, $T_{3.5}$(即 Tychonoff), 以及正则都是可遗传的性质. 我们也只是举一例证明之，其余的留给读者自己去作. 习题第 1 题中的结论表明正规和 T_4 对于闭子空间是可遗传的性质.

定理 6.5.2 正则空间的每一个子空间都是正则空间。

证明 设 X 是一个正则空间, Y 是 X 的一个子空间. 设 $y\in Y$ 和 B 是 Y 的一个闭集使得 $y\notin B$. 首先，在 X 中有一个闭集 $\widetilde{B}$ 使得 $\widetilde{B}\cap Y=B$. 因此 $y\notin\widetilde{B}$. 由于 X 是一个正则空间，所以 y 和 $\widetilde{B}$ 分别在 X 中有开邻域(对于拓扑空间 X 而言) $\widetilde{U}$ 和 $\widetilde{V}$ 使得 $\widetilde{U}\cap\widetilde{V}=\varnothing$. 令 $U=\widetilde{U}\cap Y$ 和 $V=\widetilde{V}\cap Y$, 它们分别是 y 和 B 在子空间 Y 中开邻域，此外易见 $U\cap V=\varnothing$. ■

T_0, T_1, T_2(即 Hausdorff), T_3, $T_{3.5}$(即 Tychonoff), 以及正则都是有限可积性质，我们举正则和完全正则的情形为例予以证明，其余留给读者自己去作. 习题第 3 题中的结论表明正规和 T_4 不是有限可积性质.

定理 6.5.3 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 $n\geqslant 1$ 个正则空间. 则积空

间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 也是正则空间.

证明 我们只要证明 $n=2$ 的情形.(理由参见§4.1.)

设 $x=(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$,集合 U 是 x 在 $X_1\times X_2$ 中的一个开邻域.则有 x_1 在 X_1 中的一个开邻域 U_1,和 x_2 在 X_2 中的一个开邻域 U_2,使得 $U_1\times U_2\subset U$.由于 X_1 和 X_2 都是正则空间,故 x_1 在 X_1 中有一个开邻域 V_1 使得 $V_1^-\subset U_1$,x_2 在 X_2 中有一个开邻域 V_2 使得 $V_2^-\subset U_2$.于是 $V_1\times V_2$ 是 x 在 $X_1\times X_2$ 中的一个开邻域,并且

$$\overline{V_1\times V_2}=V_1^-\times V_2^-\subset U_1\times U_2\subset U$$

这就证明了 $X_1\times X_2$ 是一个正则空间. ■

引理 6.5.4 设映射 $m:[0,1]^2\to[0,1]$ 定义为:对于任意 $t=(t_1,t_2)\in[0,1]^2$,

$$m(t)=\max\{t_1,t_2\}$$

则 m 是一个连续映射.

证明 对于每一个 $a\in(0,1]$,

$$m^{-1}([0,a))=[0,a)^2$$

是$[0,1]^2$ 中的一个开集;而对于每一个 $b\in[0,1)$,

$$m^{-1}([0,b])=[0,b]^2$$

是$[0,1]^2$ 中的一个闭集,因此

$$m^{-1}((b,1])=m^{-1}([0,1]-[0,b])=[0,1]^2-m^{-1}([0,b])$$

是$[0,1]^2$ 中的一个开集.由于集族

$$\mathscr{S}=\{\{[0,a)\mid a\in(0,1]\}\cup\{(b,1]\mid b\in[0,1)\}\}$$

是$[0,1]$的一个子基.故根据定理 2.6.5 可见 m 是一个连续映射.

■

在引理 6.5.4 的证明中提到的 $\mathscr{S}$是$[0,1]$的一个子基这件事,我们在证明 Urysohn 引理(定理 6.3.1)时已经作过论证.

定理 6.5.5 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 $n\geqslant1$ 个完全正则空间.则积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 也是完全正则空间

证明 我们只要证明 $n=2$ 的情形.(理由参见§4.1.)

设 $x=(x_1,x_2)\in X_1\times X_2$ 和 B 是 $X_1\times X_2$ 中的一个不包含 x 的闭集.则存在 x_1 在 X_1 中的一个开邻域 U_1 和 x_2 在 X_2 中的一个开邻域 U_2 使得

$$x=(x_1,x_2)\in U_1\times U_2\subset X_1\times X_2-B$$

由于 X_1 和 X_2 都是完全正则空间,所以对于任何 $i=1,2$,有连续映射 $f_i:X_i\to[0,1]$使得 $f_i(x_i)=0$,并且对于任何 $y_i\in X_i-U_i$ 有 $f_i(y_i)=1$.

定义映射 $f_1\times f_2:X_1\times X_2\to[0,1]^2$ 使得对任意

$$y=(y_1,y_2)\in X_1\times X_2,f_1\times f_2((y_1,y_2))=(f_1(y_1),f_2(y_2))$$

由于 $p_i\circ(f_1\times f_2)=f_i\circ\tilde{p}_i$(其中 $\tilde{p}_i$ 是 $X_1\times X_2$ 的第 i 个投射,p_i 是$[0,1]^2$ 的第 i 个投射).因此 $p_i\circ(f_1\times f_2)$连续.根据定理3.2.7可见 $f_1\times f_2$ 是一个连续映射.

令 $f=m\circ(f_1\times f_2):X_1\times X_2\to[0,1]$,其中映射 $m:[0,1]^2\to[0,1]$的定义见于定理6.5.4中,由于它是两个连续映射的复合,所以连续.此外,我们有:

$$\begin{aligned}f(x)&=m\circ(f_1\times f_2)(x)\\&=\max\{f_1(x_1),f_2(x_2)\}=0\end{aligned}$$

并且如果 $y=(y_1,y_2)\in X_1\times X_2-U_1\times U_2$,则或者 $y_1\notin U_1$ 或者 $y_2\notin U_2$,因而或者 $f_1(y_1)=1$ 或者 $f_2(y_2)=1$,从而此时有:

$$\begin{aligned}f(y)&=m\circ(f_1\times f_2)(y)\\&=\max\{f_1(y_1),f_2(y_2)\}=1\end{aligned}$$

由于 $B\subset X_1\times X_2-U_1\times U_2$,故对于每一个 $y\in B$ 有 $f(y)=1$.这就完成了积空间 $X_1\times X_2$ 是一个完全正则空间的证明. ■

至于本书正文中提到的所有分离性公理都不是可商性质这个结论,可以通过适当的反例来指出.

例 6.5.1 由于实数空间$\mathbb{R}$是一个度量空间,所以它满足本书正文中提到的所有分离性公理.在实数空间$\mathbb{R}$中给出一个等价关系~使得对于任意$x,y\in\mathbb{R}$,$x\sim y$的充分必要条件是或者$x,y\in(-\infty,0]$;或者$x,y\in(0,1)$;或者$x,y\in[1,\infty)$.将所得到的商空间记为Y.换言之,Y便是在实数空间中分别将集合$A=(-\infty,0]$,$B=(0,1)$和$C=[1,\infty)$各粘合为一个点所得到的拓扑空间.事实上$Y=\{A,B,C\}$.容易验证Y的拓扑便是$\{\varnothing,\{A,B\},\{A\},\{A,C\},\{A,B,C\}\}$.考察点$A$和点$B$可见,$Y$不是$T_1$空间,因此也不是$T_2$(即 Hausdorff),$T_3$,$T_{3.5}$(即 Tychonoff),以及$T_4$空间.此外,考察两个单点闭集$\{A\}$和$\{C\}$可见,$Y$既不是正则空间也不是正规空间.此外容易验证$Y$是一个$T_0$空间.

上述例子尚没有说明T_0不是可商性质.事实上例 3.3.1 中所给出的实数空间$\mathbb{R}$的那个商空间是包含着两个点的平庸空间,当然也就不是T_0空间了.然而例 3.3.1 并不能代替例 6.5.1,因为平庸空间既是正则空间,也是正规空间.

习 题

1. 证明:正规空间(或T_4空间)的每一个闭子空间都是正规空间(T_4空间).

2. 给出一个正规空间,使得它的某一个子空间不是正规空间.

3*. 证明:

(1) 实数下限拓扑空间$\mathbb{R}_l$是一个T_4空间;

(2) 两个实数下限拓扑空间的积空间$\mathbb{R}_l^2$不是正规空间.(提示:为证明(2)考虑积空间中的两个子集:

$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}_l^2\mid x+y=1, x\text{ 是有理数}\}$$
$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}_l^2\mid x+y=1, x\text{ 是无理数}\}$$

指出它们不满足正规空间定义中的条件.)

4. 设X是一个拓扑空间,~是X中的一个等价关系,$p:X\to X/\sim$是自

然投射.证明:商空间 $X/\sim$ 是一个 T_1 空间当且仅当对于每一个 $y\in X/\sim$,集合 $p^{-1}(y)$是 X 中的闭集.

5. 令

$$D=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2\mid x\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,1)\in\mathbb{R}^2\mid x\in\mathbb{R}\}$$

为欧氏平面$\mathbb{R}^2$ 的子空间.将 D 中每一对点$(x,0)$和$(x,1)$(其中 $x>0$)粘合起来,得到的商空间记为 Y.证明:

(1) Y 是一个 T_1 空间;

(2) Y 不是 Hausdorff 空间;

(3) 每一点 $x\in Y$ 在 Y 中有一个开邻域同胚于实数空间$\mathbb{R}$.

6. 构造实数空间$\mathbb{R}$ 的一个商空间,使得它不是 T_0 空间、不是正则空间,也不是正规空间.(因此不满足所有的分离性公理.)(提示:综合例 6.5.1 和例 3.3.1 中用到的技巧.)

§6.6　可度量化空间

先回忆一下在第二章中的可度量化空间的定义.一个拓扑空间称为是可度量化的,如果它的拓扑可以由它的某一个度量诱导出来.我们已经在许多章节中研究过度量空间的一些拓扑性质.这些拓扑性质当然也是可度量化空间所具有的.在这一章中我们部分地回答具有什么样的拓扑性质的拓扑空间是可度量化空间这个问题.

定理 6.6.1　[Urysohn 嵌入定理]　*每一个满足第二可数性公理的 T_3 空间都同胚于 Hilbert 空间$\mathbb{H}$ 的某一个子空间.*

证明　设 X 是一个满足第二可数性公理的 T_3 空间.根据定理 5.3.1 和定理 6.4.3,可见 X 是一个正规空间.

设 $\mathscr{B}$ 是 X 的不含空集作为它的元素的一个可数基.(拓扑空间的任何一个基如果以空集为它的一个元素,把空集去掉后剩下的部分还是一个基.)这时笛卡儿积 $\mathscr{B}\times\mathscr{B}$ 是可数的.令

$$\mathscr{A}=\{(U,V)\in\mathscr{B}\times\mathscr{B}\mid\overline{U}\subset V\}$$

它是笛卡儿积 $\mathscr{B}\times\mathscr{B}$ 的子集,所以是可数的.因此可将 $\mathscr{A}$ 中的元素无遗漏地排成序列:

$$(U_1,V_1),(U_2,V_2),\cdots,(U_i,V_i),\cdots$$

(当 $\mathscr{A}$ 是一个有限集时,可无限重复它的任何一个元素).我们重申:对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$ 有 $\overline{U_i}\subset V_i$.

对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,由于 X 是一个正规空间,根据 Urysohn 引理,我们可以选取一个连续映射 $f_i:X\to[0,1]$ 使得对于任何 $x\in \overline{U_i}$ 有 $f_i(x)=0$ 和对于任何 $x\in X-V_i$ 有 $f_i(x)=1$.

定义映射 $f:X\to\mathbb{H}$ 使得对于每一个 $x\in X$,

$$f(x)=\left(f_1(x),\frac{1}{2}f_2(x),\cdots,\frac{1}{i}f_i(x),\cdots\right)$$

由于对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,$0\leqslant f_i(x)\leqslant 1$.所以

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i}f_i(x)\right)^2<\infty$$

因此 $f(x)\in\mathbb{H}$.这也就是说映射 f 的定义是合理的.我们要证明的是映射 f 是一个嵌入,即映射 f 是一个单射,并且是从 X 到它的象集 $f(X)$ 的一个同胚.兹挨次证明如下:

(1) f 是一个单射.

设 $x,y\in X$,$x\neq y$.由于 X 是一个 T_1 空间,因此存在 $V\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in V$ 和 $y\notin V$;由于 X 是一个正规空间,故 x 有一个开邻域 M 使得 $\overline{M}\subset V$;由于 $\mathscr{B}$ 是 X 的一个基,所以存在 $U\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in U\subset M$,因此 $\overline{U}\subset V$.根据以上所作可见 $(U,V)\in\mathscr{A}$,从而不妨设 $(U,V)=(U_k,V_k)$.于是根据映射 f_k 的定义可见 $f_k(x)=0$ 和 $f_k(y)=1$,这显然推得 $f(x)\neq f(y)$.所以 f 是一个单射.

(2) f 是连续的.

设 $x\in X$.任意给定实数 $\varepsilon>0$.首先选取 $N\in\mathbb{Z}_+$ 使得

$$\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{1}{i^2}<\frac{\varepsilon^2}{2}$$

其次对于每一个 $i=1,2,\cdots,N$,根据映射 $f_i:X\to[0,1]$ 的连续

性，选取 x 的一个邻域 W_i 使得当 $y\in W_i$ 时有

$$|f_i(y)-f_i(x)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}$$

令 $W=\bigcap_{i=1}^{N}W_i$，它是 x 的一个邻域. 当 $y\in W$ 时我们有：

$$\begin{aligned}\rho^2(f(y),f(x))=&\sum_{i=1}^{N}\frac{(f_i(y)-f_i(x))^2}{i^2}+\\&\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{(f_i(y)-f_i(x))^2}{i^2}\\&<\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}\right)^2N+\frac{\varepsilon^2}{2}=\varepsilon^2\end{aligned}$$

其中 ρ 是 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 的通常的度量. 因此当 $y\in W$ 时有 $\rho(f(y),f(x))<\varepsilon$. 这证明了映射 f 在点 x 处的连续性. 由于 x 是任意选取的，所以 f 连续.

(3) 对于 X 中的每一个开集 W，象集 $f(W)$ 是 $f(X)$ 的一个开集.

设 W 是 X 中的一个开集. 设 $y\in f(W)$. 选取 $x\in X$ 使得 $f(x)=y$. 依次选取 $V\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in V$ 和 $U\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in U$ 和 $\overline{U}\subset V$. 于是 $(U,V)\in\mathscr{A}$. 设 $(U,V)=(U_i,V_i)$. 这时我们有 $x\in U_i\subset U_i^-\subset V_i$. 因此 $f_i(x)=0$ 以及当 $z\in X-W$ 时有 $f_i(z)=1$，因而根据 f 的定义，我们有

$$\begin{aligned}\rho(y,f(z))&=\rho(f(x),f(z))\\&\geqslant\frac{1}{i}|f_i(x)-f_i(z)|=\frac{1}{i}\end{aligned}$$

因此

$$f(X-W)\cap B\left(y,\frac{1}{i}\right)=\varnothing$$

其中，$B(y,\frac{1}{i})$ 是 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 中以 y 为中心以 $\frac{1}{i}$ 为半径的球形邻域. 由于(1)中已经证明了 f 是一个单射，所以

$$f(X-W)=f(X)-f(W)$$

于是

$$f(X)\cap B\left(y,\frac{1}{i}\right)-f(W)=\varnothing$$

这说明

$$f(X)\cap B\left(y,\frac{1}{i}\right)\subset f(W)$$

而上式左边的集合就是在子空间 $f(X)$ 中的以 y 为中心以 $\frac{1}{i}$ 为半径的球形邻域. 因此上式说明在子空间 $f(X)$ 中 y 是集合 $f(W)$ 的一个内点. 由于 y 是集合 $f(W)$ 中的任意取定一个点,所以 $f(W)$ 是子空间 $f(X)$ 中的一个开集.

于是映射 $f:X\to f(X)$ 是一个开的连续单射,它自然是满的,所以是同胚. 因此拓扑空间 X 同胚于 Hilbert 空间$\mathbb{H}$ 的子空间 $f(X)$. ■

定理 6.6.2 Hilbert 空间$\mathbb{H}$是一个可分空间.

证明 设 Z 是 Hilbert 空间中所有的只有有限个非 0 坐标,并且每一个坐标都是有理数的点构成的集合,即 $z\in Z$ 当且仅当 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n,0,0,\cdots)\in\mathbb{H}$,其中诸 z_i 都是有理数. 以下证明 Z 是$\mathbb{H}$ 中的一个稠密子集.

设 $x\in\mathbb{H}$. 对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$,存在整数 $N>0$ 使得

$$\sum_{i=1}^{N}x_i^2<\frac{\varepsilon^2}{2}$$

对于每一个 $i=1,2,\cdots,N$,有一个有理数 z_i 使得

$$|x_i-z_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}$$

于是 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_N,0,0,\cdots)\in Z$,并且

$$\begin{aligned}\rho(x,z)&=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-z_i)^2+\sum_{i=N+1}^{\infty}x_i^2}\\&<\sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}\right)^2N+\frac{\varepsilon^2}{2}}=\varepsilon^2\end{aligned}$$

其中，ρ 是 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 中的通常度量．这证明 $x \in \overline{Z}$．从而 $\overline{Z} = \mathbb{H}$． ■

根据定理 6.6.2 可见，Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 满足第二可数性公理(参见定理 5.2.4)，它也是一个 Lindelöff 空间(参见定理 5.3.1)．

定理 6.6.3 设 X 是一个拓扑空间．则下列条件等价：

(1) X 是一个满足第二可数性公理的 T_3 空间；

(2) X 同胚于 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 的某一个子空间；

(3) X 是一个可分的可度量化空间．

证明 (1) 蕴涵(2)．此即定理 6.6.1．

(2) 蕴涵(3)．由于 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 是一个可分的度量空间，而可分的度量空间的每一个子空间都是可分的度量空间(参见推论 5.2.5)，与一个可分的度量空间同胚的拓扑空间是可分的(参见§5.2 习题第 4 题)，也是可以度量化的(参见§2.2 习题 12)．

(3) 蕴涵(1)．可分的度量空间满足第二可数性公理(参见定理 5.2.4)，可度量化空间是一个 T_4 空间(参见定理 6.2.3)，因此更是一个 T_3 空间． ■

习 题

1．证明：定理 6.6.1 的条件(1)中“T_3”可以改为“Tychonoff”或者“T_4”；条件(3)中的“可分”可以改为“Lindelöff”或“满足第二可数性公理”．

2．具体给出 Hilbert 空间 $\mathbb{H}$ 的一个可数基．

3．设拓扑空间 X_1 和 X_2 的积空间 $X_1 \times X_2$ 是一个可度量化空间．证明：X_1 和 X_2 都是可度量化的．

第 7 章 紧 致 性

§7.1 紧致空间

在§5.3中,我们用关于开覆盖和子覆盖的术语刻画了一类拓扑空间,即 Lindelöff 空间.现在来仿照这种做法,即将 Lindelöff 空间定义中的"可数子覆盖"换成"有限子覆盖",以定义紧致空间.读者在数学分析中早已见过的 Heine - Borel 定理断言:实数空间 $\mathbb{R}$ 的任何一个子集为有界闭集的充分必要条件是它的每一个开覆盖都有一个有限子覆盖.(在§7.3中我们将要推广这个定理.)因此我们现在作的事也应当在意料之中.

定义 7.1.1 设 X 是一个拓扑空间.如果 X 的每一个开覆盖有一个有限子覆盖,则称拓扑空间 X 是一个**紧致空间**.

明显地,每一个紧致空间都是 Lindelöff 空间.但反之不然,例如包含着无限但可数个点的离散空间是一个 Lindelöff 空间,但它不是一个紧致空间.

例 7.1.1 实数空间 $\mathbb{R}$ 不是一个紧致空间.这是因为如果我们设 $\mathscr{A}=\{(-n,n)\subset\mathbb{R}\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$,则 $\mathscr{A}$ 的任何一个有限子族

$$\{(-n_1,n_1),(-n_2,n_2),\cdots,(-n_k,n_k)\}$$

由于它的并为

$$(-\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\},\ \max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\})$$

所以不是 $\mathbb{R}$ 的一个子覆盖.因此 $\mathbb{R}$ 的开覆盖 $\mathscr{A}$ 没有任何一个有限子覆盖.

定义 7.1.2 设 X 是一个拓扑空间,Y 是 X 中的一个子集.

如果 Y 作为 X 的子空间是一个紧致空间，则称 Y 是拓扑空间 X 的一个**紧致子集**.

根据定义，拓扑空间 X 中的一个子集 Y 是 X 的紧致子集意味着每一个由子空间 Y 中的开集构成的 Y 的开覆盖有一个有限子覆盖，这并不明显地意味着由 X 中的开集构成的每一个 Y 的覆盖都有有限子覆盖. 所以陈述以下定理是必要的.

定理 7.1.1 设 X 是一个拓扑空间，Y 是 X 中的一个子集. 则 Y 是 X 的一个紧致子集当且仅当每一个由 X 中的开集构成的 Y 的覆盖都有有限子覆盖.

证明 设 Y 是拓扑空间 X 中的一个紧致子集，$\mathscr{A}$ 是 Y 的一个覆盖，它由 X 中的开集构成. 则容易验证集族 $\widetilde{\mathscr{A}}=\{A\cap Y\mid A\in\mathscr{A}\}$ 也是 Y 的一个覆盖，它由 Y 中的开集构成. 因此 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 有一个有限子覆盖，设为

$$\{A_1\cap Y,\ A_2\cap Y,\ \cdots,A_n\cap Y\}$$

于是 $\mathscr{A}$ 的有限子族 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 覆盖 Y.

另一方面，假定每一个由 X 的开集构成的 Y 的覆盖都有一个有限子覆盖. 设 $\mathscr{A}$ 是 Y 的一个覆盖，它由 Y 中的开集构成. 则对于每一个 $A\in\mathscr{A}$ 存在 X 中的一个开集 U_A 使得 $A=U_A\cap Y$. 因此 $\widetilde{\mathscr{A}}=\{U_A\mid A\in\mathscr{A}\}$ 是由 X 中的开集构成的 Y 的一个覆盖，所以有一个有限子覆盖，设为

$$\{U_{A_1},U_{A_2},\cdots,U_{A_n}\}$$

此时易见 $\mathscr{A}$ 的子族 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 覆盖 Y. 这证明 Y 是 X 的一个紧致子集. ■

下面介绍关于紧致性的一个等价说法.

定义 7.1.3 设 $\mathscr{A}$ 是一个集族. 如果 $\mathscr{A}$ 的每一个有限子族都有非空的交(即如果 $\mathscr{A}_1$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个有限子族，则 $\bigcap_{A\in\mathscr{A}_1}A\neq\varnothing$)，则称 $\mathscr{A}$ 是一个**具有有限交性质的集族**.

定理 7.1.2 设 X 是一个拓扑空间. 则 X 是一个紧致空间当

且仅当 X 中的每一个具有有限交性质的闭集族都有非空的交.

证明 设 X 是一个紧致空间. 为证明 X 满足定理中所陈述的条件,设 $\mathscr{F}$ 是 X 中的一个具有有限交性质的闭集族. 我们要证明 $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F\neq\varnothing$. 如果 $\mathscr{F}=\varnothing$,则 $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$ 没有定义,此时当然 $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F=\varnothing$ 不成立. 下设 $\mathscr{F}\neq\varnothing$. 如果 $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F=\varnothing$,则令 $\mathscr{A}=\{F'\mid F\in\mathscr{F}\}$. 由于

$$\bigcup_{F\in\mathscr{F}} F'=\left(\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F\right)'=X$$

所以 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖. 于是 $\mathscr{A}$ 有一个有限子覆盖,设为 $\{F'_1,F'_2,\cdots,F'_n\}$. 从而

$$F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n=(F'_1\cup F'_2\cup\cdots F'_n)'=X'=\varnothing$$

这说明 $\mathscr{F}$ 不具有有限交性质. 得到的这个矛盾表明 $\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F\neq\varnothing$.

另一方面,设 X 中的每一个具有有限交性质的闭集族都有非空的交. 为证明 X 是一个紧致空间,设 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖. 我们需要证明 $\mathscr{A}$ 有一个有限子覆盖. 如果 $\mathscr{A}=\varnothing$,则 $\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A=\varnothing$,这蕴涵 $X=\varnothing$ 以及 $\mathscr{A}$ 的每一个子族都是 X 的覆盖. 以下假定 $\mathscr{A}\neq\varnothing$. 此时 $\mathscr{F}=\{A'\mid A\in\mathscr{A}\}$ 便是 X 中的一个非空闭集族,并且

$$\bigcap_{F\in\mathscr{F}} F=\bigcap_{A\in\mathscr{A}} A'=\left(\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\right)'=\varnothing$$

因此,它不具有有限交性质. 也就是说,它有一个有限子族其交为空集. 设 $\mathscr{F}$ 的这个有限子族为 $\{A'_1,A'_2,\cdots,A'_n\}$,则

$$A'_1\cap A'_2\cap\cdots\cap A'_n=\varnothing$$

因此

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=X$$

即 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个有限子覆盖. ■

如果 $\mathscr{B}$ 是紧致空间 X 的一个基,那么由 $\mathscr{B}$ 中的元素构成的 X 的一个覆盖当然是一个开覆盖,因此有有限子覆盖. 下述定理指出,为验证拓扑空间的紧致性,只要验证由它的某一个基中的元素组成的覆盖有有限子覆盖.

定理 7.1.3 设 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 X 的一个基，并且 X 的由 $\mathscr{B}$ 中的元素构成的每一个覆盖有一个有限子覆盖. 则 X 是一个紧致空间.

证明 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖. 对于每一个 $A\in\mathscr{A}$ 存在 $\mathscr{B}$ 的一个子族 $\mathscr{B}_A$ 使得 $A=\bigcup_{B\in\mathscr{B}_A}B$. 令 $\widetilde{\mathscr{A}}=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}\mathscr{B}_A$. 由于

$$\begin{aligned}\bigcup_{B\in\widetilde{\mathscr{A}}}B &= \bigcup_{B\in\bigcup_{A\in\mathscr{A}}\mathscr{B}_A}B\\ &=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}\Big(\bigcup_{B\in\mathscr{B}_A}B\Big)\\ &=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A=X\end{aligned}$$

故 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 是一个由 $\mathscr{B}$ 的元素构成的 X 的一个覆盖，所以有一个有限子覆盖，设为 $B_1,B_2,\cdots,B_n$. 对于每一个 B_i, $i=1,2,\cdots,n$，由于 $B_i\in\widetilde{\mathscr{A}}$，所以存在 $A_i\in\mathscr{A}$ 使得 $B_i\in\mathscr{B}_{A_i}$. 因此 $B_i\subset A_i$. 于是对于 $\mathscr{A}$ 的有限子族 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 有

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\supset B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n=X$$

也就是说 $\mathscr{A}$ 有一个有限子覆盖 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$. 这证明 X 是一个紧致空间. ■

定理 7.1.4 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$ 是一个连续映射. 如果 A 是 X 的一个紧致子集，则 $f(A)$ 是 Y 的一个紧致子集.

证明 设 $\mathscr{C}$ 是 $f(A)$ 的一个覆盖，它由 Y 中的开集组成. 对于每一个 $C\in\mathscr{C}$，由于 f 是一个连续映射，$f^{-1}(C)$ 是 X 中的一个开集；由于 $\bigcup_{C\in\mathscr{C}}C\supset f(A)$，故有

$$\begin{aligned}\bigcup_{C\in\mathscr{C}}f^{-1}(C)&=f^{-1}\Big(\bigcup_{C\in\mathscr{C}}C\Big)\\ &\supset f^{-1}(f(A))\supset A\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}=\{f^{-1}(C)\mid C\in\mathscr{C}\}$ 是 A 的一个开覆盖. 由于 A 是 X 的一个紧致子集，所以 $\mathscr{A}$ 有一个有限子族，设为 $\{f^{-1}(C_1),f^{-1}(C_2),$

$\cdots, f^{-1}(C_n)\}$，覆盖 A. 由于

$$\begin{aligned} & f^{-1}(C_1) \cup f^{-1}(C_2) \cup \cdots \cup f^{-1}(C_n) \\ = & f^{-1}(C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n) \supset A \end{aligned}$$

所以 $C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n \supset f(A)$，即 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 是 $\mathscr{C}$ 的一个子族并且覆盖 $f(A)$. 这证明 $f(A)$ 是 Y 的一个紧致子集. ■

由上述定理可见，拓扑空间的紧致性是由连续映射所保持的性质，因此是拓扑不变性质，也是一个可商性质.

由此可见，由于实数空间$\mathbb{R}$不是紧致空间，而每一个开区间都是与它同胚的，所以每一个开区间(作为子空间)都不是紧致空间.

定理 7.1.5 紧致空间中的每一个闭子集都是紧致子集.

证明 设 Y 是紧致空间 X 中的一个闭子集. 如果 $\mathscr{A}$ 是 Y 的一个覆盖，它由 X 中的开集构成. 则 $\mathscr{B} = \mathscr{A} \cup \{Y'\}$ 是 X 的一个开覆盖. 设 $\mathscr{B}_1$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个有限子族并且覆盖 X. 则 $\mathscr{B}_1 - \{Y'\}$ 便是 $\mathscr{A}$ 的一个有限子族并且覆盖 Y. 这证明 Y 是 X 的一个紧致子集. ■

定理 7.1.6 每一个拓扑空间必定是某一个紧致空间的开子空间.

证明 设$(X,\mathscr{T})$是一个拓扑空间. 令∞为任何一个不属于 X 的元素. 令

$$X^* = X \cup \{\infty\}$$
$$\mathscr{T}^* = \mathscr{T} \cup \mathscr{T}_1 \cup \{X^*\}$$

其中

$$\mathscr{T}_1 = \{E \subset X^* \mid X^* - E \text{ 是拓扑空间 } (X,\mathscr{T}) \text{ 中的一个紧致闭集}\}$$

首先验证 $\mathscr{T}^*$ 是集合 X^* 的一个拓扑:

(1) 根据定义，我们立即有: $X^* \in \mathscr{T}^*$ 和 $\varnothing \in \mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$.

(2) 设 $A^*, B^* \in \mathscr{T}^*$. 如果 A^* 或 B^* 等于 X^*，这时明显地

$A^* \cap B^*$ 等于 B^* 或者 A^*，因而属于 $\mathscr{T}^*$. 以下假设 A^*，$B^* \neq X^*$. 我们分三种情形讨论：

(a). 如果 $A^*, B^* \in \mathscr{T}$，则显然有 $A^* \cap B^* \in \mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$；

(b). 如果 $A^*, B^* \in \mathscr{T}_1$，则

$$X^* - A^* \cap B^* = (X^* - A^*) \cup (X^* - B^*)$$

作为 X 中的两个紧致子集的并也是一个紧致闭集(参见习题第4题)，所以 $A^* \cap B^* \in \mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}^*$；

(c). 当(a)和(b)两者都不成立时，不妨设 $A^* \in \mathscr{T}$ 和 $B^* \in \mathscr{T}_1$. 则 $B^* = B \cup \{\infty\}$，其中 B 是 X 中的一个开集. 于是这时有：$A^* \cap B^* = A \cap B \in \mathscr{T}$.

总之. 只要 $A^*, B^* \in \mathscr{T}^*$ 我们便有 $A^* \cap B^* \in \mathscr{T}^*$.

(3) 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{T}^*$ 的一个子族. 并且假定 $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \neq \varnothing$ 或 X^*. 这时必然有 $\mathscr{A} \neq \varnothing$ 和 $X^* \notin \mathscr{A}$. 也分为三种情形加以讨论：

(a). 当 $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}$ 时显然 $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \in \mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$；

(b). 当 $\mathscr{A} \subset \mathscr{T}_1$ 时，则

$$X^* - \left(\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A\right) = \bigcap_{A \in \mathscr{A}} (X^* - A)$$

是 X 中的一个闭集，并且对于任何 $A_0 \in \mathscr{A}$ 有

$$X^* - \left(\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A\right) \subset X^* - A_0$$

因此 $X^* - (\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A)$ 作为紧致空间 $X^* - A_0$ 中的一个闭集是紧致的. 所以

$$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \in \mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}^*$$

(c). 当(a)和(b)都不成立时，则有

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{A} \cap \mathscr{T} \neq \varnothing, \mathscr{A}_2 = \mathscr{A} \cap \mathscr{T}_1 \neq \varnothing$$

令

$$B_1 = \bigcup_{A \in \mathscr{A}_1} A, \; B_2 = \bigcup_{A \in \mathscr{A}_2} A$$

则有 $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A = B_1 \cup B_2$. 根据(a)，$B_1 \in \mathscr{T}$. 根据(b)，$B_2 \in \mathscr{T}_1$. 这时

$$X^* - B_1 \cup B_2 = (X^* - B_1) \cap (X^* - B_2)$$

$$=(X-B_1)\cap(X^*-B_2)$$

(注意上式中的第二个等号成立要用到$\infty\notin X^*-B_2$)它是紧致空间X^*-B_2的一个闭集,因此

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A=B_1\cup B_2\in\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}^*$$

以上证明了:只要$\mathscr{A}\subset\mathscr{T}^*$便有$\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\in\mathscr{T}^*$.

$(X^*,\mathscr{T}^*)$是一个拓扑空间的验证完成.下面证明它是一个紧致空间.

设$\mathscr{C}$是X^*的一个开覆盖.则存在$C\in\mathscr{C}$使得$\infty\in C$.于是$C\in\mathscr{T}_1$,因此X^*-C是紧致的,并且$\mathscr{C}-\{C\}$是它的一个开覆盖.于是$\mathscr{C}-\{C\}$有一个有限子族,设为$\tilde{\mathscr{C}}$,覆盖X^*-C.易见$\tilde{\mathscr{C}}\cup\{C\}$是$\mathscr{C}$的一个有限子族并且覆盖$X^*$.

最后我们指出拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间$(X^*,\mathscr{T}^*)$的一个开子空间.这是因为$\mathscr{T}=\mathscr{T}^*|_X$和$X$是$X^*$中的一个开集. ■

在以上定理的证明中由拓扑空间$(X,\mathscr{T})$构造出来的紧致空间$(X^*,\mathscr{T}^*)$,通常称为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的**一点紧化**.

由于非紧致空间(它是存在的)是它的一点紧化的一个子空间,所以紧致性不是可遗传的性质.以下定理表明紧致性是可积性质.

定理 7.1.7 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是$n\geqslant1$个紧致空间.则积空间$X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$也是一个紧致空间.

证明 我们只要证明$n=2$的情形.(理由参见§4.1.)

根据积空间的定义,集族

$$\mathscr{B}=\{U\times V\,|\,U\text{ 和 }V\text{ 分别是 }X_1\text{ 和 }X_2\text{ 中的开集}\}$$

是积空间$X_1\times X_2$的一个基.根据定理7.1.3,为证明积空间$X_1\times X_2$是一个紧致空间只要证明由$\mathscr{B}$的元素构成的$X_1\times X_2$的任何一个覆盖有一个有限子覆盖.

设$\mathscr{A}$是由$\mathscr{B}$中的元素构成的$X_1\times X_2$的一个覆盖.对于每一

个 $x\in X_1$，$X_1\times X_2$ 的子空间 $\{x\}\times X_2$ 同胚于 X_2，所以它是 $X_1\times X_2$ 中的一个紧致子集．$\mathscr{A}$ 是紧致子集 $\{x\}\times X_2$ 的一个开覆盖，因而有一个有限子覆盖，设为

$$\mathscr{A}_x=\{U_{x1}\times V_{x1},U_{x2}\times V_{x2},\cdots,U_{xn(x)}\times V_{xn(x)}\}$$

不妨假定 $\mathscr{A}_x$ 中的每一个元素都与 $\{x\}\times X_2$ 有非空的交．因为如果不是这样，我们将 $\mathscr{A}_x$ 中与 $\{x\}\times X_2$ 无交的元素从 $\mathscr{A}_x$ 中剔除之后，$\mathscr{A}_x$ 中剩下的元素仍然是 $\{x\}\times X_2$ 的一个覆盖．记

$$M_x=U_{x1}\cap U_{x2}\cap\cdots\cap U_{xn(x)}$$

它是 X_1 中的一个包含点 x 的开集．根据

$$\begin{aligned}&U_{x1}\times V_{x1}\cup U_{x2}\times V_{x2}\cup\cdots\cup U_{xn(x)}\times V_{xn(x)}\\ \supset\ &M_x\times V_{x1}\cup M_x\times V_{x2}\cup\cdots\cup M_x\times V_{xn(x)}\\ =\ &M_x\times(V_{x1}\cup V_{x2}\cup\cdots\cup V_{xn(x)})=M_x\times X_2\end{aligned}$$

可见 $\mathscr{A}_x$ 是集合 $M_x\times X_2$ 的一个覆盖．此外，集族 $\{M_x\mid x\in X_1\}$ 是紧致空间 X_1 的一个开覆盖．所以有一个有限子覆盖，设为 M_{x1}，M_{x2}，$\cdots$，M_{xm}．令

$$\widetilde{\mathscr{A}}=\mathscr{A}_{x_1}\cup\mathscr{A}_{x_2}\cup\cdots\cup\mathscr{A}_{x_m}$$

则有

$$\begin{aligned}\bigcup_{A\in\widetilde{\mathscr{A}}}A&\subset\Big(\bigcup_{A\in\mathscr{A}_{x_1}}A\Big)\cup\Big(\bigcup_{A\in\mathscr{A}_{x_2}}A\Big)\cup\cdots\cup\Big(\bigcup_{A\in\mathscr{A}_{x_m}}A\Big)\\&=(M_{x_1}\cup M_{x_2}\cup\cdots\cup M_{x_m})\times X_2=X_1\times X_2\end{aligned}$$

这也就是说 $\widetilde{\mathscr{A}}$ 是 $X_1\times X_2$ 的一个覆盖，它是 $\mathscr{A}$ 的一个有限子族．这样我们便证明了由基 $\mathscr{B}$ 构成的 $X_1\times X_2$ 的任何一个覆盖都有有限子覆盖．因此 $X_1\times X_2$ 是一个紧致空间． ■

习 题

1．证明：拓扑空间中的任何一个有限子集都是紧致子集．

2．设 $\mathscr{T}$ 和 $\mathscr{T}_1$ 是集合 X 的两个拓扑，并且 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}$．证明：当拓扑空间

$(X,\mathscr{T})$紧致时拓扑空间$(X,\mathscr{T}_1)$也紧致.

3. 假设某拓扑空间有一个由有限个元素构成的基,证明:这个拓扑空间是一个紧致空间.

4. 证明:拓扑空间中任何有限个紧致子集的并集还是一个紧致子集.

5. 证明:拓扑空间中任何一族紧致闭子集的交还是一个紧致子集.

6. 举例说明:拓扑空间中一个紧致子集的闭包可以不是紧致的.

7. 证明:n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$以及其中的任何一个球形邻域都不是紧致的.

8. 举例说明:紧致空间可以不满足第一可数性公理.

9. 证明:拓扑空间 X 是一个紧致空间当且仅当在它的一点紧化X^*中单点集$\{\infty\}$是一个开集.

10. 设 U 是拓扑空间X 中的一个开集.证明:如果 X 中的一个由紧致闭集构成的集族 $\mathscr{B}$ 满足条件$\bigcap_{B\in\mathscr{B}}B\subset U$,则存在 $\mathscr{B}$ 的一个有限子族$\{B_1,B_2,\cdots,B_n\}$满足条件

$$B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_n\subset U$$

§7.2 紧致性与分离性公理

在本节中我们把第六章中研究的诸分离性公理和紧致性放在一起进行考察.我们将会发现在紧致空间中分离性公理变得十分简单了.此外在本节的后半部分,我们给出从紧致空间到 Hausdorff 空间的连续映射的一个十分重要的性质.

定理 7.2.1 设 X 是一个 Hausdorff 空间.如果 A 是 X 的一个不包含点$x\in X$ 的紧致子集,则点 x 和紧致子集A 分别有开邻域U 和V 使得$U\cap V=\varnothing$.

证明 设 A 是一个紧致子集,$x\in A'$.对于每一个 $y\in A$,由于 X 是一个 Hausdorff 空间,故存在 x 的一个开邻域U_y 和y 的一个开邻域 V_y 使得 $U_y\cap V_y=\varnothing$.集族$\{V_y\mid y\in A\}$明显是紧致子集 A 的一个开覆盖,它有一个有限子族,设为$\{V_{y_1},V_{y_2},\cdots,$

$V_{y_n}\}$,覆盖 A.令 $U=\bigcap_{i=1}^{n}U_{y_i}$ 和 $V=\bigcup_{i=1}^{n}V_{y_i}$,它们分别是点 x 和集合 A 的开邻域.此外,由于对于每一个 $i=1,2,\cdots,n$ 有:

$$U\cap V_{y_i}=U_{y_1}\cap U_{y_2}\cap\cdots\cap U_{y_n}\cap V_{y_i}=\varnothing$$

所以

$$U\cap V=(U\cap V_{y_1})\cup(U\cap V_{y_2})\cup\cdots\cup(U\cap V_{y_n})=\varnothing \quad ■$$

推论 7.2.2　Hausdorff 空间中的每一个紧致子集都是闭集.

证明　设 A 是 Hausdorff 空间 X 的一个紧致子集.对于任何 $x\in X$,如果 $x\notin A$,则根据定理 7.2.1 可见 x 不是 A 的凝聚点.因此凡 A 的凝聚点都在 A 中,从而 A 是一个闭集.　■

推论 7.2.2 结合定理 7.1.5 可见:

推论 7.2.3　在一个紧致的 Hausdorff 空间中,一个集合是闭集的充分必要条件是它是一个紧致子集.　■

为了加强读者对定理 7.1.5,推论 7.2.2 和推论 7.2.3 中的几个简单而常用的结论的印象,重新简明地列举如下:

紧致空间:　闭集⇒紧致子集

Hausdorff 空间:　闭集⇐紧致子集

紧致的 Hausdorff 空间:　闭集⇔紧致子集

推论 7.2.4　每一个紧致的 Hausdorff 空间都是正则空间.

证明　设 A 是紧致的 Hausdorff 空间 X 的一个闭子集,x 是 X 中的一个不属于集合 A 的点.由于紧致空间中的闭子集是紧致的(参见定理 7.1.5),所以 A 是一个紧致子集.又根据定理 7.2.1,点 x 和集合 A 分别有开邻域 U 和 V 使得 $U\cap V=\varnothing$.这就证明了 X 是一个正则空间.　■

定理 7.2.5　设 X 是一个 Hausdorff 空间.如果 A 和 B 是 X 的两个无交的紧致子集,则它们分别有开邻域 U 和 V 使得 $U\cap V=\varnothing$.

证明 设 A 和 B 是 X 的两个无交的紧致子集. 对于任何 $x\in A$,根据定理 7.2.1,点 x 和集合 B 分别有开邻域 U_x 和 V_x 使得 $U_x\cap V_x=\varnothing$. 集族 $\{U_x\mid x\in A\}$ 是紧致子集 A 的一个开覆盖,它有一个有限子族,设为 $\{U_{x_1},U_{x_2},\cdots,U_{x_n}\}$,覆盖 A. 令

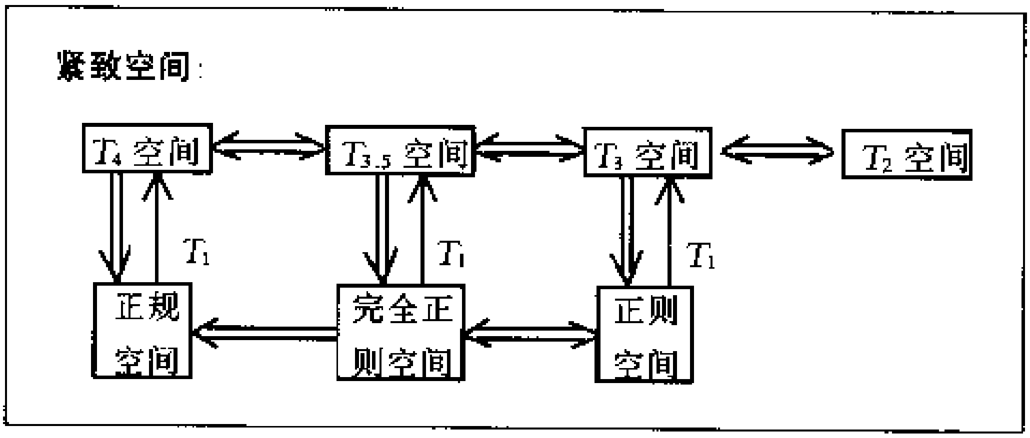
$$U=\bigcup_{i=1}^{n}U_{x_i},\quad V=\bigcap_{i=1}^{n}V_{x_i}$$

由于对于每一个 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $U_{x_i}\cap V=\varnothing$,所以 $U\cap V=\varnothing$. ■

由于 Hausdorff 空间的每一个闭子集都是紧致子集,所以根据定理 7.2.5 立即有:

推论 7.2.6 每一个紧致的 Huasdorff 空间都是 T_4 的. ■

这个结论也可以根据推论 7.2.4 和定理 6.4.3 直接推出. 根据这个推论联系着表 6.1 并且留意到每一个紧致空间都是 Lindelöff 空间这一事实,我们可有图表 7.1.[①]从这个图表中可以看出,在紧致空间中分离性公理显得特别简单.



图表 7.1: 紧致空间中的分离性公理

① 在这类带框的图表中,左上角的黑体字表示图表中用箭头表示的蕴涵关系(参见 148 页脚注)成立的先决条件. 例如我们从图表 7.1 中可以读到,一个紧致空间是正则的当且仅当它是完全正则的.

定理7.2.7　设 X 是一个正则空间. 如果 A 是 X 中的一个紧致子集, U 是 A 的一个开邻域, 则存在 A 的一个开邻域 V 使得 $\overline{V} \subset U$.

证明　设 A 是正则空间 X 中的一个紧致子集, U 是 A 的一个开邻域. 对于任何 $x \in A$, 点 x 有一个开邻域 V_x 使得 $V_x^- \subset U$. 集族 $\{V_x | x \in A\}$ 是紧致子集 A 的一个开覆盖, 它有有限子族, 设为 $\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$, 覆盖 A. 令 $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$, 它是 A 的一个开邻域, 并且

$$\overline{V} = (\bigcup_{i=1}^{n} V_i)^- = \bigcup_{i=1}^{n} V_i^- \subset U \quad ■$$

根据这个定理立即可见, 每一个紧致的正则空间都是正规空间. 然而这并不是什么新结论, 因为每一个紧致空间都是 Lindelöff 空间, 所以它明显地蕴涵于定理 6.4.3 中.

然而紧致的正规空间可以不是正则空间. 例子见于例 6.2.3, 在那个正规而非正则空间的例子中的拓扑空间只含有有限多个点, 当然会是紧致的.

定理 7.2.8　从紧致空间到 Hausdorff 空间的任何一个连续映射都是闭映射.

证明　设 X 是一个紧致空间, Y 是一个 Hausdorff 空间, $f: X \to Y$ 是一个连续映射. 如果 A 是紧致空间 X 中的一个闭子集, 则它是紧致的(参见定理 7.1.5), 因此它的象集 $f(A)$ 是 Hausdorff 空间 Y 中的一个紧致子集(参见定理 7.1.4), 所以又是闭集(参见推论 7.2.2). 这证明 f 是一个闭映射.　■

因为一个既单且满的开(或闭)的连续映射即是一个同胚, 所以我们有:

推论 7.2.9　从紧致空间到 Hausdorff 空间的任何一个既单且满的(即一一的)连续映射都是同胚.　■

习　题

1. 设 X 是一个 Hausdorff 空间, $\mathscr{A}$ 是它的一个非空集族, 由 X 的紧致子

集构成，证明：$\bigcap_{A\in\mathscr{A}}A$ 是 X 的一个紧致子集.

2. 设 X 是一个正则空间，A 是 X 的一个紧致子集，$Y\subset X$. 证明：如果 $\bar{A}\supset Y\supset A$，则 Y 是 X 的一个紧致子集.

3. (**Wallace 定理**)设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 证明：如果 A 和 B 分别是 X 和 Y 的紧致子集，W 是 $A\times B$ 在积空间 $X\times Y$ 中的一个开邻域，则存在 A 在 X 中的一个开邻域 U 和 B 在 Y 中的一个开邻域 V 使得 $U\times V\subset W$.

4. 根据第 3 题中的 Wallace 定理，推出定理 7.2.5.

5. 设 X 是一个紧致的 Hausdorff 空间. 证明：X 是可度量化的当且仅当 X 满足第二可数性公理.

6. 设 X 是一个 Hausdorff 空间，$\mathscr{A}$ 是由 X 中的紧致子集构成的一个非空集族. 证明：如果 $\mathscr{A}$ 中任意有限个元素的交是连通的，则这个集族的交 $\bigcap_{A\in\mathscr{A}}A$ 也是连通的.

§7.3　n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的紧致子集

定义 7.3.1　设(X,ρ)是一个度量空间，$A\subset X$. 如果存在实数 $M>0$ 使得 $\rho(x,y)<M$ 对于所有 $x,y\in A$ 成立，则称 A 是 X 的一个**有界子集**；如果 X 本身是一个有界子集，则称度量空间(X,ρ)是一个**有界度量空间**.

定理 7.3.1　紧致度量空间是有界的.

证明　设(X,ρ)是一个紧致度量空间. 由球形邻域构成的集族$\{B(x,1)\mid x\in X\}$是 X 的一个开覆盖，它有一个有限子覆盖，设为$\{B(x_1,1),B(x_2,1),\cdots,B(x_n,1)\}$. 令

$$M=\max\{\rho(x_i,x_j)\mid 1\leqslant i,j\leqslant n\}+2$$

如果 $x,y\in X$，则存在 $i,j,1\leqslant i,j\leqslant n$，使得 $x\in B(x_i,1)$ 和 $y\in B(x_j,1)$. 于是

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_i)+\rho(x_i,x_j)+\rho(x_j,y)<M \quad ■$$

因此度量空间中的每一个紧致子集都是有界子集. 特别 n 维

欧氏空间$\mathbb{R}^n$的每一个紧致子集都是有界的.

下面作为引理给出单位闭区间[0,1]是一个紧致空间的证明,尽管读者可能早已熟知这个结论.

引理 7.3.2 单位闭区间[0,1]是一个紧致空间.

证明 设 $\mathscr{A}$ 是[0,1]的一个开覆盖.令

$$P=\{x\in[0,1]\mid \mathscr{A}\text{有一个有限子族覆盖}[0,x]\}$$

它是[0,1]的一个子集.对于集合 P,我们依次证明:

(1) $P\neq\varnothing$.因为显然 $0\in P$;

(2) P 是一个开集.

设 $x\in P$.则 $\mathscr{A}$ 有一个有限子族,设为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$,覆盖 $[0,x]$.当 $x=1$ 时,易见 $P=[0,1]$,它是一个开集.因此 x 是 P 的一个内点.下设 $x<1$.这时对于某一个 i_0,$1\leqslant i_0\leqslant n$,有 $x\in A_{i_0}$.由于 A_{i_0} 是[0,1]中的一个开集,所以存在实数 $\varepsilon>0$ 使得 $[x,x+\varepsilon)\subset A_{i_0}$.于是 $[0,x+\varepsilon)\subset\bigcup_{i=1}^n A_i$.这蕴涵 $[0,x+\varepsilon)\subset P$.由于 $[0,x+\varepsilon)$ 是[0,1]中的一个包含 x 的开集,所以 x 是 P 的一个内点.以上证明了集合 P 中的任何一个点都是 P 的内点,所以它是一个开集.

(3) P 是一个闭集.

设 $x\in P'=[0,1]-P$.根据集合 P 的定义可见,$[x,1]\subset P'$,另外根据(1)可见,$0<x$.选取 $A\in\mathscr{A}$ 使得 $x\in A$.由于 A 是一个开集,所以存在实数 $\varepsilon>0$ 使得 $(x-\varepsilon,x]\subset A$.假如 $(x-\varepsilon,x]\cap P\neq\varnothing$,设 $z\in(x-\varepsilon,x]\cap P$.则 $\mathscr{A}$ 有一个有限子族 $\mathscr{A}_1$ 覆盖 $[0,z]$,因此 $\mathscr{A}$ 的有限子族 $\mathscr{A}_1\cup\{A\}$ 覆盖 $[0,x]$,这与 $x\notin P$ 矛盾.所以 $(x-\varepsilon,x]\cap P=\varnothing$,即 $(x-\varepsilon,x]\subset P'$.从而 $(x-\varepsilon,1]\subset P'$,因此 x 是 P' 的一个内点.这证明 P' 是一个开集,即 P 是一个闭集.

根据上述三条,P 是[0,1]中的一个既开又闭的非空子集.由于[0,1]是一个连通空间,所以 $P=[0,1]$.特别,$1\in P$.这也就是说 $\mathscr{A}$ 有一个有限子族覆盖[0,1].以上证明了[0,1]的任何一个开

覆盖有有限子覆盖,故$[0,1]$是一个紧致空间. ■

任何一个闭区间$[a,b](a<b)$,由于它和单位闭区间$[0,1]$同胚,所以是紧致的.并且作为紧致空间的积空间,可见 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中任何一个闭方体$[a,b]^n(a<b)$也是紧致空间.

定理 7.3.3 设 A 是n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的一个子集.则 A 是一个紧致子集当且仅当 A 是一个有界闭集.

证明 设 ρ 是n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的通常度量.

如果 $A\subset\mathbb{R}^n$是一个紧致子集,则根据定理 7.3.1,它是有界的;由于$\mathbb{R}^n$是一个 Hausdorff 空间,根据推论 7.2.2,它是一个闭集.

另一方面,设 $A\subset\mathbb{R}^n$是一个有界闭集.如果 $A=\varnothing$,则 A 是紧致的.下设 $A\neq\varnothing$.于是存在实数 $M>0$ 使得对于任何 $x,y\in A$ 有 $\rho(x,y)<M$.任意选取 $x_0\in A$,并且令 $N=M+\rho(0,x_0)$,其中 $0=(0,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$.容易验证(根据三角不等式)$A\subset[-N,N]^n$.因此 A 作为紧致空间$[-N,N]^n$ 中的一个闭子集必定是紧致的. ■

定理 7.3.4 设 X 是一个非空的紧致空间,$f:X\to\mathbb{R}$ 是一个连续映射.则存在 $x_0,x_1\in X$ 使得对于任意$x\in X$ 有

$$f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant f(x_1)$$

换言之,从非空的紧致空间到实数空间$\mathbb{R}$ 的任何一个连续映射都可以取到最大点与最小点.

证明 由于 X 紧致,故根据定理 7.1.4 可见 $f(X)$是实数空间$\mathbb{R}$ 中的一个紧致子集.由于$\mathbb{R}$是一个 Hausdorff 空间,所以$f(X)$是一个闭集.设 m 和M 分别为集合$f(X)$的下,上确界,则 $m,M\in f(X)$.因此存在 $x_0,x_1\in X$ 使得$f(x_0)=m$ 和 $f(x_1)=M$.根据上,下确界的定义立即可见,对于任何 $x\in X$ 有 $f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant f(x_1)$. ■

此外,由于 n 维单位球面S^n 是一个有界闭集,所以是紧致

的，n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$不是紧致的，而紧致性又是一个拓扑不变性质，所以：

定理 7.3.5 设 $m,n\in\mathbb{Z}_+$．则 n 维单位球面 S^n 与 m 维欧氏空间$\mathbb{R}^m$不同胚．

这是通过拓扑不变性质区分不同胚的拓扑空间的又一个例子．

习 题

1．举例说明度量空间中可以有有界闭集不是紧致子集．

2．设(X,ρ)是一个度量空间．X 中的任意两个非空子集A 和B 的距离$\rho(A,B)$定义为：

$$\rho(A,B)=\inf\{\rho(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

证明：如果 A 和 B 是度量空间(X,ρ)中的两个非空的紧致子集，则存在$x_0\in A$ 和 $y_0\in B$ 使得 $\rho(x_0,y_0)=\rho(A,B)$．

如果将上面题中的条件"A 和 B 是度量空间(X,ρ)中的两个非空的紧致子集"分别换成

(1) A 和B 是度量空间(X,ρ)中的两个非空的闭子集；或

(2) A 和B 是度量空间(X,ρ)中的两个非空子集，其中 A 是紧致的，B 是闭的，

相应的结论是否仍然正确？给出你的结论和论证．

3．设 X 是一个拓扑空间、Y 是一个紧致的 Hausdorff 空间，$y_0\in Y$．证明：如果 X 同胚于 $Y-\{y_0\}$，则 Y 同胚于 X 的一点紧化．

4．证明：n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$的一点紧化同胚于 n 维单位球面 S^n．

5．试在某一个拓扑空间中给出两个紧致子集使得它们的交不是紧致子集，并给出必要的证明．（提示：考虑积空间$\mathbb{R}\times\{0,1\}$，其中$\{0,1\}$取平庸拓扑．令

$$A=((0,1]\times\{0\})\cup(\{0\}\times\{1\})$$
$$B=([0,1)\times\{1\})\cup(\{1\}\times\{0\})$$

证明 A 和 B 满足此习题的要求．）

§7.4 几种紧致性以及其间的关系

读者已从数学分析的学习中知道了以下命题：实数空间$\mathbb{R}^n$中的一个子集A如果满足以下条件(1)～(4)中的任何一条，则满足其它的几条.

(1) A是一个有界闭集；

(2) A的每一个开覆盖都有有限子覆盖；

(3) A中的每一个无限子集都有凝聚点在A中；

(4) A中的每一个序列都有收敛的子序列收敛于A中的点.

这几个条件的重要意义，读者应当早就有所体会了.不难发现这四条中唯有(1)中涉及的概念有赖于度量，其余(2),(3)和(4)三条中所涉及的概念都只是牵连到拓扑.我们当然希望在一般的拓扑空间中还能建立条件(2),(3)和(4)的等价性；假如不能，讨论在何种条件下它们等价也是一件有意义的事.本节我们研究这个问题.为了研究问题时的方便，引进以下条件(5)作为讨论的中间站.

(5) A的每一个可数开覆盖都有有限子覆盖.

定义 7.4.1 设X是一个拓扑空间.如果X的每一个可数开覆盖都有有限子覆盖，则称拓扑空间X是一个**可数紧致空间**.

以下两个定理的证明十分容易，请读者自己补证.

定理 7.4.1 每一个紧致空间都是可数紧致空间. ■

定理 7.4.2 每一个 Lindelöff 的可数紧致空间都是紧致空间. ■

定义 7.4.2 设X是一个拓扑空间.如果X的每一个无限子集都有凝聚点，则称拓扑空间X是一个**列紧空间**.

定理 7.4.3 每一个可数紧致空间都是列紧空间.

证明 设X是一个可数紧致空间.为了证明它是一个列紧空间，我们只要证明它的每一个可数的无限子集都有凝聚点.现在用

反证法来证明这一点. 假设 X 有一个可数无限子集 A 没有凝聚点. 首先这蕴涵 A 是一个闭集. 此外对于每一个 $a\in A$,由于 a 不是 A 的凝聚点,所以存在 a 的一个开邻域 U_a 使得 $U_a\cap A=\{a\}$. 于是集族 $\{U_a\mid a\in A\}\cup\{A'\}$ 是 X 的一个开覆盖. 由于 X 是可数紧致空间,它有一个有限子覆盖,不妨设为

$$\{U_{a_1},U_{a_2},\cdots,U_{a_n},A'\}$$

由于 A' 与 A 无交,所以 $\{U_{a_1},U_{a_2},\cdots,U_{a_n}\}$ 必定覆盖 A. 因此,

$$A=(U_{a_1}\cup U_{a_2}\cup\cdots\cup U_{a_n})\cap A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

是一个有限集. 这是一个矛盾. ■

定义 7.4.3 设 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是一个由集合构成的序列,如果它满足条件: $A_i\supset A_{i+1}$ 对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$ 成立,即

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_i\supset A_{i+1}\supset\cdots$$

则称序列 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是一个**下降序列**.

在某一个拓扑空间中的一个由非空闭集构成的下降序列也叫做一个**非空闭集下降序列**.

引理 7.4.4 设 X 是一个拓扑空间. 则拓扑空间 X 是一个可数紧致空间当且仅当由 X 中任何一个非空闭集下降序列 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 有非空的交,即 $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}A_i\neq\varnothing$.

证明 设可数紧致空间 X 中的非空闭集下降序列 $\{F_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 使得 $\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}F_i=\varnothing$. 于是 $\{F'_i\mid i\in\mathbb{Z}_+\}$ 是 X 的一个开覆盖,它有一个有限子覆盖,设为 $\{F'_{i_1},F'_{i_2},\cdots,F'_{i_n}\}$. 由此可得

$$\begin{aligned}\varnothing&=X'\\&=\Big(\bigcup_{j=1}^{n}F'_{i_j}\Big)'\\&=\bigcap_{j=1}^{n}F_{i_j}=F_{\max\{i_1,i_2,\cdots,i_n\}}\end{aligned}$$

这是一个矛盾.

另一方面,设拓扑空间 X 中的每一个非空闭集下降序列都有

非空的交.如果 X 不是一个可数紧致空间,则 X 有一个可数开覆盖,设为$\{U_1,U_2,\cdots\}$,没有有限子覆盖.对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,令

$$V_i=\bigcup_{j=1}^{i}U_j$$

则$\{V_1,V_2,\cdots\}$也是 X 的一个开覆盖,没有有限子覆盖,并且满足条件:$V_1\subset V_2\subset\cdots$因此 $V'_1,V'_2,\cdots$是一个非空闭集下降序列,所以$\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}V'_i\neq\varnothing$.由此可见$\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+}V_i\neq X$.也就是说$\{V_1,V_2,\cdots\}$不是 X 的一个覆盖,这是一个矛盾. ■

定理 7.4.5 每一个列紧的 T_1 空间都是可数紧致空间.

证明 设 X 是一个列紧的 T_1 空间.如果 X 不是一个可数紧致空间,则根据引理 7.4.4,X 中有一个非空闭集下降序列$\{F_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$使得$\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}F_i=\varnothing$.在每一个 F_i 中选取一点 x_i,并且考虑集合 $A=\{x_1,x_2,\cdots\}$.

如果 A 是一个有限集,则必有一点 $x\in A$ 和一个正整数的严格递增序列 $n_1,n_2,\cdots$使得 $x=x_{n_1}=x_{n_2}=\cdots$.于是对于任何 $i\in\mathbb{Z}_+$有 $x\in F_i$.这是因为,

$$x\in F_{n_i}\subset F_{n_i-1}\subset\cdots\subset F_i$$

于是 $x\in\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}F_i$,这与反证假设矛盾.

设 A 是一个无限集.由于 X 是一个列紧空间,所以 A 有一个凝聚点,设为 y.由于 X 是一个 T_1 空间(它的每一个有限子集都是闭集),易见对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,点 y 也是集合 $A_i=\{x_i,x_{i+1},\cdots\}$的一个凝聚点;又由于 $A_i\subset F_i$,故 $y\in F_i$.因此 $y\in\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}F_i$.这也与反证假定矛盾. ■

定义 7.4.4 设 X 是一个拓扑空间.如果 X 中的每一个序列都有一个收敛的子序列,则称拓扑空间 X 是一个**序列紧致空间**.

定理 7.4.6 每一个序列紧致空间都是可数紧致空间.

证明 设 X 是一个序列紧致空间,$\{F_1,F_2,\cdots\}$是 X 中的一个非空闭集下降序列.在每一个 F_i 中任意选取一点 $x_i\in F_i$,序列

$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$有一个收敛的子序列$\{x_{n_i}\}$，假设它收敛于$y$. 对于每一个$i\in\mathbb{Z}_+$，由于$x_{n_i}, x_{n_{i+1}}, \cdots \in F_{n_i}\subset F_i$以及$F_i$是一个闭集，所以$y\in F_i$. 于是$y\in\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}F_i$. 这证明$\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}F_i\neq\varnothing$. 根据引理 7.4.4, X是一个可数紧致空间. ■

定理 7.4.7　每一个满足第一可数性公理的可数紧致空间都是序列紧致空间.

证明　设X是一个满足第一可数性公理的可数紧致空间，$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是$X$中的一个序列. 对于每一个$i\in\mathbb{Z}_+$，令$E_i=\{x_i, x_{i+1}, \cdots\}$和$F_i=E_i^-$. 于是$F_1, F_2, \cdots$是拓扑空间$X$中的一个非空闭集下降序列，因此根据引理 7.4.4，我们有$\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}F_i\neq\varnothing$. 任意选取$x\in\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}F_i$.

由于X满足第一可数性公理，根据定理 5.1.8，在点x处有一个可数邻域基$\{U_1, U_2, \cdots\}$满足条件：$U_1\supset U_2\supset\cdots$. 对于每一个$i\in\mathbb{Z}_+$，由于$x\in F_i=E_i^-$，故$U_j\cap E_i\neq\varnothing$对于任意$j\in\mathbb{Z}_+$成立. 令

$$N_1=\min\{j\in\mathbb{Z}_+\mid x_j\in U_1\cap E_1\}$$

对于每一个$i>1$，令

$$N_i=\min\{j\in\mathbb{Z}_+\mid x_j\in U_i\cap E_{N_{i-1}+1}\}$$

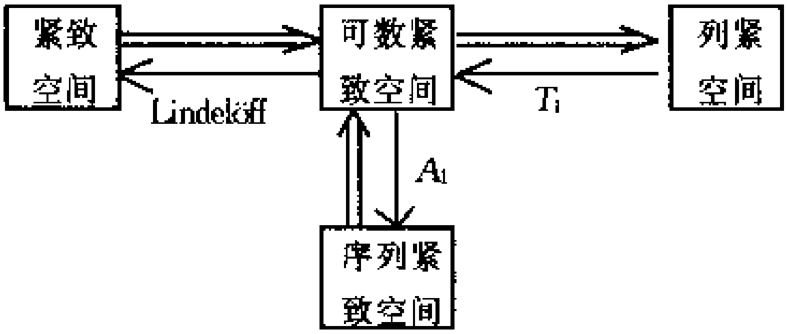
于是$N_1, N_2, \cdots$是一个严格递增的正整数序列. 并且$x_{N_i}\in U_i$对于每一个$i\in\mathbb{Z}_+$成立.

我们来证明序列$\{x_i\}$的子序列$\{x_{N_i}\}$收敛于x：设U是y的一个邻域. 存在某一个$k\in\mathbb{Z}_+$使得$U_{N_k}\subset U$，于是当$i>k$时我们有$x_{N_i}\in U_i\subset U_k\subset U$. ■

根据本节中的各个定理，我们可以得到图表 7.2.[①]

---

① 参见第 148 页脚注.



图表 7.2: 各种紧致性之间的关系

根据这个表立即可以知：

推论 7.4.8 设 X 是一个满足第二可数性公理的 T_1 空间，A 是 X 的一个子集. 则下列条件等价：

(1) A 的每一个开覆盖都有有限子覆盖；

(2) A 的每一个可数开覆盖都有有限子覆盖；

(3) A 中的每一个序列都有子序列收敛于 A 中的点；

(4) A 中的每一个无限子集都有凝聚点在 A 中. ■

特别，对于 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集以上推论成立，并且推论中的每一个条件都等价于 A 是一个有界闭集.

习　题

1. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$ 是一个连续映射. 证明：

(1) 如果 X 是一个可数紧致空间，则 $f(X)$ 也是一个可数紧致空间；

(2) 如果 X 是一个序列紧致空间，则 $f(X)$ 也是一个序列紧致空间.

2. 令 $\mathscr{T}$ 是 $\mathbb{Z}_+$ 的以 $\mathscr{B}$ 为它的一个基的拓扑，其中

$$\mathscr{B}=\{\{2n-1,2n\}\mid n\in\mathbb{Z}_+\}$$

证明：拓扑空间 $(\mathbb{Z}_+,\mathscr{T})$ 是一个列紧空间但不是紧致空间，不是可数紧致空间，不是序列紧致空间.

3. 举出适当的拓扑空间 X, Y 和连续映射 $f:X\to Y$ 使得 X 是一个列紧空间，而 $f(X)$ 不是列紧空间.

4. 设 X 和 Y 都是序列紧致空间. 证明：积空间 $X\times Y$ 也是一个序列紧

致空间.

5. 设 X 和 Y 都是可数紧致空间. 证明:积空间 $X\times Y$ 也是一个可数紧致空间.

6. 设 X 和 Y 都是列紧空间. 积空间 $X\times Y$ 一定是列紧空间吗? 给出你的结论并证明或举出反例.

§7.5 度量空间中的紧致性

由于度量空间满足第一可数性公理,同时也是 T_1 空间,所以上一节中的讨论(参见表 7.2)告诉我们,一个度量空间是可数紧致空间当且仅当它是列紧空间,也当且仅当它是序列紧致空间. 但由于度量空间不一定就是 Lindelöff 空间,所以从定理 7.4.2 并不能断定列紧的度量空间是否一定就是紧致空间. 本节研究这个问题并给出肯定的回答.

定义 7.5.1 设 A 是度量空间 (X,ρ) 中的一个非空子集. 集合 A 的**直径** $\mathrm{diam}(A)$ 定义为

$$\mathrm{diam}(A)=\begin{cases}\sup\{\rho(x,y)\mid x,y\in A\} & \text{如果 } A \text{ 是有界的}\\ \infty & \text{如果 } A \text{ 是无界的}\end{cases}$$

定义 7.5.2 设 (X,ρ) 是一个度量空间, $\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖. 实数 $\lambda>0$ 称为开覆盖 $\mathscr{A}$ 的一个 **Lebesgue 数**,如果对于 X 中的任何一个子集 A,只要 $\mathrm{diam}(A)<\lambda$,则 A 包含于开覆盖 $\mathscr{A}$ 的某一个元素之中.

Lebesgue 数不一定存在. 例如考虑实数空间 $\mathbb{R}$ 的开覆盖

$$\{(-\infty,1)\}\cup\left\{\left(n-\frac{1}{n},n+1+\frac{1}{n}\right)\Big| n\in\mathbb{Z}_+\right\}$$

则任何一个正实数都不是它的 Lebesgue 数. (请读者自补证明.)

定理 7.5.1 [Lebesgue 数定理] 序列紧致的度量空间的每一个开覆盖有一个 Lebesgue 数.

证明 设 X 是一个序列紧致的度量空间，$\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖. 假若开覆盖 $\mathscr{A}$ 没有 Lebesgue 数，则对于任何 $i\in\mathbb{Z}_+$，实数 $\frac{1}{i}$ 不是 $\mathscr{A}$ 的 Lebesgue 数，所以 X 有一个子集 E_i 使得 $\operatorname{diam}(E_i)<\frac{1}{i}$ 并且 E_i 不包含于 $\mathscr{A}$ 的任何元素之中.

在每一个 E_i 之中任意选取一个点 x_i，由于 X 是一个序列紧致空间，所以序列 $x_1,x_2,\cdots$ 有一个收敛的子序列 $x_{N_0},x_{N_1},\cdots$ 设这个子序列收敛于 $y\in X$. 由于 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖，故存在 $A\in\mathscr{A}$ 使得 $y\in A$，并且存在实数 $\varepsilon>0$ 使得球形邻域 $B(y,\varepsilon)\subset A$. 由于序列 $x_{N_0},x_{N_1},\cdots$ 收敛于 y，所以存在整数 $M>0$ 使得当 $i>M$ 时 $x_{N_i}\in B\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$. 令 k 为任意一个整数，使得 $k>M+\frac{2}{\varepsilon}$. 则对于任何 $z\in E_{N_k}$ 有

$$\rho(z,y)\leqslant\rho(z,x_{N_k})+\rho(x_{N_k},y)<\varepsilon$$

这证明

$$E_{N_k}\subset B(y,\varepsilon)\subset A\in\mathscr{A}$$

与 E_{N_k} 的选取矛盾. ■

定理 7.5.2 *每一个序列紧致的度量空间都是紧致空间.*

证明 设 X 是一个序列紧致的度量空间，$\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖. 根据定理 7.5.1，X 的开覆盖 $\mathscr{A}$ 有一个 Lebesgue 数，设为 $\lambda>0$.

令 $\mathscr{B}=\left\{B\left(x,\frac{\lambda}{3}\right)\right\}$. 它是 X 的一个开覆盖. 我们先来证明 $\mathscr{B}$ 有一个有限子覆盖.

假设 $\mathscr{B}$ 没有有限子覆盖. 任意选取一点 $x_1\in X$. 对于 $i>1$，假定点 $x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}$ 已经取定，由于

$$\left\{B\left(x_1,\frac{\lambda}{3}\right),B\left(x_2,\frac{\lambda}{3}\right),\cdots,B\left(x_{i-1},\frac{\lambda}{3}\right)\right\}$$

不是 X 的覆盖,选取 $x_i \in X$ 使得 $x_i \notin \bigcup_{j=1}^{i-1} B\left(x_j, \frac{\lambda}{3}\right)$. 按照归纳原则,序列 $x_1, x_2, \cdots$ 已经取定. 易见对于任何 $i, j \in \mathbb{Z}_+, i \neq j$,有 $\rho(x_i, x_j) > \frac{\lambda}{3}$. 序列 $x_1, x_2, \cdots$ 没有任何收敛的子序列.(因为任何 $y \in X$ 的球形邻域 $B\left(y, \frac{\lambda}{6}\right)$ 中最多只能包含这个序列中的一个点.)这与 X 是序列紧致空间相矛盾.

现在设 $\left\{B\left(x_1, \frac{\lambda}{3}\right), B\left(x_2, \frac{\lambda}{3}\right), \cdots, B\left(x_n, \frac{\lambda}{3}\right)\right\}$ 是开覆盖 $\mathscr{B}$ 的一个有限子覆盖. 由于其中每一个元素的直径都小于 λ,所以对于每一个 $i = 1, 2, \cdots, n$ 存在 $A_i \in \mathscr{A}$ 使得 $B\left(x_i, \frac{\lambda}{3}\right) \subset A_i$. 于是,$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子覆盖. ■

因此,根据定理 7.5.2 以及前一节中的讨论可见:

定理 7.5.3　设 X 是一个度量空间. 则下列条件等价:

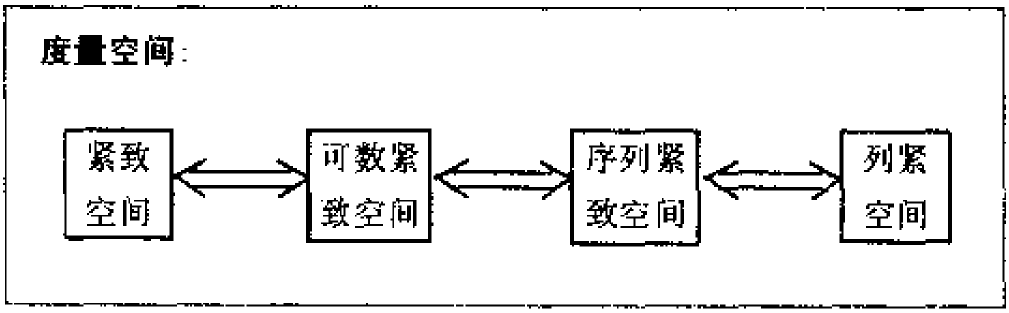
(1) X 是一个紧致空间;

(2) X 是一个列紧空间;

(3) X 是一个序列紧致空间;

(4) X 是一个可数紧致空间. ■

我们将定理 7.5.3 的结论列为图表 7.3[1]以示强调.



图表 7.3: 度量空间中的紧致性

① 参见第 148 页脚注.

习 题

1. 设(X,ρ)和(Y,d)是两个度量空间，$f:X\to Y$.映射 f 称为是**一致连续的**，如果对于任何实数 $\varepsilon>0$，存在实数 $\delta>0$，使得当 $x,y\in X$ 并且$\rho(x,y)<\delta$ 时有 $d(f(x),f(y))<\varepsilon$.证明：

(1) 任何一个一致连续映射都是连续的；

(2) 从紧致度量空间到度量空间的任何一个连续映射都是一致连续的.

2. 设(X,ρ)和(Y,d)是两个度量空间，$f:X\to Y$.映射 f 称为是一个**压缩映射**，如果存在实数 $\alpha\in(0,1)$使得对于任何 $x,y\in X$

$$d(f(x),f(y))\leqslant\alpha\rho(x,y)$$

设 X 是一个紧致的度量空间，$f:X\to X$ 是一个压缩映射.证明：f 有唯一的一个不动点，即存在唯一的一个点 $z\in X$ 使得 $f(z)=z$.

3. 拓扑空间 X 称为是**伪紧致的**，如果对于每一个连续映射 $f:X\to\mathbb{R}$，象集 $f(X)$是实数空间$\mathbb{R}$中的一个有界集.证明：一个度量空间是紧致的当且仅当它是伪紧致的.

§7.6 局部紧致空间，仿紧致空间

§7.2 中的讨论指出，在紧致空间中分离性公理系统变得十分简单.(参见图表 7.1).但要求一个拓扑空间紧致对于拓扑空间所施加的限制是比较严酷的，以至于通常最重要的一些拓扑空间类，如 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$等均不能被认为是紧致空间.在这一节中，我们对紧致性这个概念从两方面加以推广：一是推广为局部紧致空间，另一是推广为仿紧致空间.研究的结果表明，这两者都在很大的程度上保持着紧致空间的特色.

定义 7.6.1 设 X 是一个拓扑空间.如果 X 中的每一个点都有一个紧致的邻域，则称拓扑空间 X 是一个**局部紧致空间**.

由定义立即可见，每一个紧致空间都是局部紧致空间，因为这

紧致空间本身便是它的任何一个点的紧致邻域. n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$也是局部紧致空间,因为其中的任何一个球形邻域的闭包都是紧致的.

定理 7.6.1 *每一个局部紧致的 Hausdorff 空间都是正则空间.*

证明 设 X 是一个局部紧致的 Hausdorff 空间. 设 $x\in X$, U 是 x 的一个开邻域. 令 D 是 x 的一个紧致邻域. 作为 Hausdorff 空间 X 的紧致子集,D 是 X 中的闭集. 根据推论 7.2.4,D 作为子空间是一个紧致的 Hausdorff 空间,所以是一个正则空间. 集合 $W=U\cap D^\circ$ 是 x 在子空间 D 中的一个开邻域,其中 D° 是集合 D 在拓扑空间 X 中的内部. 从而 x 在子空间 D 中有一个开邻域 V 使得它在子空间 D 中的闭包包含于 W. 一方面,V 是子空间 D 中的一个开集,并且又包含于 W,因此 V 是子空间 W 中的一个开集,然而 W 是拓扑空间 X 中的一个开集,所以 V 也是拓扑空间 X 中的开集. 另一方面,由于 D 是 X 中的一个闭集,所以 V 在子空间 D 中的闭包便是 V 在拓扑空间 X 中的闭包 $\overline{V}$. 综上所述,点 x 在拓扑空间 X 中的开邻域 V 使得 $\overline{V}\subset W\subset U$. 这证明拓扑空间 X 是一个正则空间. ■

定理 7.6.2 *设 X 是一个局部紧致的正则空间,$x\in X$. 则点 x 的所有紧致邻域构成的集族是拓扑空间 X 在点 x 处的一个邻域基.*

证明 设 U 是 $x\in X$ 的一个开邻域. 令 D 为 x 的一个紧致邻域. 则 $U\cap D^\circ$ 是 x 的一个开邻域. 由于 X 是一个正则空间,故存在 x 的开邻域 V 使得 $\overline{V}\subset U\cap D^\circ$. 闭集 $\overline{V}$ 是 x 的一个闭邻域,并且作为紧致空间 D 中的闭子集,它是紧致的. 以上证明了在 x 的任何开邻域 U 中包含着某一个紧致邻域 $\overline{V}$. ■

从前面的两个定理立即推出:

推论 7.6.3 *设 X 是一个局部紧致的 Hausdorff 空间,$x\in X$. 则点 x 的所有紧致邻域构成的集族是拓扑空间 X 在点 x 处的*

一个邻域基. ■

定理 7.6.4 每一个局部紧致的正则空间都是完全正则空间.

证明 设 X 是一个局部紧致的正则空间.我们验证 X 是一个完全正则空间如下.设 $x\in X$ 和 B 是 X 中的一个闭集,使得 $x\notin B$.于是 $U=B'$ 是 x 的一个开邻域.根据定理 7.6.2,存在 x 的一个紧致闭邻域 V 使得 $V\subset U$.V 作为 X 的子空间是紧致的正则空间(V 是正则的是因为它是正则空间的闭子集),因此是完全正则的.因而存在连续映射 $g:V\to[0,1]$ 使得 $g(x)=0$ 和对于任何 $y\in V-V^{\circ}$ 有 $g(y)=1$.

定义映射 $h:V^{\circ\prime}\to[0,1]$ 使得对于任何 $z\in V^{\circ\prime}$ 有 $h(z)=1$.显然 h 是一个连续映射.

定义映射 $f:X\to[0,1]$ 使得对于任何 $z\in X$,

$$f(z)=\begin{cases}g(z) & \text{如果 } z\in V\\ h(z) & \text{如果 } z\in V^{\circ\prime}\end{cases}$$

首先,映射 f 的定义是确切的,因为如果 $z\in V^{\circ\prime}\cap V$,则有 $g(z)=1=h(z)$.其次,V 和 $V^{\circ\prime}$ 都是 X 中的闭集,从而根据黏结引理(定理 4.5.4),f 是连续的.最后显然我们有 $f(x)=0$ 和对于任何 $z\in B\subset V^{\circ\prime}$ 有 $f(z)=1$. ■

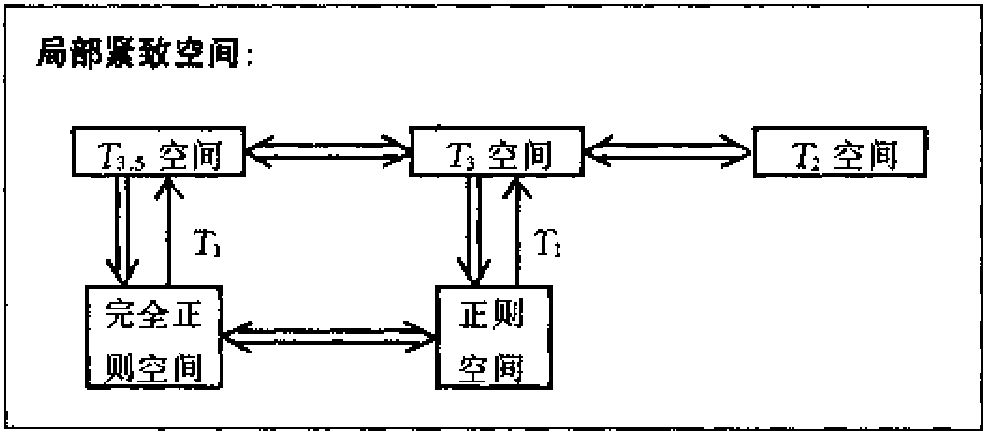
根据定理 7.6.1 和定理 7.6.4 以及图表 6.1,立即可以得到图表 7.4.[①]

定义 7.6.2 设集族 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是集合 X 的覆盖.如果 $\mathscr{A}$ 中的每一个元素包含于 $\mathscr{B}$ 的某一个元素之中,则称 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个加细.

显然,如果 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个子覆盖,则 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个加细.

---

① 参见第 148 页脚注.



图表 7.4: 局部紧致空间中的分离性公理

定义 7.6.3 设 X 是一个拓扑空间，$\mathscr{A}$ 是 X 的子集 A 的一个覆盖. 如果对于每一个 $x \in A$，点 x 有一个邻域 U 仅与 $\mathscr{A}$ 中有限个元素有非空的交，即

$$\{A \in \mathscr{A} \mid A \cap U \neq \varnothing\}$$

是一个有限集，则称 $\mathscr{A}$ 是集合 A 的一个**局部有限覆盖**.

有限覆盖当然是局部有限的覆盖.

例如，在实数空间 $\mathbb{R}$ 中令

$$\mathscr{A} = \{(n-1, n+1) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$
$$\mathscr{B} = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$$

则 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 都是 $\mathbb{R}$ 的开覆盖，并且 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的一个加细，而 $\mathscr{B}$ 却不是 $\mathscr{A}$ 的加细. 此外 $\mathscr{A}$ 是一个局部有限的覆盖，然而 $\mathscr{B}$ 却不是局部有限的.

定义 7.6.4 设 X 是一个拓扑空间. 如果 X 的每一个开覆盖都有一个局部有限的开覆盖是它的加细，则称拓扑空间 X 是一个**仿紧致空间**.

例如，紧致空间自然是仿紧致的. 离散空间也是仿紧致的，因为所有单点集构成的集族是离散空间的一个开覆盖并且是它的任何一个开覆盖的局部有限的加细.

定理 7.6.5 每一个仿紧致的正则空间都是正规空间.

证明 设 X 是一个仿紧致的正则空间. 兹验证 X 是一个正规空间如下. 设 A 是 X 中的一个闭集, U 是 A 的一个开邻域. 对于每一个 $a\in A$, 点 a 有一个开邻域 U_a 使得 $U_a^-\subset U$. 从而集族 $\mathscr{A}=\{U_a\mid a\in A\}\cup A'$ 是 X 的一个开覆盖, 它有一个局部有限的加细, 设为 $\mathscr{B}$. 令 $\mathscr{C}=\{B\in\mathscr{B}\mid B\cap A\neq\varnothing\}$. 则 $\mathscr{C}$ 是集合 A 的一个局部有限的开覆盖. 于是 $V=\bigcup_{C\in\mathscr{C}}C$ 是 x 的一个开邻域. 以下证明 $\overline{V}\subset U$.

对于任何 $C\in\mathscr{C}$, C 包含于 $\mathscr{A}$ 的某一个元素 U_a 之中, 所以 $\overline{C}\subset U$. 如果 $x\in\overline{V}$, 由于 $\mathscr{C}$ 是局部有限的, 所以 x 有一个邻域 W 只与 $\mathscr{C}$ 中有限个元素 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 有非空的交. 于是

$$\begin{aligned} x &\in (C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n)^- \\ &= C_1^-\cup C_2^-\cup\cdots\cup C_n^-\subset U \end{aligned}$$

这就证明了 $\overline{V}\subset U$. ■

定理 7.6.6 每一个仿紧致的 Hausdorff 空间都是正则空间, 因而也是正规空间.

证明 设 X 是一个仿紧致的 Hausdorff 空间. 兹验证 X 是一个正则空间如下.

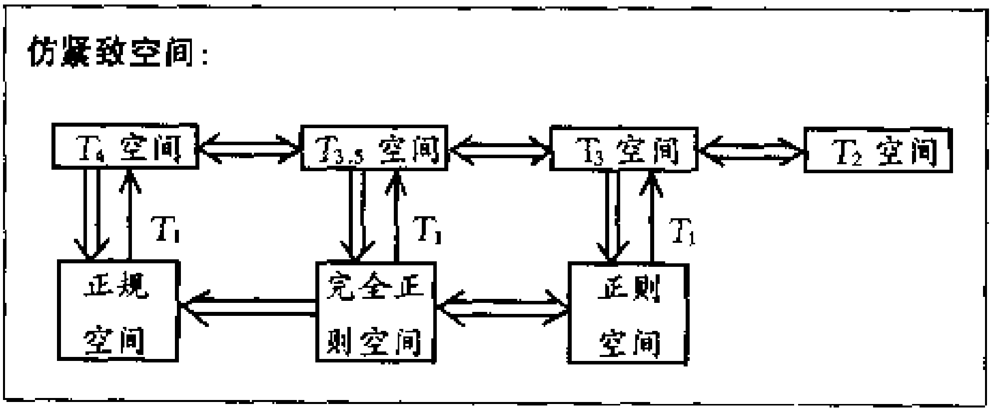
设 $x\in X$, B 是 X 中的一个不包含点 x 的闭集. 对于每一个 $b\in B$, 存在 x 的一个开邻域 U_b 和 b 的一个开邻域 V_b 使得 $U_b\cap V_b=\varnothing$. 特别 $x\notin V_b^-$. 集族 $\mathscr{A}=\{V_b\mid b\in B\}\cup B'$ 是 X 的一个开覆盖, 它有一个局部有限的加细, 设为 $\mathscr{B}$. 令 $\mathscr{C}=\mathscr{B}-\{B'\}$. 集族 $\mathscr{C}$ 是 B 的一个局部有限的开覆盖. 令 $V=\bigcup_{C\in\mathscr{C}}C$. V 是闭集 B 的一个开邻域. 我们有 $x\notin\overline{V}$. (因为 x 有一个邻域 W 只与 $\mathscr{B}$ 中有限个元素有非空的交, 因此, W 也只与 $\mathscr{C}$ 中有限个元素, 设为 $C_1, C_2, \cdots, C_n$, 有非空的交. 如果 $x\in\overline{V}$, 则

$$x\in(C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n)^-=C_1^-\cup C_2^-\cup\cdots\cup C_n^-$$

因此存在某一个 $C_i\in\mathscr{C}$ 使得 $x\in C_i^-$. 然而易见 C_i 包含于某一个

V_b 之中,这导致 $x\in V_b^-$. 于是得到矛盾.)因此,$U=V^{-\prime}$是 x 的一个开邻域. 此外显然 $U\cap V=\varnothing$. ■

根据定理 7.6.5,定理 7.6.6 以及图表 6.1 可见,对于仿紧致情形我们有图表 7.5[①],它完全类似于图表 7.1.



图表 7.5: 仿紧致空间中的分离性公理

本节最后我们证明一个在研究流形上的微积分时经常要用到的定理(定理 7.6.8). 为此先给一个引理.

引理 7.6.7 设 X 是一个满足第二可数性公理的局部紧致的 Hausdorff 空间. 则 X 有一个开覆盖 $\{V_1,V_2,\cdots\}$ 满足条件:对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,闭包 V_i^- 是一个包含于 V_{i+1} 的紧致子集.

证明 我们分两步来证明这个引理.

第一步,X 有一个开覆盖 $\{U_1,U_2,\cdots\}$,使得对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,$U_i\subset U_{i+1}$ 并且闭包 U_i^- 是紧致的.

为证此,对于每一个 $x\in X$,先选取 x 的一个紧致邻域 D_x,由于拓扑空间 X 是一个 Hausdorff 空间,所以 D_x 是闭集;然后,令 $E_x=D_x^\circ$. E_x 是 x 的一个开邻域,并且闭包 E_x^- 由于是紧致子空间 D_x 中的闭集,所以是紧致的. 由于 X 满足第二可数性公理,所以它是 Lindelöff 空间,因此 X 的开覆盖 $\{E_x\mid x\in X\}$ 有一个可数子

① 参见第 148 页脚注

覆盖,设为$\{W_1, W_2, \cdots\}$. 注意:对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,闭包 W_i^- 是紧致的.

对于每一个 $n\in\mathbb{Z}_+$,令 $U_n=\bigcup_{i=1}^n W_i$. 容易验证$\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是 X 的一个开覆盖,并且对于每一个 $n\in\mathbb{Z}_+$,U_n 的闭包

$$U_n^-=(W_1\cup W_2\cup\cdots\cup W_n)^-=\bigcup_{i=1}^n W_i^-$$

作为有限个紧致子集的并,是紧致的.

第二步:完成引理的证明.

选取 X 的一个开覆盖$\{U_1, U_2, \cdots\}$满足第一步中的要求. 令 $V_1=U_1$. 对于 $n>1$,假设开集 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 已经定义,满足条件:它们的闭包都是紧致的,并且 $V_i^-\subset V_{i+1}$对于 $i=1,2,\cdots,n-1$ 成立. 这时,由于$\{U_1, U_2, \cdots\}$是 V_n^- 的一个开覆盖,有一个有限子覆盖. 从此易于看出,存在某一个整数 $N>n+1$ 使得 $V_n^-\subset U_N$. 令 $V_{n+1}=U_N$. 根据归纳原则,$\{V_1, V_2, \cdots\}$定义完成. 如果 $x\in X$,由于$\{U_1, U_2, \cdots\}$是 X 的一个覆盖,所以存在某一个 $n\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $x\in U_n$,然而根据我们对 V_n 的选取,明显地有 $U_n\subset V_n$,因此 $x\in V_n$. 于是$\{V_1, V_2, \cdots\}$是 X 的一个覆盖. 此外$\{V_1, V_2, \cdots\}$显然满足定理对它的其他要求. ■

定理 7.6.8 *每一个满足第二可数性公理的局部紧致的 Hausdorff 空间都是仿紧致空间.*

证明 设 X 是一个满足第二可数性公理的局部紧致的 Hausdorff 空间. 根据引理 7.6.7,选取 X 的一个开覆盖$\{V_1, V_2, \cdots\}$使得满足条件:对于每一个 $n\in\mathbb{Z}_+$,V_i 的闭包 V_i^- 是包含于 V_{i+1}的一个紧致子集.

对于每一个 $n\in\mathbb{Z}_+$,令

$$K_n=V_n^- - V_{n-1}$$
$$J_n=V_{n+1} - V_{n-2}^-$$

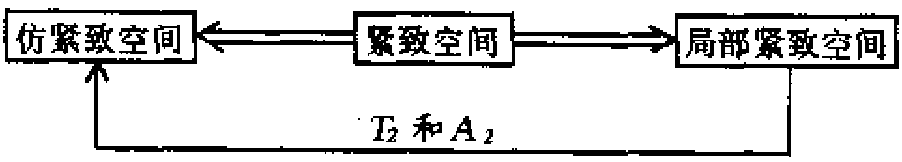
其中 $V_{-1}=V_0=\varnothing$. 容易验证:对于每一个 $n\in\mathbb{Z}_+$,K_n 作为紧致

子集 V_n^- 中的闭子集所以是紧致的；J_n 是开的；以及 $K_n\subset J_n$；并且如果 $m,n\in\mathbb{Z}_+$，$|m-n|\geqslant 3$，则 $J_n\cap J_m=\varnothing$. 此外 $\{K_1,K_2,\cdots\}$ 和 $\{J_1,J_2,\cdots\}$ 都是 X 的覆盖.

现在我们来验证拓扑空间 X 是一个仿紧致空间. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 的一个开覆盖. 对于每一个 $n\in\mathbb{Z}_+$，令 $\mathscr{A}_n=\{A\cap J_n\mid A\in\mathscr{A}\}$. $\mathscr{A}_n$ 是紧致子集 K_n 的一个开覆盖，因此有一个有限子覆盖，设为 $\mathscr{B}_n$. 令 $\mathscr{B}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n$. 由于每一个 $\mathscr{B}_n$ 覆盖 K_n，因此 $\mathscr{B}$ 覆盖 X，并且显然是 $\mathscr{A}$ 的一个加细. 对于每一个 $B\in\mathscr{B}_n$，由于 $B\subset J_n$，故当 $m\in\mathbb{Z}_+$ 使得 $|m-n|\geqslant 3$ 时，B 与 $\mathscr{B}_m$ 中的任何元素无交，因此 B 只与 $\mathscr{B}$ 中有限个元素有非空的交. 这蕴涵着开覆盖 $\mathscr{B}$ 是局部有限的. 综合上述，我们找到了 X 的一个局部有限的开覆盖 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个加细. ■

从引理 7.6.7 的证明中可见，如果将引理条件中的"满足第二可数性公理"改为"Lindelöff"，该引理的结论依然正确. 而在定理 7.6.8 的证明中，事实上也只依赖引理 7.6.7 的结论，所以将这个定理的条件作同样的改动也不影响结论的正确性.

作为这个定理的一个最简单的推论，可见 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是一个仿紧致空间. 此外，根据定理 7.6.8，可以给出图表 7.6.[①]



图表 7.6：紧致，局部紧致，仿紧致空间

习　题

1. 证明：拓扑空间 X 是一个紧致空间（Lindelöff 空间）当且仅当 X 的每

① 参见第 148 页脚注.

一个开覆盖 $\mathscr{A}$ 都有一个有限(可数)开覆盖 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的加细.

2. 证明:局部紧致空间(仿紧致空间)的每一个闭子空间都是局部紧致空间(仿紧致空间).

3. 证明:两个局部紧致空间的积空间是局部紧致空间.

4. 设 X 是一个仿紧致空间.证明:如果 X 的每一个开子空间都是仿紧致的,则 X 的每一个子空间都是仿紧致的.

5. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f:X\to Y$.映射 f 称为是**常态的**,如果 Y 中的每一个紧致子集 B 的 f 原象 $f^{-1}(B)$ 是 X 中的一个紧致子集.

设 X 是一个拓扑空间,Y 是一个局部紧致的 Hausdorff 空间.证明:如果映射 f 是一个既单且满的常态连续映射,则 f 是一个同胚.

第 8 章　完备度量空间

度量空间的定义在 §2.1 中已经给出. 之后在各个章节中我们研究了度量空间的相应的拓扑性质. 本章介绍度量空间的一个重要的非拓扑性质:完备性.

§8.1　度量空间的完备化

度量空间的完备性是用关于度量空间中点的序列的收敛的语言来刻画的. 由于度量空间本身便是拓扑空间,所以其中的点的序列收敛按拓扑的方式已经定义(参见定义 2.7.2),并且可以通过度量的语言予以描述(参见定理 2.7.4). 现在通过以下定义在度量空间中挑选出一类特殊的序列.

定义 8.1.1　设(X,ρ)是一个度量空间. X 中的一个序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$,如果对于任意给定的实数 $\epsilon>0$,存在整数 $N>0$,使得当 $i,j>N$ 时有 $\rho(x_i,x_j)<\epsilon$,则称序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是一个 **Cauchy 序列**

如果 X 中的每一个 Cauchy 序列都收敛,则称度量空间(X,ρ)是一个**完备度量空间**.

易见度量空间中每一个收敛序列都是 Cauchy 序列. 但反之不然.

例 8.1.1　实数空间$\mathbb{R}$是一个完备度量空间.

论证大纲如下:设 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是实数空间$\mathbb{R}$ 中的一个 Cauchy 序列,则集合 $\{x_i\mid i\in\mathbb{Z}_+\}$ 是一个有界集,从而包含于某一个闭区间之中. 根据闭区间的序列紧致性(参见推论 7.4.8 以及紧接于其后

的关于欧氏空间的有关说明)，可见序列$\{x_i \mid i\in\mathbb{Z}_+\}$有一个收敛子序列收敛于某$x\in\mathbb{R}$，从而序列$\{x_i \mid i\in\mathbb{Z}_+\}$本身也收敛于$x$.

有理数集$\mathbb{Q}$作为实数空间$\mathbb{R}$的度量子空间却不是完备度量空间.因为任何一个在实数空间$\mathbb{R}$中收敛于无理数的有理数序列在这个子空间中均不收敛.

完备性不是一个拓扑不变性质.例如我们在实数空间$\mathbb{R}$中引入一个新的度量d，其定义为:对于任何$x,y\in\mathbb{R}$，

$$d(x,y)=\left|\frac{x}{1+|x|}-\frac{y}{1+|y|}\right|$$

容易验证d确实是实数集合$\mathbb{R}$的一个度量，并且与实数集合$\mathbb{R}$的通常度量等价.因此实数集合$\mathbb{R}$在这两个不同的度量之下，恒同映射是一个同胚.然而实数集合对于通常的度量而言是一个完备度量空间，而对于度量d而言却不是，因为其中的序列$\{i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是一个 Cauchy 序列，然而却不收敛.(请读者自己完成必要的验证.)

定理 8.1.1 完备度量空间中的每一个闭的度量子空间都是完备度量空间.

证明 设Y是完备度量空间X的一个闭的度量子空间.Y中的每一个 Cauchy 序列也是X中的一个 Cauchy 序列，因此在X中收敛.然而Y是闭的，这极限点应在Y中. ■

引理 8.1.2 设(X,ρ)是一个度量空间，$Y\subset X$.如果Y中每一个 Cauchy 序列都在X中收敛，则Y的闭包$\overline{Y}$中的每一个 Cauchy 序列也都在X中收敛.

证明 设Y中每一个 Cauchy 序列都在X中收敛.令$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是$\overline{Y}$中的一个 Cauchy 序列.对于每一个$i\in\mathbb{Z}_+$，存在$y_i\in Y$使得$\rho(x_i,y_i)<\frac{1}{i}$.由于

$$\begin{aligned}\rho(y_i,y_j)&\leqslant\rho(y_i,x_i)+\rho(x_i,x_j)+\rho(x_j,y_j)\\&<\frac{1}{i}+\frac{1}{j}+\rho(x_i,x_j)\end{aligned}$$

所以$\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是$Y$中的一个Cauchy序列.设$\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于$x\in X$.然而

$$\begin{aligned}\rho(x,x_i)&\leqslant\rho(x,y_i)+\rho(y_i,x_i)\\&<\rho(x,y_i)+\frac{1}{i}\end{aligned}$$

因此$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于$x$. ■

推论 8.1.3 设(X,ρ)是一个度量空间,Y是X的一个稠密子集.如果Y中的每一个Cauchy序列都在X中收敛,则X是一个完备度量空间. ■

定理 8.1.4 n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$和Hilbert空间$\mathbb{H}$都是完备度量空间.

证明 设$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是Hilbert空间$\mathbb{H}$中的一个Cauchy序列,其中$x_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots)$,$i\in\mathbb{Z}_+$.对于任何$i,j,k\in\mathbb{Z}_+$,

$$\begin{aligned}|x_{ik}-x_{jk}|&\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_{ik}-x_{jk})^2}\\&=\rho(x_i,x_j)\end{aligned}$$

因此对于每一个固定的$k\in\mathbb{Z}_+$,序列$\{x_{ik}\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是实数空间$\mathbb{R}$中的一个Cauchy序列.根据实数空间$\mathbb{R}$的完备性,可设这个序列收敛于$y_k\in\mathbb{R}$.

对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在$N\in\mathbb{Z}_+$使得当$i,j>N$时

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_{ik}-x_{jk})^2}=\rho(x_i,x_j)<\varepsilon$$

因而对于任意$n\in\mathbb{Z}_+$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_{ik}-x_{jk})^2}<\varepsilon$$

在上式中令$j\to\infty$可得

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_{ik})^2}\leqslant\varepsilon$$

再于上式中令 $n\to\infty$则有

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(y_k-x_{ik})^2}\leqslant\varepsilon$$

从此,我们得到$(y_1-x_{i1},y_2-x_{i2},\cdots)\in\mathbb{H}$.加上 $x_i\in\mathbb{H}$,可见 $y=(y_1,y_2,\cdots)\in\mathbb{H}$.再由上式给出结论:$\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$收敛于 y.

n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$是完备度量空间的证明较上述证明还要简单一些,从略.(请读者自己补证.) ■

定义 8.1.2 *设(X,ρ)和(Y,d)是两个度量空间,$f:X\to Y$.如果对于任意 $x,y\in X$ 有$d(f(x),f(y))=\rho(x,y)$,则称映射 f 是一个***保距映射***,如果存在一个从 X 到 Y 的满的保距映射,则称度量空间(X,ρ)与度量空间(Y,d)***同距***.*

保距映射一定是一个单射,恒同映射是一个保距映射,两个保距映射的复合也是保距映射,满的保距映射的逆映射也是保距映射.

设 X,Y 和 Z 都是度量空间.则 X 与 X 同距;如果 X 与 Y 同距,则 Y 与 X 同距;如果 X 与 Y 同距,Y 与 Z 同距,则 X 与 Z 同距.

此外,满的保距映射一定是一个同胚,同距的度量空间是同胚的.

定义 8.1.3 *设 X 是一个度量空间,X^* 是一个完备度量空间.如果 X 与 X^* 的一个稠密的度量子空间同距,则称完备度量空间 X^* 是度量空间 X 的一个***完备化***.*

读者从数学分析中已经了解到,实数空间$\mathbb{R}$便是有理数空间$\mathbb{Q}$的一个完备化.就像在数学分析中建立实数理论的情形一样,我们证明:

定理 8.1.5 *每一个度量空间都有完备化.*

证明 设(X,ρ)是一个度量空间.记 $\widetilde{X}$ 为 X 中的所有 Cauchy 序列构成的集合.在 $\widetilde{X}$ 中定义一个关系～如下:对于任何$\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}_+},\{y_i\}_{i\in\mathbf{Z}_+}\in\widetilde{X}$,$\{x_i\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$和$\{y_i\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$～相关,即

$$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}\sim\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$$

如果 $\lim_{i\to\infty}\rho(x_i,y_i)=0$. 容易验证 $\widetilde{X}$ 中的关系～是 $\widetilde{X}$ 中的一个等价关系.（请读者自补证明.）记集合 $\widetilde{X}$ 相对于等价关系～而言的商集为 $X^*=\widetilde{X}/\sim$，并且记序列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}\in\widetilde{X}$ 的～等价类为 $[\{x_i\}]$.

定义 $\rho^*:X^*\times X^*\to\mathbb{R}$，使得对于注意 $[\{x_i\}],[\{y_i\}]\in X^*$，

$$\rho^*([\{x_i\}],[\{y_i\}])=\lim_{i\to\infty}\rho(x_i,y_i)$$

我们先说明这个映射的定义是合理的.

首先，由于 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 和 $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 中的两个 Cauchy 序列，我们有

$$\begin{aligned}&|\rho(x_i,y_i)-\rho(x_j,y_j)|\\&=|\rho(x_i,y_i)-\rho(x_j,y_i)+\rho(x_j,y_i)-\rho(x_j,y_j)|\\&\leqslant|\rho(x_i,y_i)-\rho(x_j,y_i)|+|\rho(x_j,y_i)-\rho(x_j,y_j)|\\&\leqslant\rho(x_i,x_j)+\rho(y_i,y_j)\end{aligned}$$

由此可见 $\{\rho(x_i,y_i)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是实数空间 $\mathbb{R}$ 中的一个 Cauchy 序列，所以它在实数空间 $\mathbb{R}$ 中收敛，也就是说极限 $\lim_{i\to\infty}\rho(x_i,y_i)$ 存在.

其次，要证明 $\rho^*([\{x_i\}],[\{y_i\}])$ 的定义与～等价类中的代表元素选择无关，即证明：如果 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}\sim\{\bar{x}_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 和 $\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}\sim\{\bar{y}_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$，则

$$\lim_{i\to\infty}\rho(x_i,y_i)=\lim_{i\to\infty}\rho(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$$

事实上，这一事实可以从不等式

$$\rho(x_i,y_i)\leqslant\rho(x_i,\bar{x}_i)+\rho(\bar{x}_i,\bar{y}_i)+\rho(\bar{y}_i,y_i)$$

推得不等式

$$\lim_{i\to\infty}\rho(x_i,y_i)\leqslant\lim_{i\to\infty}\rho(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$$

以及同理也有不等式

$$\lim_{i\to\infty}\rho(x_i,y_i)\geqslant\lim_{i\to\infty}\rho(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$$

而得证.

不难直接验证 ρ^* 是 X^* 的一个度量.(请读者自证)因此 (X^*,ρ^*)是一个度量空间.以下验证度量空间(X,ρ)与度量空间(X^*,ρ^*)的一个稠密的度量子空间同距,并且(X^*,ρ^*)是一个完备度量空间.

定义映射 $\psi:X\to X^*$ 使得对于任何 $x\in X$,$\psi(x)=[\{x\}]$.其中$[\{x\}]$是 X 中取常值x 的序列所代表的~等价类.由于对于任何 $x,y\in X$,有

$$\rho^*(\psi(x),\psi(y))=\lim_{i\to\infty}\rho(x,y)=\rho(x,y)$$

所以 ψ 是一个保距映射.

对于任意 $x^*=[\{x_i\}]\in X^*$,其中$\{x_i\}_{i\in Z_+}$是 X 中的一个 Cauchy 序列,按定义可见$\{\psi(x_i)\}_{i\in Z_+}$是 $\psi(X)$中的一个 Cauchy 序列,并且

$$\rho^*(x^*,\psi(x_i))=\lim_{j\to\infty}\rho(x_j,x_i)$$

因此序列$\{\psi(x_i)\}_{i\in Z_+}$收敛于 x^*.这表明 $\psi(X)$是 X^* 中的一个稠密子集.

如果$\{\psi(x_i)\}_{i\in Z_+}$是 $\psi(X)$中的一个 Cauchy 序列,则序列$\{x_i\}_{i\in Z_+}$是 X 中的一个 Cauchy 序列,于是 $x^*=[\{x_i\}]\in X^*$.还是根据前面的那个等式可见序列$\{\psi(x_i)\}_{i\in Z_+}$收敛于 x^*.这证明 $\psi(X)$中的任何一个 Cauchy 序列在 X^* 中都收敛.根据推论 8.1.3,(X^*,ρ^*)是一个完备度量空间. ■

自然,一个度量空间可以有许多完备化.然而后面一个定理指出,在同距的意义下,它的完备化是唯一的.

定理 8.1.6 每一个度量空间的任意两个完备化同距.

证明 设(X,ρ)是一个度量空间,完备度量空间(X_1^*,ρ_1^*)和(X_2^*,ρ_2^*)都是(X,ρ)的完备化.根据定义,X 分别同距于 X_1^* 的某一个稠密子集 $\widetilde{X}_1$ 和 X_2^* 的某一个稠密子集 $\widetilde{X}_2$.因此 $\widetilde{X}_1$ 与 $\widetilde{X}_2$ 同距,即存在一个满的保距映射 $\eta:\widetilde{X}_1\to\widetilde{X}_2$.

对于任何一个 $x_1^*\in X_1^*$,由于 $\widetilde{X}_1$ 是 X_1^* 的稠密子集,所以在

$\widetilde{X}_1$ 中有一个序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于 x_1^*. 易见$\{\eta(x_i)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是 $\widetilde{X}_2$ 中的一个 Cauchy 序列. 由于 X_2^* 是完备的,所以序列$\{\eta(x_i)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于 X_2^* 中的某一点 x_2^*. 并且容易验证点 x_2^* 与收敛于 x_1^* 的序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$的选取无关(请读者自补证明). 我们令 $\eta^*(x_1^*)=x_2^*$. 这样,我们定义了一个映射 $\eta^*:X_1^*\to X_2^*$.

映射 η^* 是保距的. 因为如果 $x_1^*, y_1^*\in X_1^*$, 设$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$和$\{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$分别是 $\widetilde{X}_1$ 中收敛于 x_1^* 和 y_1^* 的序列,则有

$$\begin{aligned}\rho_2^*(\eta^*(x_1^*),\eta^*(y_1^*)) &= \rho_2^*(\lim_{i\to\infty}\eta(x_i),\lim_{i\to\infty}\eta(y_i))\\ &= \lim_{i\to\infty}\rho_2^*(\eta(x_i),\eta(y_i))\\ &= \lim_{i\to\infty}\rho_1^*(x_i,y_i)\\ &= \rho_1^*(\lim_{i\to\infty}x_i,\lim_{i\to\infty}y_i)\\ &= \rho_1^*(x_1^*,y_1^*)\end{aligned}$$

映射 η^* 是满的. 因为对于每一个 $x_2^*\in X_2^*$, $\widetilde{X}_2$ 中有序列$\{z_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于 x_2^*. 于是$\{\eta^{-1}(z_i)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是 $\widetilde{X}_1$ 中的一个 Cauchy 序列,设它收敛于 x_1^*. 易见 $\eta^*(x_1^*)=x_2^*$.

因此度量空间(X_1^*,ρ_1^*)和(X_2^*,ρ_2^*)同距. ■

推论 8.1.7 完备度量空间的任何一个完备化都与这个完备度量空间本身同距. ■

习 题

1. 证明:度量空间中的一个 Cauchy 序列如果有一个收敛的子序列,则这个 Cauchy 序列收敛.

2. 令 $X=\mathbb{Z}_+^{\mathbb{Z}_+}$,定义 $\rho:X\times X\to\mathbb{R}$ 使得对于任何 $\alpha,\beta\in X$

$$\rho(\alpha,\beta)=\begin{cases}0 & \text{如果 } \alpha=\beta\\ \dfrac{1}{n} & \text{如果 } \alpha\neq\beta\end{cases}$$

式中 $n=\min\{i\in\mathbb{Z}_+ \mid \alpha(i)\neq\beta(i)\}$. 证明:

(1) ρ 是 X 的一个度量;

(2) 度量空间(X,ρ)是完备的.

3. 设(X,ρ)是一个紧致的度量空间,$f:X\to X$ 是一个保距映射. 证明映射 f 是一个满射.

4. 设 X 是一个完备的度量空间,$f:X\to X$ 是一个压缩映射. 证明:f 有唯一的一个不动点,即存在唯一的一个 $z\in X$ 使得 $f(z)=z$.

5. 设 X 是一个度量空间,X^* 是 X 的一个完备化. 证明 X^* 是可分空间当且仅当 X 是可分空间.

§8.2　度量空间的完备性与紧致性,Baire 定理

在这一节的前半部分我们讨论度量空间的完备性与紧致性的关系,后半部分则给出 Baire 定理.

定义 8.2.1　设(X,ρ)是一个度量空间,$\varepsilon>0$ 是一个实数. X 的有限子集 A 称为一个 ε **网**,如果对于任何 $x\in X$ 有 $\rho(x,A)<\varepsilon$. 如果对于任何实数 $\varepsilon>0$,X 有一个 ε 网,则称度量空间(X,ρ)**是完全有界的**.

一个度量空间是完全有界明显地蕴涵着它是有界的. 反之不然,例如包含着无限多个点的离散度量空间是有界的但不是完全有界的.

定理 8.2.1　设(X,ρ)是一个度量空间. 则(X,ρ)是紧致的当且仅当(X,ρ)是一个完全有界的完备度量空间.

证明　设度量空间(X,ρ)是紧致的. 任意给定实数 $\varepsilon>0$. 由球形邻域构成的集族$\{B(x,\varepsilon)\mid x\in X\}$是 X 的一个开覆盖,它有一个有限子覆盖,设为$\{B(x_1,\varepsilon),B(x_2,\varepsilon),\cdots,B(x_n,\varepsilon)\}$. 易见有限集合$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是 X 的一个 ε 网. 这证明 X 是完全有界的.

为证明(X,ρ)是完备的,设序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 是 X 中的一个

Cauchy 序列. 由于紧致的度量空间是序列紧致的，所以序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 有一个收敛的子序列，设这个子序列收敛于 x. 这时序列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 也必收敛于 x. 这证明 X 中的每一个 Cauchy 序列都收敛.

另一方面，设(X,ρ)是一个完全有界的完备度量空间. 为证明 X 是紧致的，只需证明它是序列紧致的. 由于 X 是一个完备度量空间，这又只要证明 X 中的每一个序列有一个子序列是 Cauchy 序列.

设$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$是 X 中的一个序列. 我们按归纳方式对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$定义一个序列 $\alpha_i=\{y_{in}\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$ 如下：首先，令 $\alpha_1=\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$. 其次对于 $i>1$，假定 α_i 已经定义. 设$\{z_1,z_2,\cdots,z_m\}$是 X 的一个 $2^{-(i+1)}$网，因此球形邻域构成的集族

$$\{B(z_1,2^{-(i+1)}),B(z_2,2^{-(i+1)}),\cdots,B(z_m,2^{-(i+1)})\}$$

覆盖 X. 于是可以在某一个 $B(z_j,2^{-(i+1)})$，其中 $1\leqslant j\leqslant m$，中选取 α_i 的一个子序列 α_{i+1}.

根据定义立即可见，对于每一个 $i>1$，序列 α_i 是序列 α_{i-1} 的一个子序列，并且对于任何 $m,n\in\mathbb{Z}_+$有 $\rho(y_{im},y_{in})<2^{-(i-1)}$.

于是序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$的子序列串 α_i, $i=1,2,\cdots$的“对角线”序列 $\alpha=\{y_{ii}\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是序列$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$的一个子序列，由于对于任意 $i,j\in\mathbb{Z}_+$, $i\leqslant j$，有 $\rho(y_{ii},y_{jj})<2^{-(i-1)}$，所以 α 是一个 Cauchy 序列.

■

定理 8.2.2 设(X,ρ)是一个完备度量空间. 如果由 X 的子集构成的一个序列$\{E_1,E_2,\cdots\}$满足条件 $E_1\supset E_2\supset\cdots$ 和 $\lim_{i\to\infty}\operatorname{diam}(E_i)=0$，其中 $\operatorname{diam}(E_i)$表示 E_i 的直径，则$\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}\overline{E_i}$ 是一个单点集.

证明 设$\{E_1,E_2,\cdots\}$满足定理中所陈述的条件. 对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$，任意选取 $x_i\in\overline{E_i}$. 序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$是一个 Cauchy 序列. 这是因为：对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$ 使得当 $i>N$ 时有

$\operatorname{diam}(E_i)<\varepsilon$. 从而当 $i,j>N$ 时由于 $x_i,x_j\in E^-_{\min\{i,j\}}$,故 $\rho(x_i,x_j)<\varepsilon$.

设序列$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于 $x\in X$. 由于对于任何一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,x_i,$x_{i+1},\cdots\in E_i^-$. 故 $x\in E_i^-$. 因此 $x\in\bigcap\limits_{i\in\mathbb{Z}_+}E_i^-$. 如果 $y\in\bigcap\limits_{i\in\mathbb{Z}_+}E_i^-$,则

$\rho(x,y)\leqslant\operatorname{diam}(E_i)\to0\quad(i\to\infty)$

因此 $\rho(x,y)=0$. 于是 $y=x$. ■

定理 8.2.3 [Baire 定理]设 X 是一个完备的度量空间. 如果 $G_1,G_2,\cdots$是 X 中的可数个稠密的开集,则交集$\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}G_i$ 是X 中的一个稠密子集.

证明 设 $G_1,G_2,\cdots$是 X 中的可数个稠密的开集. 为证明 $G=\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}G_i$ 是X 中的一个稠密子集,只要证明对于 X 中的任何一个非空开集 U 有 $U\cap G\neq\varnothing$.

设 U 是X 中的一个非空开集. 我们对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,定义一个球形邻域 $B(x_i,\varepsilon_i)$如下:任意选取 $x_1\in X$ 和 $\varepsilon_1<1$ 于是有 $B(x_1,\varepsilon_1)$. 对于 $i\geqslant1$,假设 $B(x_i,\varepsilon_i)$已经定义. 由于 G_i 是一个稠密的开集,所以 $U\cap G_i$ 是X 中的一个非空的开集. 任意选取 x_{i+1} 和 $0<\varepsilon_{i+1}<\dfrac{1}{i+1}$使得$\overline{B(x_{i+1},\varepsilon_{i+1})}\subset U\cap G_i$. 根据以上做法,我们有:对于任何 $i\in\mathbb{Z}_+$,

(1) $\varepsilon_i<\dfrac{1}{i}$;

(2) $B(x_{i+1},\varepsilon_{i+1})\subset B(x_i,\varepsilon_i)$;

(3) $\overline{B(x_{i+1},\varepsilon_{i+1})}\subset U\cap G_i$.

根据定理 8.2.2,由于(1)和(2),可见

$$\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}\overline{B(x_{i+1},\varepsilon_{i+1})}\neq\varnothing$$

由于(3),
$$\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}\overline{B(x_{i+1},\varepsilon_{i+1})}\subset\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}(U\cap G_i)=U\cap\Big(\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}G_i\Big)=U\cap G$$

所以 $U\cap G\neq\varnothing$. ■

下面的定理8.2.4是Baire定理的另一个常见的表达方式.

定义8.2.2　设 X 是一个拓扑空间. 如果 X 的子集 A 的闭包的内部是空集, 即 $A^{-\circ}=\varnothing$, 则称 A 为 X 的一个**疏子集**. X 的子集 F 如果可以表示为 X 中可数个疏子集之并, 则称 F 为**第一范畴集**; X 的子集, 如果不是第一范畴集, 则称为**第二范畴集**.

定理8.2.4　[Baire定理]完备度量空间中的任何一个非空开集都是第二范畴集.

证明　设 X 是一个完备的度量空间, U 是 X 中的一个非空开集. 用反证法, 设 U 是一个第一范畴集. 令 $U=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+}F_i$, 其中诸 F_i 都是疏集, 即 $F_i^{-\circ}=\varnothing$. 因此 $U\subset\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+}F_i^-$. 明显地, $F_i^{-\prime}$ 是 X 中的稠密开集. 根据定理8.2.3,

$$Y=\bigcap_{i\in\mathbb{Z}_+}F_i^{-\prime}=\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_+}F_i^-\Big)'$$

是 X 的一个稠密子集. 然而 $U\cap Y=\varnothing$, 矛盾. ■

事实上, 从定理8.2.4出发也易于证明定理8.2.3, 我们将有关的证明留作习题.

习　题

1. 举出两个同胚的度量空间的例子, 使得一个是完全有界的, 另一个却不是.

2. 设 X 是一个完备的度量空间, $Y\subset X$. 证明以下条件等价:

(1) Y 完全有界;

(2) $\bar{Y}$ 完全有界;

(3) $\bar{Y}$ 紧致.

3. 从定理8.2.4出发证明定理8.2.3.

4. 设 X 是一个拓扑空间. 如果 X 的每一个非空开集都是第二范畴集, 则称拓扑空间 X 是一个 **Baire空间**. 证明: 每一个局部紧致的正则空间都是Baire空间. (这蕴涵着: 紧致的Hausdorff空间都是Baire空间.)

第 9 章　积　空　间

§9.1　集族的笛卡儿积

让我们回顾一下两个集合的笛卡儿积. 集合 X_1 和 X_2 的笛卡儿积 $X_1 \times X_2$ 的元素(x_1, x_2)定义为由 X_1 中的一个元素 x_1 和 X_2 中的一个元素 x_2 组成的一个"有序偶". 事实上，我们为定义笛卡儿积所给定的两个集合就是预先给定了"次序"的. 所谓给定了两个集合的次序，可以理解为给定了一个从(指标集)$\{1,2\}$到集族$\{X_1, X_2\}$的一个映射，它把 1 映为 X_1，把 2 映为 X_2. 而这有序点偶(x_1, x_2)也同样可以认为是一个映射 $x: \{1,2\} \to X_1 \cup X_2$，满足：$x(1) = x_1 \in X_1$ 和 $x(2) = x_2 \in X_2$. 换了这个看法，将有限个集合的笛卡儿积的概念推广为一族集合的笛卡儿积将会方便得多.

定义 9.1.1　集族$\{X_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$的**笛卡儿积**$\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ 定义为集合

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma = \{x: \Gamma \to \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma \mid x(\gamma) \in X_\gamma \text{ 对于每一个 } \gamma \in \Gamma \text{ 成立}\}$$

(因此，如果 $x \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$，那么 x 便是满足上式括号中竖线后面的条件：$x(\gamma) \in X_\gamma$ 对于每一个 $\gamma \in \Gamma$ 成立的一个映射 $x: \Gamma \to \bigcup_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$.)对于每一个 $x \in \prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$，我们称 $x(\gamma)$为 x 的**第 γ 个坐标**，并且常改记为 x_γ，同时也将 x 改记为$(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$(这样就使得我们现在推广了的情形与早已熟悉的有限情形在形式上统一起来了). 此外，对于每一个 $\gamma \in \Gamma$，集合 X_γ 称为笛卡儿积$\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ 的

第 γ 个坐标集.

对于每一个 $\alpha\in\Gamma$,将笛卡儿积$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 中的每一个元素 x 映为它的第 α 个坐标 $x(\alpha)$的映射,即映射

$$p_\alpha:\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma\to X_\alpha$$

使得对于任何 $x\in\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 有 $p_\alpha(x)=x(\alpha)$,称为笛卡儿积$\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的**第 α 个投射**或**向第 α 个坐标集的投射**.

首先,我们来考察一下当指标集 $\Gamma=\varnothing$时,集族$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的笛卡儿积$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$.这时$\bigcup_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma=\varnothing$.然而由于 $\varnothing\subset\varnothing\times\varnothing$,所以 $\varnothing$ 是从 $\varnothing$到 $\varnothing$的一个关系,并且也是一个映射,它也满足作为笛卡儿积$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的元素的条件.并且$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 不可能再有其它元素了.因此此时$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma=\{\varnothing\}$是一个单点集.

一个经常遇到的特殊情况是,如果给定的集族$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$只涉及一个集合$X$,也就是说对于每一个 $\gamma\in\Gamma$ 都有$X_\gamma=X$.则我们将笛卡儿积$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 改记为X^Γ.显然 X^Γ 是从集合Γ 到集合X 的所有映射构成的集合.

此外,我们常谈起可数个集合 $X_1,X_2,\cdots$的笛卡儿积.事实上,这时给定的集族是$\{X_i\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$,因此它的笛卡儿积应当记作$\prod\limits_{i\in\mathbf{Z}_+}X_i$.这个笛卡儿积的元素应当记作$(x_i)_{i\in\mathbf{Z}_+}$.习惯上我们也常把这个笛卡儿积记作 $X_1\times X_2\times\cdots$或$\prod_{i=1}^\infty X_i$,把它的元素记作$(x_1,x_2,\cdots)$或$(x_i)_{i=1}^\infty$.

如果集族$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$以空集 $\varnothing$为它的一个元素,即存在 $\gamma\in\Gamma$ 使得$X_\gamma=\varnothing$.则显然有$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma=\varnothing$.然而这个结论的逆命题并不明显成立,它的证明依赖于选择公理.

定理 9.1.1 设给定了集族$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.则笛卡儿积

$$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma\neq\varnothing$$

当且仅当对于任何 $\gamma\in\Gamma$ 有$X_\gamma\neq\varnothing$.

证明 为证明这个定理,我们只需证明条件的充分性. 当 $\Gamma=\varnothing$时,我们没有什么要证明的. 以下假设 $\Gamma\neq\varnothing$. 并且设对于任何 $\gamma\in\Gamma$ 有 $X_\gamma\neq\varnothing$. 则 $X=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma\neq\varnothing$. 令 $\tilde{X}$ 为 X 中的所有非空子集构成的集族. 根据选择公理(公理 1.8.1),集合 X 有一个选择函数 $\varepsilon:\tilde{X}\to X$. 定义映射 $\tilde{\varepsilon}:\Gamma\to X$ 使得对于每一个 $\gamma\in\Gamma$ 有 $\tilde{\varepsilon}(\gamma)=\varepsilon(X_\gamma)$. 立即可见 $\tilde{\varepsilon}\in\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$. 于是 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma\neq\varnothing$. ■

给定两个集族 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 和 $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$,并且假设它们满足条件:对于任何 $\gamma\in\Gamma$ 有 $Y_\gamma\subset X_\gamma$. 设 $y\in\prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$. 则按定义 y 是一个映射 $y:\Gamma\to\bigcup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$ 满足条件:对于任何 $\gamma\in\Gamma$ 有 $y(\gamma)\in Y_\gamma$. 由于 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$,所以 y 唯一地确定了一个映射 $\bar{y}:\Gamma\to\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 使得 y 和 $\bar{y}$ 在每一个 $\gamma\in\Gamma$ 上取相同的值,即 $y(\gamma)=\bar{y}(\gamma)$. 容易验证 $\bar{y}\in\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$. 我们**约定**:对于上述 y 和 $\bar{y}$ 不加区别,也就是说把笛卡儿积 $\prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$ 中的点 y 当成笛卡儿积 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 中的点 $\bar{y}$. 这样一来,笛卡儿积 $\prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$,也就自动地被当成了笛卡儿积 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 中的一个子集.

定理 9.1.2 给定两个集族 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 和 $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$,并且假设它们满足条件:对于任何 $\gamma\in\Gamma$ 有 $Y_\gamma\subset X_\gamma$. 如果对于任何 $\gamma\in\Gamma$,集合 $Y_\gamma\neq\varnothing$. 则对于任何 $\alpha\in\Gamma$,

$$p_\alpha\Big(\prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\Big)=Y_\alpha$$

其中 $p_\alpha:\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma\to X_\alpha$ 是 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的第 α 个投射.

证明 当 $\Gamma=\varnothing$时,我们没有什么要证明的. 以下假定 $\Gamma\neq\varnothing$. 此时,根据定理 9.1.1,$\prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\neq\varnothing$. 任意选取 $y_0\in\prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$.

设 $\alpha\in\Gamma$. 对于任意 $y_\alpha\in Y_\alpha$,定义 $y:\Gamma\to\bigcup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$ 使得对于任何一个 $\gamma\in\Gamma$ 有

$$y(\gamma)=\begin{cases}y_0(\gamma) & \text{如果 } \gamma\neq\alpha\\ y_\alpha & \text{如果 } \gamma=\alpha\end{cases}$$

易见 $y\in\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 以及 $p_\alpha(y)=y_\alpha$. 这证明 $p_\alpha(\prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma)\supset Y_\alpha$. 反

过来的包含关系是明显的.因此 $p_\alpha(\prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma)=Y_\alpha$. ■

根据定理9.1.2,立即可得:

推论9.1.3 设集族$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$对于每一个$\gamma\in\Gamma$有$X_\gamma\neq\varnothing$.则对于任何$\alpha\in\Gamma$,笛卡儿积$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的第$\alpha$个投射$p_\alpha:\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma\to X_\alpha$都是满射. ■

推论9.1.4 设集族$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$对于每一个$\gamma\in\Gamma$有$X_\gamma\neq\varnothing$.又设$\varnothing\neq\Gamma_1\subset\Gamma$,集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_1}$满足条件:对于每一个$\gamma\in\Gamma_1$有$\varnothing\neq A_\gamma\subset X_\gamma$.则对于每一个$\alpha\in\Gamma$,

$$p_\alpha\Big(\bigcup_{\gamma\in\Gamma_1}p_\gamma^{-1}(A_\gamma)\Big)=\begin{cases}X_\alpha & \text{如果 } \alpha\in\Gamma-\Gamma_1\\ A_\alpha & \text{如果 } \alpha\in\Gamma_1\end{cases}$$

其中p_γ是笛卡儿积$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的第$\gamma$个投射.

证明 容易直接验证,在推论的条件下我们有:

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma_1}p_\gamma^{-1}(A_\gamma)=\prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$$

其中对于每一个$\gamma\in\Gamma$,

$$Y_\gamma=\begin{cases}X_\gamma & \text{如果 } \gamma\in\Gamma-\Gamma_1\\ A_\gamma & \text{如果 } \gamma\in\Gamma_1\end{cases}$$

对于集族$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$和$\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$应用定理9.1.2立即得到本推论的结论. ■

习　题

1. 证明:定理9.1.1与选择公理等价.
2. 给定两个集族$\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$和$\{Z_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$.证明:

$$\Big(\prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\Big)\cap\Big(\prod_{\gamma\in\Gamma}Z_\gamma\Big)=\prod_{\gamma\in\Gamma}(Y_\gamma\cap Z_\gamma)$$

§9.2 积空间

在这一节中我们将有限个拓扑空间的积空间的概念推广到一

族拓扑空间的积空间的情形.

定义 9.2.1 如果一个集族$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$中所有的$X_\gamma$都是拓扑空间,我们则称$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一个**拓扑空间族**或**一族拓扑空间**.

设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一个拓扑空间族.容易验证笛卡儿积$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的子集族

$$\mathscr{S}=\{p_\gamma^{-1}(U_\gamma)\mid U_\gamma \text{ 是 } X_\gamma \text{ 的一个开集}, \gamma\in\Gamma\}$$

是它的某一个拓扑$\mathscr{T}$的一个子基,其中p_γ是笛卡儿积$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的第$\gamma\in\Gamma$个投射.拓扑$\mathscr{T}$称为笛卡儿积$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的**积拓扑**,拓扑空间$(\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma,\mathscr{T})$称为拓扑空间族$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的**积空间**.在不至于产生混淆时,径称$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$为积空间.对于每一个$\gamma\in\Gamma$,拓扑空间$X_\gamma$称为积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的**第$\gamma$个坐标空间**.

易见有限个拓扑空间的积空间恰是一族拓扑空间的积空间的一个特殊情形(参见定理 3.2.5).现在将关于有限个拓扑空间的积空间的几个重要的定理推广到对于一族拓扑空间的积空间.读者不难发现,相应定理的证明实质上是相似的.

定理 9.2.1 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一族拓扑空间.则对于每一个$\alpha\in\Gamma$,积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的第$\alpha$个投射$p_\alpha:\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma\to X_\alpha$是一个连续开映射.

证明 设$\mathscr{T}$是积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的积拓扑,$\mathscr{S}$是积拓扑定义中的那个子基.

对于X_α中的每一个开集U_α,由于$p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\in\mathscr{S}$,所以它是积空间中的一个开集,因此$p_\alpha$连续.

设$\mathscr{B}$为$\mathscr{S}$的每一个有限非空子族之交的全体构成的集族.根据子基的定义,$\mathscr{B}$是积拓扑$\mathscr{T}$的一个基.设U是$\mathscr{B}$中的一个元素,则U可以表示为

$$U=p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})\cap\cdots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

其中$n\geqslant1$,并且每一个U_{α_i}是X_{α_i}中的一个开集.我们不妨假设

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是Γ 中两两不同的 n 个元素(否则,可以在 U 的以上表示式中作"同类项"归并,即如果 $\alpha_i=\alpha_j$,则我们有

$$p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})\cap p_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})=p_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}\cap U_{\alpha_j})$$

因此可以在 U 的以上表示式中消去下标相同的项). 如果 $U=\varnothing$,则 $p_\alpha(U)=\varnothing$是 X_α 中的一个开集. 如果 $U\neq\varnothing$,则诸 $X_{\alpha_i}\neq\varnothing$,因而根据推论 9.1.3 我们有:

$$p_\alpha(U)=p_\alpha(p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})\cap\cdots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}))$$
$$=\begin{cases}X_\alpha & \text{若对于任何 } i=1,2,\cdots,n,\alpha\neq\alpha_i\\ U_{\alpha_i} & \text{若对于某一个 } i=1,2,\cdots,n,\alpha=\alpha_i\end{cases}$$

它也是 X_α 中的一个开集. 以上证明积拓扑 $\mathscr{T}$的基 $\mathscr{B}$ 中的任何一个元素的 p_α 象是拓扑空间X_α 中的一个开集. 由于积拓扑 $\mathscr{T}$的每一个元素都是 $\mathscr{B}$ 中若干个元素的并,因而 p_α 是一个开映射. ■

定理 9.2.2 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一族拓扑空间. 又设 Y 是一个拓扑空间. 则映射

$$f:Y\to\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$$

是一个连续映射当且仅当对于每一个 $\alpha\in\Gamma$ 映射

$$p_\alpha\circ f:Y\to X_\alpha$$

是连续的,其中 p_α 是积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的第 α 个投射.

证明 根据定理 9.2.1,每一个投射 p_α 都连续,故当 f 连续时,每一个 $p_\alpha\circ f$ 也连续.

设对于每一个 $\alpha\in\Gamma$,映射 $p_\alpha\circ f$ 连续. 如果 U 是积拓扑定义中的子基 $\mathscr{S}$中的一个元素,则 $U=p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$,其中 $\alpha\in\Gamma$,U_α 是X_α 中的一个开集. 因此

$$f^{-1}(U)=f^{-1}(p_\alpha^{-1}(U_\alpha))=(p_\alpha\circ f)^{-1}(U_\alpha)$$

是 Y 中的一个开集. 根据定理 2.6.5,这证明 f 是一个连续映射. ■

定理 9.2.3 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一族拓扑空间. 令$\mathscr{T}$为$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的积拓扑. 如果$\tilde{\mathscr{T}}$是笛卡儿积$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的一个拓扑使得对于任何$\alpha\in\Gamma$, $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的第$\alpha$个投射$p_\alpha:\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma\to X_\alpha$都是连续的, 则$\mathscr{T}\subset\tilde{\mathscr{T}}$.

换言之, 积拓扑是使所有投射都连续的最小的拓扑.

证明 记$\mathscr{S}$为$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的积拓扑$\mathscr{T}$的定义中的那个子基. 则$U\in\mathscr{T}$意味着$U$可以表示为$U=p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, 其中$\alpha\in\Gamma$, U_α是X_α中的一个开集. 由于p_α对于$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的拓扑$\tilde{\mathscr{T}}$而言连续, 故$U\in\tilde{\mathscr{T}}$. 因此$\mathscr{S}\subset\tilde{\mathscr{T}}$, 而这明显蕴涵着$\mathscr{T}\subset\tilde{\mathscr{T}}$. ■

定理 9.2.4 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一族拓扑空间. 则积空间$\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$中的序列$\{x^{(i)}\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$收敛于点$x\in\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$的充分必要条件是对于每一个$\alpha\in\Gamma$, 拓扑空间$X_\alpha$中的序列$\{p_\alpha(x^{(i)})\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$收敛于$p_\alpha(x)\in X_\alpha$.

证明 **必要性** 根据定理2.7.3和定理9.2.1立即可见.

充分性 设$x\in\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$, $\{x^{(i)}\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$是积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$中的一个序列, 并且对于每一个$\alpha\in\Gamma$, 第$\alpha$个坐标空间$X_\alpha$中的序列$\{p_\alpha(x^{(i)})\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$收敛于$p_\alpha(x)\in X_\alpha$.

设U是点x的一个邻域. 根据积拓扑的定义, 存在$n\geqslant 1$, α_1, $\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\Gamma$和$U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\cdots,U_{\alpha_n}$分别为$X_{\alpha_1},X_{\alpha_2},\cdots,X_{\alpha_n}$中的开集使得

$$x\in p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})\cap\cdots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})\subset U$$

于是对于每一个$j=1,2,\cdots,n$有$p_{\alpha_j}(x)\in U_{\alpha_j}$. 由于每一个序列$\{p_{\alpha_j}(x^{(i)})\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$都收敛于$p_{\alpha_j}(x)$, 故存在整数$N_j>0$, 使得当$i>N_j$时$p_{\alpha_j}(x^{(i)})\in U_{\alpha_j}$, 即$x^{(i)}\in p_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})$. 令

$$N=\max\{N_j\mid j=1,2,\cdots,n\}$$

则当$i>N$时$x^{(i)}\in p_{\alpha_j}^{-1}(U_{\alpha_j})$对于所有$j=1,2,\cdots,n$成立, 亦即

$$x^{(i)} \in p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) \subset U$$

这证明序列$\{x^{(i)}\}_{i\in Z_+}$收敛于 x. ■

由于定理 9.2.4 的缘故，积拓扑常被称为**坐标式收敛的拓扑**或**点式收敛拓扑**.

习　题

1. 设$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 是拓扑空间族$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的积空间. 证明：如果对于每一个$\gamma\in\Gamma$，坐标空间 X_γ 有一个子基 $\mathscr{S}_\gamma$，则集族

$$\mathscr{S}^* = \{p_\gamma^{-1}(S_\gamma) \mid S_\gamma \in \mathscr{S}_\gamma\}$$

是积拓扑的一个子基，其中 p_γ 是积空间的第 γ 个投射.

2. 设 $\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 是拓扑空间族$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的积空间，$\Gamma_1\subset\Gamma$. 定义映射 p_{Γ_1}：$\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma \to \prod\limits_{\gamma\in\Gamma_1}X_\gamma$ 使得对于每一个 $x\in\prod\limits_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 有 $p_{\Gamma_1}(x)\in\prod\limits_{\gamma\in\Gamma_1}X_\gamma$. 其中 $p_{\Gamma_1}(x)$ 满足条件：对于每一个 $\gamma\in\Gamma_1$ 有 $p_{\Gamma_1}(x)(\gamma)=x(\gamma)$. 证明 $p_{\Gamma_1}(x)$是一个连续的开映射.

3. 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一族拓扑空间，$\Gamma_1,\Gamma_2\subset\Gamma$ 使得$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ 和 $\Gamma_1\cap\Gamma_2=\varnothing$. 证明：积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 同胚于积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma_1}X_\gamma$ 和积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma_2}X_\gamma$ 的积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma_1}X_\gamma\times\prod_{\gamma\in\Gamma_2}X_\gamma$.

4. 设$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 是拓扑空间族$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的积空间，并且对于每一个 $\gamma\in\Gamma$，Y_γ 是坐标空间X_γ 的一个子集. 证明：

$$\Big(\prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\Big)^- = \prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma^-$$

5. 证明：每一个坐标空间都同胚于积空间的某一个子空间.

§9.3　可积的拓扑性质

拓扑空间的某种性质 P 叫做**可积性质**，如果每一个坐标空间具有性质 P 蕴涵着积空间具有性质P. 由于有限个拓扑空间的积空间是一族拓扑空间的积空间的特殊情形，所以凡不是有限可积

的性质也一定不是可积的性质，如 Lindelöff 和正规等.然而也并非每一个有限可积的性质都是可积的性质，这从下文可以明显地看出.我们在本节的正文中只是作为例子处理几种拓扑性质的可积性问题，多数类似的讨论则放在习题中留给读者自己去完成.关于紧致性是否是可积性的问题则放在下一节中讨论.

定理 9.3.1 任何一族连通空间的积空间都是连通空间.

证明 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一族连通空间.如果$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma=\varnothing$，则这个积空间显然是连通的.下设$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma\neq\varnothing$.

我们先证明，如果 $x,y\in\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 只相差有限个坐标，即集合$\{\gamma\in\Gamma|x(\gamma)\neq y(\gamma)\}$是一个有限集，则 x 和 y 连通.当 $x=y$ 时这结论是明显的，以下假定 $x\neq y$.设

$$\{\gamma\in\Gamma|x(\gamma)\neq y(\gamma)\}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}\subset\Gamma$$

其中 $n\geqslant1$.定义映射

$$p:X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}\to\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$$

使得对于任何一个

$$(z_{\alpha_1},z_{\alpha_2},\cdots,z_{\alpha_n})\in X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}$$

有 $p(z_{\alpha_1},z_{\alpha_2},\cdots,z_{\alpha_n})=z$，其中 z 是积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 中满足以下条件的点：

$$z(\gamma)=\begin{cases}x(\gamma) & \text{若对于任何 } i=1,2,\cdots,n,\gamma\neq\alpha_i\\ z_{\alpha_i} & \text{若对于某 } i=1,2,\cdots,n,\gamma=\alpha_i\end{cases}$$

根据定理 4.1.9，积空间 $X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}$ 是一个连通空间.此外 p 是一个连续映射.这是因为对于任意 $\alpha\in\Gamma$，如果对于任何 $i=1,2,\cdots,n$，有 $\alpha\neq\alpha_i$，则映射

$$p_\alpha\circ p:X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}\to X_\alpha$$

为取常值 $x(\alpha)$的映射，它是连续的；如果存在 $i=1,2,\cdots,n$，使得 $\alpha=\alpha_i$，则映射

$$p_{\alpha_i} \circ p: X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times X_{\alpha_n} \to X_{\alpha_i}$$

恰是 $X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times X_{\alpha_n}$ 的第 i 个投射，也是连续的. 因此根据定理 9.2.2，p 是一个连续映射. 然后根据定理 4.1.8，$p(X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times X_{\alpha_n})$ 是积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 的一个连通子集. 易见 $x, y \in p(X_{\alpha_1} \times X_{\alpha_2} \times \cdots \times X_{\alpha_n})$. 所以 x 和 y 连通.

由于 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \neq \varnothing$，任意选取 $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$，并且设 C 是积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 的包含着 x 的那个连通分支. 设 $\mathscr{S}$ 是积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 的积拓扑 $\mathscr{T}$ 的定义中的那个子基，$\mathscr{B}$ 是由 $\mathscr{S}$ 的每一个非空有限子族的交的全体构成的集族. 根据子基的定义，$\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{T}$ 的一个基. 如果 $U \in \mathscr{B}$ 并且 $U \neq \varnothing$，则 U 可以表示为

$$U = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \cdots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

其中诸 α_i 两两不同，并且每一个 U_{α_i} 是坐标空间 X_{α_i} 中的一个非空开集，$n \geqslant 1$.

令 u 为 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 中满足以下条件的点：

$$u(\gamma) = \begin{cases} x(\gamma) & \text{若对于任何 } i = 1, 2, \cdots, n, \gamma \neq \alpha_i \\ x_{\alpha_i} & \text{若对于某 } i = 1, 2, \cdots, n, \gamma = \alpha_i \end{cases}$$

其中每一个 x_{α_i} 是在 X_{α_i} 中任意取定的一个点. 可见 x 与 u 只差有限个坐标. 所以 $u \in C$，此外根据 u 的定义便有 $u \in U$. 这表明 $x \in C \cap U$，因此 $C \cap U \neq \varnothing$.

由于 C 与积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 的拓扑的某一个基中的每一个非空元素都有非空的交，所以 $\bar{C} = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$. 然而 C 是一个闭集（参见定理 4.3.1），因此 $C = \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$，从而积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 是一个连通空间. ■

定理 9.3.2　设 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一个拓扑空间族，并且对于任何 $\gamma \in \Gamma$，$X_\gamma \neq \varnothing$. 则积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ 满足第二可数性公理的一个充分必要条件是指标集 Γ 中有一个可数子集 Γ_1 使得当 $\alpha \in \Gamma_1$ 时

X_α 满足第二可数性公理，当 $\alpha\in\Gamma-\Gamma_1$ 时 X_α 是平庸空间.

证明 充分性 在定理中所陈述的条件被满足的条件下，设对于每一个 $\alpha\in\Gamma_1$，集族 $\mathscr{S}_\alpha$ 是满足第二可数性公理的空间 X_α 的一个可数基，并且当 $\alpha\in\Gamma-\Gamma_1$ 时，由于 X_α 是平庸空间，我们取 $\mathscr{S}_\alpha=\{X_\alpha\}$. 这时集族

$$\tilde{\mathscr{S}}=\{p_\alpha^{-1}(U_\alpha)\mid U_\alpha\in\mathscr{S}_\gamma,\gamma\in\Gamma\}$$

是积空间的一个子基. $\tilde{\mathscr{S}}$ 明显是一个可数族. 有可数子基的拓扑空间必定有可数基. 所以积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 满足第二可数性公理.

必要性 设积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 满足第二可数性公理. 对于每一个 $\alpha\in\Gamma$ 投射是一个满的连续开映射(参见定理 9.2.1 和推论 9.1.3)，所以根据定理 5.1.4，X_α 满足第二可数性公理.

设 $\mathscr{B}$ 是积拓扑 $\mathscr{T}$ 的定义中的子基 $\mathscr{S}$ 的每一个有限子族的交的全体构成的集族，它是积拓扑 $\mathscr{T}$ 的一个基. 设 $U\in\mathscr{B}$，则 U 可以表示为

$$U=p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})\cap\cdots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\Gamma$ 两两不同，并且每一个 U_{α_i} 是 X_{α_i} 中的一个开集. 根据推论 9.1.4，我们有

$$p_\alpha(U)=\begin{cases}X_\alpha & \text{若对于任何 } i=1,2,\cdots,n,\alpha\neq\alpha_i\\ U_{\alpha_i} & \text{若对于某 } i=1,2,\cdots,n,\alpha=\alpha_i\end{cases}$$

其中 p_α 是积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的第 α 个投射. 这说明，对于任何 $U\in\mathscr{B}$，存在 Γ 中的一个有限子集 Γ_U 使得当 $\alpha\in\Gamma-\Gamma_U$ 时 $p_\alpha(U)=X_\alpha$.

由于积空间满足第二可数性公理，我们可以假定积拓扑有一个可数基 $\mathscr{B}_1$ 包含于 $\mathscr{B}$. (参见 §5.1 习题 3.) 令

$$\Gamma_1=\bigcup_{U\in\mathscr{B}_1}\Gamma_U$$

Γ_1 是可数个有限集之并所以是一个可数集.

以下我们证明：当 $\alpha\in\Gamma-\Gamma_1$ 时 X_α 是平庸空间. 因为如果不

然,则 X_α 有一个非空的真子集 V_α.从而 $p_\alpha^{-1}(V_\alpha)\in\mathscr{T}$,故存在 $\mathscr{B}_2\subset\mathscr{B}_1$ 使得

$$p_\alpha^{-1}(V_\alpha)=\bigcup_{U\in\mathscr{B}_2}U$$

但是由于 $\alpha\in\Gamma-\Gamma_1$,所以对于每一个 $U\in\mathscr{B}_1$ 都有 $\alpha\in\Gamma-\Gamma_U$.从而 $p_\alpha(U)=X_\alpha$.于是

$$\begin{aligned}V_\alpha&=p_\alpha(p_\alpha^{-1}(V_\alpha))\\&=\bigcup_{U\in\mathscr{B}_2}(U)=X_\alpha\end{aligned}$$

这与我们对 V_α 所作的假定矛盾.这就证明了当 $\alpha\in\Gamma-\Gamma_1$ 时 X_α 是一个平庸空间. ■

定理 9.3.3　任何一族 Hausdorff 空间的积空间都是 Hausdorff 空间.

证明　设 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一族 Hausdorff 空间.如果 $x,y\in\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$,$x\neq y$,则存在 $\alpha\in\Gamma$ 使得 $x(\alpha)\neq y(\alpha)$. $x(\alpha)$ 和 $y(\alpha)$ 是 Hausdorff 空间 X_α 中不同的两个点,它们分别在 X_α 中有开邻域 U_α 和 V_α 使得 $U_\alpha\cap V_\alpha=\varnothing$.于是 $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 和 $p_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ 分别是 x 和 y 在积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 中的两个开邻域,并且它们显然无交.(其中 p_α 是积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的第 α 个投射.)这证明积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 是一个 Hausdorff 空间. ■

定理 9.3.4　任何一族完全正则空间的积空间都是完全正则空间.

证明　设 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一族完全正则空间.为证明积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 是一个完全正则空间,设 $x\in\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$,$B$ 是 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 中不包含点 x 的一个闭集.因此 $V=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma-B$ 是 x 的一个开邻域.从而存在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in\Gamma$ 两两不同和 X_{α_i} 中的开集 U_{α_i},使得

$$x\in U=p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})\cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2})\cap\cdots\cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

其中 p_{α_i} 是积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的第 α_i 个投射,$n\geqslant1$.

定义映射

$$\psi: \prod_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma \to X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}$$

使得对于每一个 $z\in\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$,

$$\psi(z)=(z(\alpha_1),z(\alpha_2),\cdots,z(\alpha_n))$$

映射 ψ 是一个连续映射,因为对于 $X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}$ 的第 i 个投射 q_i,复合映射 $q_i\circ\psi=p_{\alpha_i}$ 是连续的.此外容易验证

$$\psi(U)=U_{\alpha_1}\times U_{\alpha_2}\times\cdots\times U_{\alpha_n}$$

它是 $X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}$ 中的一个开集.

由于积空间 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是一个完全正则空间(参见定理 6.5.5),所以存在连续映射

$$g: X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}\to[0,1]$$

使得 $g(\psi(x))=0$,并且对于任何

$$y\in X_{\alpha_1}\times X_{\alpha_2}\times\cdots\times X_{\alpha_n}-U_{\alpha_1}\times U_{\alpha_2}\times\cdots\times U_{\alpha_n}$$

有 $g(y)=1$.令 $f=g\circ\psi:\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma\to[0,1]$.则 $f(x)=0$,并且由于 $B\subset\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma-U$,可见对于任何 $y\in B$ 有 $f(y)=1$.这证明积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 是一个完全正则空间. ■

定理 9.3.5 设 $\{X_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是可度量化空间的一个可数族.则积空间 $\prod_{i\in\mathbb{Z}_+}X_i$ 是一个可度量化空间.

证明 对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,设 $\tilde{\rho}_i$ 是 X_i 的一个度量,它诱导出 X_i 的拓扑.定义 $\rho_i: X_i\times X_i\to\mathbb{R}$ 使得对于任何 $x_i,y_i\in X_i$ 有

$$\rho_i(x_i,y_i)=\min\{\tilde{\rho}_i(x_i,y_i),1\}$$

容易验证 ρ_i 是 X_i 的一个与 $\tilde{\rho}_i$ 等价的度量(即,ρ_i 也诱导出 X_i 的拓扑).ρ_i 满足条件:对于任意 $x_i,y_i\in X_i$ 有 $\rho_i(x_i,y_i)\leqslant 1$.

令 $X=\prod_{i\in\mathbb{Z}_+}X_i$.定义 $\rho: X\times X\to\mathbb{R}$ 使得对于任何 $x,y\in X$

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\rho_i(x(i),y(i))$$

(由于 ρ_i 所满足的条件,定义是合理的,也就是说上式右边总是一个收敛级数.)易于直接验证 ρ 是 X 的一个度量.记 $\mathscr{T}^*$是 X 由度量ρ 诱导出来的拓扑.令 $\mathscr{S}$为 X 的积拓扑 $\mathscr{T}$的定义中的那个子基.

记 $p_j: X \to X_j$ 为 X 的第 j 个投射如常.设 $p_j^{-1}(U_j) \in \mathscr{S}$,其中 U_j 是 X_j 中的一个开集.对于任何 $x \in p_j^{-1}(U_j)$,即 $p_j(x) \in U_j$,存在实数 $\varepsilon > 0$,使得球形邻域 $B(x(j), \varepsilon) \subset U_j$.于是 $x \in B\left(x, \frac{1}{2^j}\varepsilon\right) \subset p_j^{-1}(U_j)$.(因为如果 $y \in B\left(x, \frac{1}{2^j}\varepsilon\right)$,则

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\rho_i(x(i), y(i)) \leqslant \frac{1}{2^j}\varepsilon$$

因此

$$\rho_j(x(j), y(j)) \leqslant 2^j \rho(x, y) < \varepsilon$$

于是 $p_j(y) \in B(x(j), \varepsilon) \subset U_j$,因此 $y \in p_j^{-1}(U_j)$.)这证明 $p_j^{-1}(U_j)$对拓扑 $\mathscr{T}^*$ 而言是一个开集.因此 $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}^*$,从而 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}^*$.

另一方面,设 $B(x, \varepsilon)$是 X 中的一个球形邻域.对于每一个 $y \in B(x, \varepsilon)$,根据度量空间的性质可见,存在 $\delta > 0$ 使得 $B(y, \delta) \subset B(x, \varepsilon)$.存在正整数 $N > 0$ 使得 $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2}\delta$.易于验证 $y \in W \subset B(y, \delta)$,其中

$$W = p_1^{-1}(B(y(1), \frac{\delta}{N})) \cap p_2^{-1}(B(y(2), \frac{\delta}{2N})) \cap \cdots \cap p_N^{-1}(B(y(N), \frac{\delta}{2^{N-1}N}))$$

由于 $W \in \mathscr{T}$,故 $B(x, \varepsilon) \in \mathscr{T}$.由于 X 中的所有球形邻域构成拓扑 $\mathscr{T}^*$ 的一个基,所以 $\mathscr{T}^* \subset \mathscr{T}$.

综合以上两个方面,我们有 $\mathscr{T}^* = \mathscr{T}$.这也就是说 X 的度量 ρ 诱导出 X 的积拓扑.于是积空间 $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ 是可度量化的. ■

习　题

1. 证明:任何一族 T_0(T_1,正则)空间的积空间是 T_0(T_1,正则)空间.

2. 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一族拓扑空间,对于任何 $\gamma\in\Gamma$ 有 $X_\gamma\neq\varnothing$. 证明:积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 满足第一可数性公理当且仅当 Γ 中有一个可数子集 Γ_1 使得当 $\gamma\in\Gamma_1$ 时 X_γ 满足第一可数性公理,当 $\gamma\in\Gamma-\Gamma_1$ 时 X_γ 是平庸空间.

3. 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一族拓扑空间,对于任何 $\gamma\in\Gamma$ 有 $X_\gamma\neq\varnothing$. 证明:积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 可度量化当且仅当 Γ 中有一个可数子集 Γ_1 使得当 $\gamma\in\Gamma_1$ 时 X_γ 可度量化,当 $\gamma\in\Gamma-\Gamma_1$ 时 X_γ 是单点集.

4. 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一族拓扑空间,对于任何 $\gamma\in\Gamma$ 有 $X_\gamma\neq\varnothing$. 证明:积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 局部连通当且仅当 Γ 中有一个有限子集 Γ_1 使得当 $\gamma\in\Gamma_1$ 时 X_γ 局部连通,当 $\gamma\in\Gamma-\Gamma_1$ 时 X_γ 是连通空间.

5. 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一族拓扑空间,对于任何 $\gamma\in\Gamma$ 有 $X_\gamma\neq\varnothing$. 证明:积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 是离散空间当且仅当 Γ 中有一个有限子集 Γ_1 使得当 $\gamma\in\Gamma_1$ 时 X_γ 是离散空间,当 $\gamma\in\Gamma-\Gamma_1$ 时 X_γ 是单点集.

§9.4 Tychonoff 乘积定理

本节给出 Tychonoff 乘积定理,该定理断言一族紧致空间的积空间仍然是一个紧致空间.在证明这个定理之前,先补充一点必要的预备知识,即证明集合论中的一个与选择公理等价的命题 Tukey 引理.(在正文中我们从选择公理出发证明 Tukey 引理,Tukey 引理蕴涵选择公理这件事则作为习题留给读者去证明.)

定义 9.4.1 *设 $\mathscr{F}$ 是一个集族.如果对于任意 $A,B\in\mathscr{F}$,我们有 $A\subset B$,或者 $B\subset A$,则称 $\mathscr{F}$ 为一个套.*

易见,一个套中的任何两个元素的并仍然是这个套中的一个元素,从而一个套中的任何有限个元素的并仍然是这个套中的一个元素.

定义 9.4.2 设$\mathscr{F}$是一个集族.如果 F 是$\mathscr{F}$的一个元素当且仅当 F 的每一个有限子集都是$\mathscr{F}$的元素,则称$\mathscr{F}$是一个**具有有限特征的集族**.

引理 9.4.1 如果$\mathscr{F}$是一个非空的具有有限特征的集族,则

(1)$\mathscr{F}$中每一个元素的任何一个子集都是$\mathscr{F}$的元素;

(2)$\mathscr{F}$中任何一个套的并都是$\mathscr{F}$的元素.

证明 (1)设 $A\in\mathscr{F}$, $B\subset A$.则 B 的任何有限子集也是A 的有限子集,所以是$\mathscr{F}$的元素.因此 B 是$\mathscr{F}$的一个元素.

(2)设$\mathscr{C}$是$\mathscr{F}$中的一个套.对于$\bigcup_{C\in\mathscr{C}}C$ 的任何一个有限子集 A,$\mathscr{C}$中必有有限个元素 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 使得

$$A\subset C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n$$

由于 $C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_n$ 是$\mathscr{C}$的一个元素,所以它也是$\mathscr{F}$的一个元素.所以 $A\in\mathscr{F}$.因此$\bigcup_{C\in\mathscr{C}}C$ 是$\mathscr{F}$的一个元素. ■

定义 9.4.3 设 F 是集族$\mathscr{F}$的一个元素.如果$\mathscr{F}$没有任何元素以 F 为真子集,则称 F 为$\mathscr{F}$的一个**极大元素**;如果$\mathscr{F}$没有任何元素为 F 的真子集,则称 F 为$\mathscr{F}$的一个**极小元素**.

定理 9.4.2 [Tukey 引理] 非空的具有有限特征的集族中必有极大元素.

证明 设$\mathscr{F}$是一个非空的具有有限特征的集族.若$\mathscr{F}=\{\varnothing\}$,则$\varnothing$为$\mathscr{F}$的极大元素.下设$\mathscr{F}$中有非空的元素,并且令 $X=\bigcup_{F\in\mathscr{F}}F$,它是一个非空集合.我们将分为五个步骤来完成引理的证明.

第一步 根据选择公理,X 有选择函数$\varepsilon:\widetilde{X}\to X$,使得对于任意 $A\in\widetilde{X}$, $\varepsilon(A)\in A$.其中 $\widetilde{X}$ 为X 的所有非空子集构成的集族

对于每一个 $F\in\mathscr{F}$,记 $\hat{F}=\{x\in X\mid F\cup\{x\}\in\mathscr{F}\}$,$\hat{F}$是 X 的子集.定义映射 $\chi:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$,使得对于任何一个 $F\in\mathscr{F}$,

$$\chi(F)=\begin{cases}F\cup\varepsilon(\hat{F}-F) & \hat{F}-F\neq\varnothing\\ F & \hat{F}-F=\varnothing\end{cases}$$

易见,$\chi(F)$或者等于 F 或者比F 多一点,并且 F 是$\mathscr{F}$的极大元

素当且仅当 $\chi(F)=F$.

第二步 $\mathscr{F}$的子族 $\mathscr{T}$如果满足条件:

(a) $\varnothing\in\mathscr{T}$;

(b) 若 $F\in\mathscr{T}$,则 $\chi(F)\in\mathscr{T}$;

(c) 若 $\mathscr{C}$为 $\mathscr{T}$中的套,则$\bigcup_{C\in\mathscr{C}}C\in\mathscr{T}$,

则称 $\mathscr{T}$为一个 **t 子族**. 据前一引理以及映射 χ 的定义可见,$\mathscr{F}$是一个 t 子族. 容易验证任意(非 0)多个 t 子族的交仍是一个 t 子族. 于是若令 $\mathscr{T}_0$ 为 $\mathscr{F}$中所有 t 子族的交,则 $\mathscr{T}_0$ 是一个 t 子族,并且是最小的一个 t 子族,亦即如果 $\mathscr{T}$是一个 t 子族,则 $\mathscr{T}\supset\mathscr{T}_0$.

假如我们证明了 $\mathscr{T}_0$ 是一个套,我们便证明了 Tukey 引理. 因为,这时我们若令 $F=\bigcup_{A\in\mathscr{T}_0}A$,则根据条件(b)和(c)可得 $F\in\mathscr{T}_0$ 和 $\chi(F)\in\mathscr{T}_0$,于是 $F\supset\chi(F)$,从而 $\chi(F)=F$. 根据第一步的结论,F 便是 $\mathscr{F}$的极大元素.

第三步 对于每一个 $C\in\mathscr{T}_0$,令

$$\mathscr{U}(C)=\{A\in\mathscr{T}_0\mid \text{或 } A\subset C,\text{或 } C\subset A\}$$

又令

$$\mathscr{T}_1=\{C\in\mathscr{T}_0\mid\mathscr{U}(C)=\mathscr{T}_0\}$$

显然 $\mathscr{T}_1$ 是 $\mathscr{T}_0$ 中的一个套. 假如我们证明了 $\mathscr{T}_1$ 是一个 t 子族,由于 $\mathscr{T}_0$ 是最小的 t 子族,我们便有 $\mathscr{T}_0=\mathscr{T}_1$,于是 $\mathscr{T}_0$ 便是一个套,这就完成了 Tukey 引理的证明.

空集属于 $\mathscr{T}_1$ 是显然的. 以下验证 $\mathscr{T}_1$ 满足条件(c):设 $\mathscr{P}$为 $\mathscr{T}_1$ 中的一个套,$P=\bigcup_{C\in\mathscr{P}}C$. 对于任何一个 $A\in\mathscr{T}_0$,如果所有 $\mathscr{P}$中元素都包含于 A,则 $P\subset A$;如果 $\mathscr{P}$中有一个元素包含着 A,则 $P\supset A$. 这说明 $\mathscr{U}(P)=\mathscr{T}_0$,亦即 $P\in\mathscr{T}_1$. 于是,如果验证了 $\mathscr{T}_1$ 满足条件(b),我们便完成了 Tukey 引理的证明.

第四步 对于每一个 $D\in\mathscr{T}_1$,令

$$\mathscr{V}(D)=\{A\in\mathscr{T}_0\mid A\subset D\text{ 或 }\chi(D)\subset A\}$$

显然我们有$\mathscr{V}(D)\subset\mathscr{U}(\chi(D))$.假如证明了$\mathscr{V}(D)$是一个$t$子族,我们便完成了Tukey引理的证明.因为由于$\mathscr{T}_0$是最小的$t$子族,并且这时我们有:对于每一个$D\in\mathscr{T}_1$,$\mathscr{U}(\chi(D))=\mathscr{T}_0$,即$\chi(D)\in\mathscr{T}_1$.这也就是说$\mathscr{T}_1$满足条件(b).

第五步 $\mathscr{V}(D)$是一个t子族的证明.我们来逐步验证$\mathscr{V}$满足t子族的三个条件:

(1) 显然,$\varnothing\in\mathscr{V}(D)$.

(2) 我们来验证:若$A\in\mathscr{V}(D)$,则$\chi(A)\in\mathscr{V}(D)$.分为三种情形讨论:

(i) $A\subset D$,$A\neq D$.我们证明这时必有$\chi(A)\subset D$.如果不是这样,由于$D\in\mathscr{T}_1$,那么D便会是$\chi(A)$的真子集.这样一来,$\chi(A)$便比A多两点,矛盾.于是我们有:$\chi(A)\subset\chi(D)$,从而$\chi(A)\in\mathscr{V}(D)$.

(ii) $A=D$.此时有$\chi(A)=\chi(D)$,从而$\chi(A)\in\mathscr{V}(D)$.

(iii) $\chi(D)\subset A$.由于$\chi(A)$比A至少多一点,因此$\chi(A)\supset\chi(D)$,从而$\chi(A)\in\mathscr{V}(D)$.

(3) 若$\mathscr{O}$是$\mathscr{V}(D)$中的一个套.如果$\mathscr{O}$的每一个元素都包含于D,则

$$O=\bigcup_{A\in\mathscr{O}}A\subset D$$

如果$\mathscr{O}$中有一个元素包含$\chi(D)$,则$O\supset\chi(D)$.又因为$\mathscr{T}_0$是t子族,$O\in\mathscr{T}_0$,于是按$\mathscr{V}(D)$的定义,有$O\in\mathscr{V}(D)$.

至此Tukey引理全部证明完毕. ■

推论 9.4.3 设$\mathscr{F}$是一个具有有限特征的集族,并且$A\in\mathscr{F}$,则$\mathscr{F}$中有一个包含A的极大元素.

证明 令$\mathscr{F}_1=\{F\in\mathscr{F}\mid F\cup A\in\mathscr{F}\}$.由于$A\in\mathscr{F}_1$,故$\mathscr{F}_1$非空.此外,若$B\in\mathscr{F}_1$,对于$B$的任何有限子集$B_1$,由于$B_1\cup A\subset B\cup A$,故$B_1\cup A\in\mathscr{F}$,从而$B_1\in\mathscr{F}_1$.反之,若$B\in\mathscr{F}$的每一个有限子集

都属于 $\mathscr{F}_1$，考虑 $B\cup A$ 的任何一个有限子集 A_1. 令 $B_1=B\cap A_1$，B_1 为 B 的有限子集，故 $B_1\in\mathscr{F}_1$，即 $B_1\cup A\in\mathscr{F}$. 但由于 $A_1\subset B_1\cup A_1$，所以 $A_1\in\mathscr{F}$. 因为 $\mathscr{F}$ 是具有有限特征的，$B\cup A\in\mathscr{F}$，故 $B\in\mathscr{F}_1$. 这便证明了 $\mathscr{F}_1$ 是具有有限特征的集族.

应用 Tukey 引理，$\mathscr{F}_1$ 有一个极大元素，设为 M. 首先，我们有 $M\cup A\in\mathscr{F}_1$，由于 M 是 $\mathscr{F}_1$ 的一个极大元素，故 $M=M\cup A$，即 $A\subset M$. 其次，我们证明 M 是 $\mathscr{F}$ 的一个极大元素. 这是因为若 $K\in\mathscr{F}$ 并且 $K\supset M$，则 $K\cup A=K\in\mathscr{F}$，即 $K\in\mathscr{F}_1$，从而 $K=M$. ■

定理 9.4.4 [Alexander 子基定理] *设 X 是一个拓扑空间，$\mathscr{S}$ 是它的一个子基. 如果由 $\mathscr{S}$ 的元素构成的 X 的每一个覆盖有一个有限子覆盖，则拓扑空间 X 是一个紧致空间.*

证明 假设由 X 的子基 $\mathscr{S}$ 的元素构成的 X 的每一个覆盖都有有限子覆盖.

令 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{S}$ 的每一个非空有限子族的交的全体构成的集族. 根据子基的定义，$\mathscr{B}$ 是 X 的一个基. 根据定理 7.1.3，为证明本定理只要证明以下论断 1.

论断 1 由 $\mathscr{B}$ 中的元素构成的 X 的每一个覆盖都有有限子覆盖.

而论断 1 又等价于以下论断 2.

论断 2 如果 $\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}$，并且 $\mathscr{B}_1$ 的任何一个有限子族都不覆盖 X，则 $\mathscr{B}_1$ 不覆盖 X.

为证明论断 2，令 ξ 为由 $\mathscr{B}$ 的所有子族 $\mathscr{B}_1$ 构成的一个类，要求 $\mathscr{B}_1$ 的任何一个有限子族都不是 X 的覆盖. 更准确些，即令

$$\xi=\{\mathscr{B}_1\subset\mathscr{B}\mid \mathscr{B}_1\text{ 没有有限子族覆盖 }X\}$$

因此为证明定理只要证明以下论断 3.

论断 3 ξ 中的每一个元素都不是 X 的覆盖.

根据 ξ 的定义可见，ξ 是一个具有有限特征的集族. 我们先来证明以下论断 4.

论断 4　如果 $\mathscr{A}$ 是 ξ 中的一个极大元素，则

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A=\bigcup_{A\in\mathscr{A}\cap\mathscr{S}} A$$

论断 4 的证明：设 $\mathscr{A}$ 是 ξ 中的一个极大元素．任意选取 $C_1\in\mathscr{B}-\mathscr{A}$．如果 $\mathscr{A}$ 中的任意一个有限子族 $\mathscr{A}_1$ 都使得 $\mathscr{A}_1\cup\{C\}$ 不是 X 的一个覆盖，则 $\mathscr{A}\cup\{C\}\in\xi$．这与 $\mathscr{A}$ 是 ξ 中的一个极大元素这一假设矛盾．因此，$\mathscr{A}$ 中存在着一个有限子族，设为 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}\subset\mathscr{A}$ 使得

$$C_1\cup A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=X$$

因此，如果还有 $C_2\in\mathscr{B}-\mathscr{A}$，则存在 $\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}\subset\mathscr{A}$ 使得

$$C_2\cup B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_m=X$$

于是

$$(C_1\cap C_2)\cup A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_m=X$$

从而 $C_1\cap C_2\in\mathscr{B}-\mathscr{A}$．(这是因为，如果 $C_1\cap C_2\in\mathscr{A}$，则 $\mathscr{A}$ 有一个有限子族是 X 的覆盖，与 $\mathscr{A}\in\xi$ 矛盾．)

将以上论证总结一下便得到：如果 $C_1,C_2\in\mathscr{B}$ 使得 $C_1\cap C_2\in\mathscr{A}$，则或者 $C_1\in\mathscr{A}$ 或者 $C_2\in\mathscr{A}$．由此，并简单地通过归纳证明立即可见：对于任何正整数 p，如果 $C_1,C_2,\cdots,C_p\in\mathscr{B}$ 使得

$$C_1\cap C_2\cap\cdots\cap C_p\in\mathscr{A}$$

则存在某一个 $i=1,2,\cdots,p$ 使得 $C_i\in\mathscr{A}$．

设 $A\in\mathscr{A}$，则因为 A 是 $\mathscr{S}$ 中的某有限个元素之交，即存在 $S_1,S_2,\cdots,S_p\in\mathscr{S}$ 使得 $A=S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_p$．因此根据前段结论，可见对于某一个 $i=1,2,\cdots,p$，有 $S_i\in\mathscr{A}\cap\mathscr{S}$，所以 $A\subset S_i\in\mathscr{A}\cap\mathscr{S}$．于是

$$\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A\subset\bigcup_{A\in\mathscr{A}\cap\mathscr{S}} A$$

反过来的包含关系，即 $\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A\supset\bigcup_{A\in\mathscr{A}\cap\mathscr{S}}A$ 是明显的．这样我们就完成了论断 4 的证明．

设 $\mathscr{A}$ 是 ξ 中的一个极大元素．由于 $\mathscr{A}\cap\mathscr{S}$ 是 $\mathscr{A}$ 的一个子族，所

以它的任何有限子族都不覆盖 X，又由于它是 $\mathscr{S}$的一个子族，根据假定，它不是 X 的覆盖. 因此根据论断 4 可见：ξ 中的任何一个极大元素 $\mathscr{A}$都不覆盖 X.

最后我们来证明论断 3. 设 $\mathscr{B}\in\xi$. 根据推论 9.4.3，ξ 中有一个极大元素 $\mathscr{A}$包含 $\mathscr{B}$. 我们已经证明 $\mathscr{A}$不是 X 的覆盖，因此 $\mathscr{B}$ 也不可能是 X 的覆盖. 也就是说，论断 3 是成立的. 至此定理的证明完成. ■

定理 9.4.5[Tychonoff 乘积定理] 任何一族紧致空间的积空间都是紧致空间.

证明 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一族紧致空间. 令 $\mathscr{S}$为积空间 $X=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 定义中的那个子基(见定义 9.2.1).

设 $\mathscr{A}$是积空间 X 的一个覆盖，它由 $\mathscr{S}$的元素构成. 对于每一个 $\gamma\in\Gamma$，令

$$\mathscr{C}_\gamma=\{U_\gamma \mid p_\gamma^{-1}(U_\gamma)\in\mathscr{A}\}$$

我们断定：存在 γ_0 使得 $\mathscr{C}_{\gamma_0}$ 是 X_{γ_0} 的一个开覆盖. 因为若不然，则对于每一个 $\gamma\in\Gamma$，$\mathscr{C}_\gamma$ 不是X_γ 的覆盖. 则此时存在

$$x_\gamma\in X_\gamma-\bigcup_{C\in\mathscr{C}_\gamma}C$$

定义 $x\in X$ 使得对于每一个$\gamma\in\Gamma$ 有$x(\gamma)=x_\gamma$. 则

$$x\notin\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A$$

也就是说 $\mathscr{A}$将不是 X 的覆盖，与关于 $\mathscr{A}$的假设矛盾.

因此 $\mathscr{C}_{\gamma_0}$ 有一个有限子族，设为 $\mathscr{D}_{\gamma_0}$，覆盖 X_{γ_0}. 于是

$$\{p_{\gamma_0}^{-1}(D)\mid D\in\mathscr{D}_{\gamma_0}\}$$

便是 $\mathscr{A}$的一个有限子覆盖.

根据定理 9.4.4，本定理证明完成. ■

习 题

1. 设一族非空的拓扑空间的积空间是一个紧致空间. 证明：每一个坐标

空间都是紧致空间.

2. 证明:紧致的 Tychonoff 空间可以不是可度量化空间.

3. 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一个拓扑空间族. 证明:如果诸坐标空间 X_γ 中有无限多个都不是紧致空间,则积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 中的每一个紧致子集都没有内点.

4. 设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是一个拓扑空间族,对于任何 $\gamma\in\Gamma$ 有 $X_\gamma\neq\varnothing$. 证明:积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 是局部紧致空间当且仅当 Γ 中有一个有限子集 Γ_1 使得当 $\gamma\in\Gamma_1$ 时 X_γ 是局部紧致空间,当 $\gamma\in\Gamma-\Gamma_1$ 时 X_γ 是紧致空间.

5. 证明 Tukey 引理蕴涵选择公理.(提示:设 $\mathscr{A}$ 是由非空集合构成的一个非空族. 考虑定义在 $\mathscr{A}$ 的子族上的所有的选择函数构成的族 $\mathscr{F}$. 指出 $\mathscr{F}$ 是非空的. 将选择函数理解为集合,并证明 $\mathscr{F}$ 是具有有限特征的.)

§9.5 拓扑空间在方体中的嵌入

设 X 是一个拓扑空间,Γ 是一个集合. 从 Γ 到 X 的所有映射构成的集合记作 X^Γ. 按笛卡儿积的定义,事实上集合 X^Γ 便是集族$\{X\}_{\gamma\in\Gamma}$的笛卡儿积$\prod_{\gamma\in\Gamma}X$,因此它有积拓扑,习惯上常称这个积拓扑为 X^Γ 的**点式收敛拓扑**.

定义 9.5.1 设 Γ 是一个集合. 从 Γ 到单位闭区间$[0,1]$的所有映射构成的集合$[0,1]^\Gamma$ 连同它的点式收敛拓扑称为一个**方体**.

明显地,方体以 n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中单位方体为特例. 由于我们熟悉单位闭区间$[0,1]$的拓扑特性,所以方体$[0,1]^\Gamma$ 的某些拓扑性质也容易得知. 例如,每一个方体都是连通的紧致的 Tychonoff 空间,并且当 Γ 是可数集时,方体$[0,1]^\Gamma$ 是满足第二可数性公理的可度量化空间.

然而,方体中究竟都包含了那些类型的拓扑空间? 换言之,何种拓扑空间可以嵌入到方体中去? 这是我们在本节中将要研究的问题. 研究的结果表明,所有的 Tychonoff 空间,也就是所有紧致

Hausdorff 空间的所有子空间,事实上都可以被"装"在某一个方体之中.

在§6.6中我们证明了每一个满足第二可数性公理的 T_3 空间都可以嵌入 Hilbert 空间.那个定理的证明程式可以一般化,这恰为我们解决现在的课题提供了一条有效的途径.

定义 9.5.2 设 X 是一个拓扑空间,F 是一族映射,其中的每一个元素是从拓扑空间 X 到某一个拓扑空间的一个映射.如果对于任何 $x,y\in X,x\neq y$,存在 $f\in F$ 使得 $f(x)\neq f(y)$,则称映射族 F 是一个**区别点的映射族**;如果对于任何 $x\in X$ 和 X 中的任何一个不包含点 x 的闭集 B,存在 $f\in F$ 使得 $f(x)\notin\overline{f(B)}$,则称映射族 F 是一个**区别点和闭集的映射族**.

引理 9.5.1[嵌入引理] 设 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一个拓扑空间族,Y 是一个拓扑空间,$f:Y\to\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 是一个映射.令

$$F=\{p_\alpha\circ f:Y\to X_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$$

其中 p_α 是 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的第 α 个投射.则

(1) f 是一个连续映射当且仅当 F 是一个由连续映射构成的族(即 F 的每一个元素都是连续映射);

(2) f 是一个单射当且仅当映射族 F 能区别点;

(3) 如果 F 是一个能区别点和闭集的映射族,则 $f:Y\to f(Y)$ 是一个开映射.

证明 (1) 即是定理 9.2.2 的重述.

(2) 设 f 是一个单射.则对于任何 $x,y\in Y,x\neq y$ 有 $f(x)\neq f(y)$,即存在 $\alpha\in\Gamma$ 使得 $p_\alpha(f(x))\neq p_\alpha(f(y))$,亦即 $p_\alpha\circ f(x)\neq p_\alpha\circ f(y)$.由于 $p_\alpha\circ f\in F$,这说明 F 是一个区别点的映射族.(2)中的必要性部分的证明完成.充分性部分的证明完全类似,从略.(请读者自己补证.)

(3) 设 F 是一个区别点和闭集的映射族.为证明 $f:Y\to f(Y)$ 是一个开映射,仅需证明对于 Y 中的任何一个点 $x\in Y$ 和

点 x 的任何一个开邻域 $U\subset Y$,集合 $f(U)$是 $f(x)$在拓扑空间 $f(Y)$中的一个邻域.

设 $x\in Y$ 和 $U\subset Y$ 是 x 的一个开邻域.由于 F 区别点和闭集,故存在 $\alpha\in\Gamma$ 使得

$$p_\alpha\circ f(x)\notin\overline{p_\alpha\circ f(Y-U)}$$

即

$$f(x)\notin p_\alpha^{-1}\overline{(p_\alpha\circ f(Y-U))}$$

亦即 $f(x)\in W$,其中

$$W=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma-p_\alpha^{-1}\overline{(p_\alpha\circ f(Y-U))}$$

显然 W 是积空间 $=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 中的一个开集.并且由于

$$p_\alpha^{-1}\overline{(p_\alpha\circ f(Y-U))}\supset p_\alpha^{-1}(p_\alpha\circ f(Y-U))$$
$$\supset f(Y-U)$$

于是我们有

$$f(Y)\cap W=f(Y)-p_\alpha^{-1}\overline{(p_\alpha\circ f(Y-U))}$$
$$\subset f(Y)-f(Y-U)\subset f(U)$$

所以 $f(U)$是点 $f(x)$在 $f(Y)$中的一个邻域. ■

定理 9.5.2[嵌入定理] 设 X 是一个拓扑空间.则 X 是一个 Tychonoff 空间当且仅当 X 能嵌入某一个方体.

证明 单位闭区间[0,1]是一个紧致的 Hausdorff 空间,根据定理 9.3.3 和 Tychonoff 乘积定理(定理 9.4.5)可见任何一个方体也是一个紧致的 Hausdorff 空间.根据推论 7.2.6,每一个方体都是 Tychonoff 空间.易见它的每一个子空间,以及每一个同胚于它的子空间的拓扑空间也都是 Tychonoff 空间.所以当拓扑空间能嵌入于某一个方体时,它必然是一个 Tychonoff 空间.

另一方面,设 X 是一个 Tychonoff 空间,F 是从 X 到[0,1]的所有连续映射构成的族.由于 X 是一个 T_1 空间,所以 X 中每一个点构成的单点集都是 X 中的闭集.因此,根据 Tychonoff 空间的定义直接可见,映射族 F 是一个既区别点又区别点和闭集的映射

族. 定义映射 $e:X\to[0,1]^F$ 使得任何一个点 $x\in X$ 的象 $e(x)\in[0,1]^F$ 满足条件:对于任何 $f\in F$ 有 $e(x)(f)=f(x)\in[0,1]$. 易见,对于每一个 $f\in F$ 有 $p_f\circ e=f$,其中 p_f 是 $[0,1]^F$ 的第 f 个投射. 因此

$$F=\{p_f\circ e\mid f\in F\}$$

根据嵌入引理(引理 9.5.1),映射 e 是从 X 到 $[0,1]^F$ 中的一个嵌入. ■

定理 9.5.3 设 X 是一个拓扑空间. 则 X 是一个 Tychonoff 空间当且仅当 X 能嵌入于某一个紧致的 Hausdorff 空间.

证明 如果 X 是一个 Tychonoff 空间,根据定理 9.5.2, X 可以嵌入于某一个方体. 然而每一个方体都是紧致的 Hausdorff 空间(理由可见于定理 9.5.2 的证明中). 因此当 X 是一个 Tychonoff 空间时,它可以嵌入于某一个紧致的 Hausdorff 空间.

另一方面,每一个紧致的 Hausdorff 空间都是 Tychonoff 空间(参见推论 7.2.6),而易见 Tychonoff 空间的每一个子空间都是 Tychonoff 空间,因此,如果一个拓扑空间能够嵌入于一个紧致的 Hausdorff 空间时,它必然是一个 Tychonoff 空间. ■

习　题

1. 设 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一个拓扑空间族,对于任何 $\gamma\in\Gamma$ 有 $X_\gamma\neq\varnothing$. 证明:如果积空间 $\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 是一个 T_0(T_1, Hausdorff, 正则, 正规, T_3, T_4)空间,则每一个坐标空间 X_γ 也是 T_0(T_1, Hausdorff, 正则, 正规, T_3, T_4)空间.

2. 举例说明嵌入引理(引理 9.5.1)中第(3)条中的"则"字不能改为"当且仅当".

3. 利用嵌入引理(引理 9.5.1)简化 Uryshon 嵌入定理(定理 6.6.1)的证明.

第 10 章　映射空间

在数学分析中我们已经研究过如何用多项式函数去逼近连续函数. 在那里逼近的概念牵涉到度量,也就是说把一类函数作成一个度量空间然后去研究这个度量空间的性质. 然而拓扑概念的引入却使我们可以在更广泛的意义下去研究相应的问题. 在本章中,我们介绍映射集合的点式收敛拓扑,一致收敛拓扑和紧致开拓扑,它们是最常见的三种.

§10.1　点式收敛拓扑

设 X 是一个集合,Y 是一个拓扑空间. 如前一节中那样,我们把从 X 到 Y 的所有映射构成的集合记作 Y^X. 曾几次指出 Y^X 便是笛卡儿积$\prod_{x\in X}Y$.

对于任意 $x\in X$,令 $e_x: Y^X\to Y$ 为 Y^X 的第 x 个投射. 则对于任何 $f\in Y^X$,$e_x(f)=f(x)$恰是映射 f 在点 x 处的象. 因此我们将投射 e_x 改称为 Y^X 在点 $x\in X$ 处的**赋值映射**.

另一方面 Y^X 的积拓扑已有定义,在当前的情形下,这个积拓扑 $\mathscr{T}$ 便是以

$$\mathscr{S}=\{e_x^{-1}(U)\mid U\text{ 是 }Y\text{ 中的一个开集},x\in X\}$$

为子基的拓扑. 我们将 Y^X 的拓扑 $\mathscr{T}$ 称为 Y^X 的**点式收敛拓扑**;将拓扑空间(Y^X,$\mathscr{T}$)称为从集合 X 到拓扑空间 Y 的**映射空间(点式收敛拓扑)**.(为了区别映射空间的其它类型的拓扑,此处括号中关于拓扑的附注一般不予省略.)

由于映射空间(点式收敛拓扑)本身便是一类特别的积空间,因此关于积空间的一般结论全部适用于它,而无须另行证明,我们择要归纳如下:

定理 10.1.1 设 X 是一个集合,Y 是一个拓扑空间.则映射空间 Y^X(点式收敛拓扑)是 T_0(T_1,Hausdorff,T_3,Tychonoff,正则,完全正则,正规,或紧致)的当且仅当拓扑空间 Y 是 T_0(T_1,Hausdorff,T_3,Tychonoff,正则,完全正则,正规,或紧致)的. ■

定理 10.1.2 设 X 是一个集合,Y 是一个拓扑空间.则映射空间 Y^X(点式收敛拓扑)满足第二可数性公理(满足第一可数性公理)当且仅当或者 Y 是一个平庸空间,或者 X 是一个可数集并且 Y 满足第二可数性公理(满足第一可数性公理). ■

定理 10.1.3 设 X 是一个集合,Y 是一个拓扑空间.则映射空间 Y^X(点式收敛拓扑)中的序列$(f_i)_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于 $f\in Y^X$ 当且仅当对于每一个 $x\in X$,拓扑空间 Y 中的序列$\{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于 $f(x)$. ■

讨论连续映射当然更为要紧.因此我们引进以下定义:

定义 10.1.1 设 X 和 Y 是两个拓扑空间.记 $\mathscr{C}(X,Y)$为从 X 到 Y 的所有连续映射构成的集合.因此 $\mathscr{C}(X,Y)\subset Y^X$.$\mathscr{C}(X,Y)$作为映射空间 Y^X(点式收敛拓扑)的子空间称为从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的**连续映射空间(点式收敛拓扑)**,并且这时 $\mathscr{C}(X,Y)$的拓扑也叫做**点式收敛拓扑**.

$\mathscr{C}(X,Y)$作为 Y^X 的子空间,自然可以继承 Y^X 的许多拓扑性质.例如,当 Y 是 Hausdorff 空间时,由于映射空间 Y^X(点式收敛拓扑)是 Hausdorff 空间,所以连续映射空间 $\mathscr{C}(X,Y)$(点式收敛拓扑)也是 Hausdorff 空间.像这样一些经过简单的推证即可得到的结论,不在此一一枚举了.

定理 10.1.4 设 X 是一个 Tychonoff 空间.则从 X 到实数空间$\mathbb{R}$的所有连续映射构成的集合 $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$是映射空间$\mathbb{R}^X$(点式收

敛拓扑)中的一个稠密子集.

证明 需要证明的是在映射空间$\mathbb{R}^X$中的任何一个非空开集中都有$\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$中的元素.为证此又只要证明在$\mathbb{R}^X$的某一个基中的每一个非空元素中都有$\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$中的元素.

根据定义,映射空间$\mathbb{R}^X$有一个子基

$$\mathscr{S}=\{e_x^{-1}(U) \mid U\text{ 是}\mathbb{R}\text{ 中的一个开集},x\in X\}$$

其中 e_x 是$\mathbb{R}^X$在点$x\in X$处的赋值映射.记$\mathscr{B}$为$\mathscr{S}$的每一个非空有限子族之交全体构成的集族,它是$\mathbb{R}^X$的一个基.设 U 是 $\mathscr{B}$ 中的一个非空元素.则 U 可以表示为

$$U=e_{x_1}^{-1}(U_1)\cap e_{x_2}^{-1}(U_2)\cap\cdots\cap e_{x_n}^{-1}(U_n)$$

其中 $x_i\in X$, U_i 是$\mathbb{R}$中的非空开集,$i=1,2,\cdots,n$.并且我们不妨假定诸 x_i 互不相同.对于每一个 $1,2,\cdots,n$,任意选取 $a_i\in U_i$,使得 $a_i\neq 1$.由于 X 是一个 Tychonoff 空间,故存在连续映射 $g_i:X\to\mathbb{R}$ 使得

$$g_i(x_j)=\begin{cases}a_i & \text{如果 } j=i\\ 1 & \text{如果 } j\neq i\end{cases}$$

定义映射 $g:X\to\mathbb{R}$ 使得对于任意 $x\in X$,

$$g(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)\cdot\cdots\cdot g_n(x)$$

明显地,对于每一个 $i=1,2,\cdots,n$,我们有 $g(x_i)=a_i\in U_i$.因此 $g\in U$.另一方面由于 g_i 都是连续的,所以 g 也连续(请读者自行完善证明).因此 $g\in\mathscr{C}(X,\mathbb{R})\cap U$. ■

定理 10.1.5 的以下表达方式(我们将它写作推论,实际上只不过是定理 10.1.4 的一个翻版),或许能够使我们更容易理解这个定理的内涵.

推论 10.1.5 设 X 是一个 Tychonoff 空间,$f:X\to\mathbb{R}$.则对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$ 和 X 中有限个点 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,存在一个连续映射 g 使得 $|f(x_i)-g(x_i)|<\varepsilon$ 对于 $i=1,2,\cdots,n$ 成立.

■

推论 10.1.5 能够使我们更为直观地感觉到,所谓点式收敛拓扑便是刻画映射在有限个点处"逼近"的拓扑;也能够使我们感觉到讨论映射空间不同拓扑(它决定了映射的不同"逼近"方式)的必要性.

习　题

1. 设 X 是一个 Tychonoff 空间,并且只包含可数多个点,映射空间$\mathbb{R}^X$取点式收敛拓扑.证明:如果 $f\in\mathbb{R}^X$,则存在 $\mathscr{C}(X,\mathbb{R})$中的一个序列$\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛于 f.

2. 考虑映射空间$\mathbb{R}^I$(点式收敛拓扑),其中 $I=[0,1]$.对于每一个 $i\in\mathbb{Z}_+$,定义 $f_i\in\mathbb{R}^I$ 使得对于任意$x\in I$ 有$f_i(x)=x^i$.证明:$\mathbb{R}^I$ 中的序列$\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$收敛,但其极限不是一个连续映射.

3. 在定理 10.1.4 中将所有的实数空间$\mathbb{R}$分别换成欧氏平面$\mathbb{R}^2$或单位圆周 S^1.试确定改换后的相应结论是否成立?给出你的证明或反例.

§10.2 一致收敛度量和一致收敛拓扑

在这一节中我们先讨论从一个拓扑空间到一个度量空间的所有连续映射构成的集合,为它给出一个度量,并且研究它的特性.

定义 10.2.1 设 X 是一个集合,(Y,ρ)是一个度量空间.记 Y^X 为从X 到 Y 的所有映射的集合如常.定义 $\tilde\rho: Y^X\times Y^X\to\mathbb{R}$ 使得对于任何 $f,g\in Y^X$,

$$\tilde\rho(f,g)=\begin{cases}1 & \text{存在 } x\in X \text{ 使得 } \rho(f(x),g(x))\geqslant 1\\ \sup\{\rho(f(x),f(y))\mid x\in X\} & \text{其它情形}\end{cases}$$

容易验证 $\tilde\rho$ 是 Y^X 的一个度量(请读者自行验证),称之为 Y^X 的**一致收敛度量**.度量空间$(Y^X,\tilde\rho)$称为映射空间(一致收敛度量).由一致收敛度量 $\tilde\rho$ 诱导出来的 Y^X 的拓扑 $\mathscr{T}_{\tilde\rho}$称为 Y^X 的**一致收敛拓扑**.拓扑空间$(Y^X,\mathscr{T}_{\tilde\rho})$称为**映射空间(一致收敛拓扑)**

当 X 是一个拓扑空间时,从 X 到 Y 的所有连续映射构成的集合 $\mathscr{C}(X,Y)$ 作为度量空间 $(Y^X,\tilde{\rho})$ 的度量子空间,称为**连续映射空间(一致收敛度量)**,这时它的度量也称为**一致收敛度量**;它作为拓扑空间 $(Y^X,\mathscr{T}_{\tilde{\rho}})$ 的子空间称为**映射空间(一致收敛拓扑)**,这时它的拓扑也称为**一致收敛拓扑**.

定义 10.2.2 设 X 是一个集合,(Y,ρ) 是一个度量空间.称映射集合 Y^X 中的一个序列 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ **一致收敛**于映射 $f\in Y^X$,如果对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$,存在整数 $N>0$,使得当 $i>N$ 时

$$\rho(f_i(x),f(x))<\varepsilon$$

对于任何 $x\in X$ 成立.

下面的这个定理便是我们称定义 10.2.1 中的度量 $\tilde{\rho}$ 为一致收敛度量的缘由.

定理 10.2.1 设 X 是一个集合,(Y,ρ) 是一个度量空间.在度量空间 Y^X(一致收敛度量)中的一个序列 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 收敛于 $f\in Y^X$ 当且仅当序列 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 一致收敛于 $f\in Y^X$.

证明 设 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是 Y^X 中的一个序列.序列 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 一致收敛于 $f\in Y^X$,意即对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$,存在整数 $N>0$,使得当 $i>N$ 时

$$\rho(f_i(x),f(x))<\varepsilon$$

对于任意 $x\in X$ 成立,而这当且仅当对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$,存在整数 $N>0$,使得当 $i>N$ 时

$$\tilde{\rho}(f_i,f)<\varepsilon$$

其中,$\tilde{\rho}$ 是 Y^X 的一致收敛度量,换言之,即序列 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 相对于 Y^X 的一致收敛度量而言收敛于 $f\in Y^X$. ■

定理 10.2.2 设 X 是一个集合,(Y,ρ) 是一个度量空间.如果度量空间 (Y,ρ) 是一个完备的度量空间,则映射空间 Y^X(一致收敛度量)也是一个完备度量空间.

证明 设 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是 Y^X 中(相对于一致收敛度量而言的)一

个 Cauchy 序列. 我们不妨假设: 对于任何 $i, j \in \mathbb{Z}_+$ 有 $\tilde{\rho}(f_i, f_j) < 1$. (假若序列 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 不满足这个条件, 我们可以找到 $N>0$, 使得序列 $\{f_{N+i}\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 满足这个条件, 用它来代替原来的序列即可.) 对于每一个 $x\in X$, 由于

$$\rho(f_i(x), f_j(x)) \leqslant \tilde{\rho}(f_i, f_j)$$

所以序列 $\{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 是 Y 中的一个 Cauchy 序列, 它有(唯一的)一个极限, 设为 $f(x)$. 这样我们定义了一个映射 $f: X\to Y$.

现在证明:

$$\lim_{i\to\infty} f_i = f$$

给定实数 $\varepsilon>0$, 首先选取 $N>0$, 使得对于任何 $i, j>N$, 有 $\tilde{\rho}(f_i, f_j) < \frac{1}{2}\varepsilon$. 因此, 对于每一个 $x\in X$ 有 $\rho(f_i(x), f_j(x)) < \frac{1}{2}\varepsilon$. 对于每一个 $x\in X$, 选取整数 $M_x > N$ 使得当 $j = M_x$ 时有 $\rho(f_j(x), f(x)) < \frac{1}{2}\varepsilon$; 因此当 $i>N$ 时有

$$\rho(f_i(x), f(x)) \leqslant \rho(f_i(x), f_{M_x}(x)) + \rho(f_{M_x}(x), f(x)) < \varepsilon$$

从而当 $i>N$ 时有 $\tilde{\rho}(f_i, f) \leqslant \varepsilon$. 这完成了证明. ■

定理 10.2.3 设 X 是一个拓扑空间, (Y, ρ) 是一个度量空间. 则从 X 到 Y 的所有连续映射的集合 $\mathscr{C}(X, Y)$ 是映射空间 Y^X (一致收敛拓扑) 中的一个闭集. 因此度量空间 $\mathscr{C}(X, Y)$ (一致收敛度量) 也是一个完备的度量空间.

证明 由于映射空间 Y^X (一致收敛度量) 是一个度量空间, 所以我们要证明 $\mathscr{C}(X, Y)$ 是 Y^X 的一个闭集, 只要证明 $\mathscr{C}(X, Y)$ 中的任何一个收敛序列的极限仍然属于 $\mathscr{C}(X, Y)$.

为证此, 设 $\mathscr{C}(X, Y)$ 中的一个序列 $\{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}_+}$ 收敛于 $f\in Y^X$. 为了证明 $f\in\mathscr{C}(X, Y)$, 设 $x\in X$, U 是 $f(x)$ 在 Y 中的一个邻域. 选取一个球形邻域 $B(f(x), \varepsilon)\subset U$. 根据定理 10.2.1 可见, 存在整数 $N>0$, 使得当 $i>N$ 时 $\rho(f_i(y), f(y)) < \frac{1}{4}\varepsilon$ 对于任何 $y\in X$

成立. 由于 $f_{N+1}\in\mathscr{C}(X,Y)$，故存在 x 的一个邻域 V 使得 $f_{N+1}(V)\subset B\left(f_{N+1}(x),\frac{1}{2}\varepsilon\right)$. 对于任意 $y\in V$，我们有：

$$\rho(f(y),f(x))\leqslant\rho(f(y),f_{N+1}(y))+\rho(f_{N+1}(y),f_{N+1}(x))$$
$$+\rho(f_{N+1}(x),f(x))<\varepsilon$$

因此 $f(V)\subset B(f(x),\varepsilon)\subset U$，也就是说 $f^{-1}(U)$ 是 x 的一个邻域. 这证明 f 在点 x 处连续. 由于 x 是 X 中任意选取的点，所以 f 连续，即 $f\in\mathscr{C}(X,Y)$. ■

习　题

1. 设 X 是一个集合，(Y,ρ) 是一个度量空间. 令

$$\mathscr{F}=\{f\in Y^X\mid f(X)\text{是 }Y\text{ 中的一个有界子集}\}$$

定义 $d:\mathscr{F}\times\mathscr{F}\to\mathbb{R}$ 使得对于任意 $f,g\in\mathscr{F}$

$$d(f,g)=\sup\{\rho(f(x),g(x))\mid x\in X\}$$

验证

(1) d 是 $\mathscr{F}$ 的一个度量；

(2) 对于任意 $f,g\in\mathscr{F}$，如果 $d(f,g)\geqslant 1$，则 $\tilde{\rho}(f,g)=1$；如果 $d(f,g)\leqslant 1$，则 $\tilde{\rho}(f,g)=d(f,g)$. 其中 $\tilde{\rho}$ 是 Y^X 中的一致收敛度量.

2. 设 X 是一个拓扑空间. 令

$$\mathscr{F}=\{f\in\mathbb{R}^X\mid f(X)\text{是 }\mathbb{R}\text{ 中的一个有界子集}\}$$

证明：$\mathscr{F}$ 是映射空间 $\mathbb{R}^X$(一致收敛度量)的一个闭子集(因此它作为 $\mathbb{R}^X$ 的度量子空间是完备的).

§10.3 紧致开拓扑

这一节讨论拓扑空间之间的所有映射构成的集合中的一个新的拓扑，称为紧致开拓扑，并且指出在某些重要的情形下它与一致收敛拓扑的关联.

先引进一个记号. 设 X 和 Y 是两个集合. 对于任意 $E\subset X$ 和

$B\subset Y$，我们记：

$$W(E,B)=\{f\in Y^X \mid f(E)\subset B\}$$

定义 10.3.1 设 X 是一个集合，Y 是一个拓扑空间，$\mathscr{E}$ 是 X 的一个子集族. 则全体从 X 到 Y 的映射构成的族 Y^X 的子集族

$$\mathscr{S}_{\mathscr{E}}=\{W(E,U)\subset Y^X \mid E\in\mathscr{E}, U \text{ 是 } Y \text{ 的一个开集}\}$$

的并(即 $\mathscr{S}_{\mathscr{E}}$ 中所有元素的并)便是 Y^X(因为对于任何一个 $E\in\mathscr{E}$ 有 $W(E,Y)=Y^X$). 所以 Y^X 有唯一的一个拓扑，记为 $\mathscr{T}_{\mathscr{E}}$，以 $\mathscr{S}_{\mathscr{E}}$ 为它的一个子基. Y^X 的拓扑 $\mathscr{T}_{\mathscr{E}}$ 称为 Y^X 的 $\mathscr{E}$ **开拓扑**. 拓扑空间 $(Y^X,\mathscr{T}_{\mathscr{E}})$称为**映射空间**($\mathscr{E}$ **开拓扑**).

易见，如果我们记 $\mathscr{P}$ 为 X 中所有单点子集构成的族，那么 Y^X 的点式收敛拓扑恰好就是 $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$. 基于这个理由，点式收敛拓扑也叫做**点开拓扑**.

于定义 10.3.1中我们注意：如果 $\mathscr{E}_1$ 和 $\mathscr{E}_2$ 都是 X 的子集族，并且 $\mathscr{E}_1\subset\mathscr{E}_2$，则 $\mathscr{S}_{\mathscr{E}_1}\subset\mathscr{S}_{\mathscr{E}_2}$，于是 $\mathscr{T}_{\mathscr{E}_1}\subset\mathscr{T}_{\mathscr{E}_2}$.

我们曾经说过，所谓点式收敛拓扑(即点开拓扑)便是刻画映射在有限个点处“逼近”的拓扑，与之类似，$\mathscr{E}$ 开拓扑可以认为是要求映射在集族 $\mathscr{E}$ 的元素上“逼近”的拓扑；另一方面，点式收敛拓扑明显与映射的定义域 X 中的拓扑毫无关系，然而我们现在却可以通过集族 $\mathscr{E}$ 的选取使得映射的定义域 X 中的拓扑介入到 $\mathscr{E}$ 开拓扑中去.

所有的 $\mathscr{E}$ 开拓扑类型中最为重要的一种便是紧致开拓扑，我们介绍如下：

定义 10.3.2 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$\mathscr{C}$ 是 X 的全体紧致子集构成的集族. 则从 X 到 Y 的全体映射构成的集合 Y^X 的 $\mathscr{C}$ 开拓扑 $\mathscr{T}_{\mathscr{C}}$ 称为 Y^X 的**紧致开拓扑**；拓扑空间$(Y^X,\mathscr{T}_{\mathscr{C}})$称为**映射空间**(**紧致开拓扑**).

从 X 到 Y 的全体连续映射构成的集合 $\mathscr{C}(X,Y)$作为映射空间 Y^X(紧致开拓扑)的子空间称为**连续映射空间**(**紧致开拓扑**)；

并且 Y^X 的紧致开拓扑在 $\mathscr{C}(X,Y)$ 上的限制也叫做 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的**紧致开拓扑**.

由于每一个单点集都是紧致子集,因此按上文的记号,有 $\mathscr{P}\subset\mathscr{C}$.从而有:

定理 10.3.1 设 X 和 Y 是两个拓扑空间.分别记 $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ 和 $\mathscr{T}_{\mathscr{C}}$ 为从 X 到 Y 的全体映射构成的集合 Y^X 的点式收敛拓扑和紧致开拓扑,则 $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}\subset\mathscr{T}_{\mathscr{C}}$.因此,对于每一个 $x\in X$,赋值映射 $e_x:Y^X\to Y$ 对于 Y^X 的紧致开拓扑而言是一个连续映射. ■

根据同样的理由可见,当 Y 是 T_0, T_1 或 Hausdorff 空间时,映射空间 Y^X(紧致开拓扑)以及连续映射空间 $\mathscr{C}(X,Y)$(紧致开拓扑)相应也是 T_0, T_1 或 Hausdorff 空间.但是当 Y 是正规,满足第一可数性公理或满足第二可数性公理时并不蕴涵 Y^X(紧致开拓扑)和 $\mathscr{C}(X,Y)$(紧致开拓扑)具有相应的性质.然而当 Y 是正则空间时,映射空间 $\mathscr{C}(X,Y)$(紧致开拓扑)却仍然是正则空间(定理 10.3.3).

引理 10.3.2 设 X 是一个拓扑空间,$Y\subset X$.如果 $\mathscr{S}$ 是 X 的一个子基,并且对于任何一个 $y\in Y$ 和 $\mathscr{S}$ 中任何一个包含 y 的元素 S,存在 $\mathscr{S}$ 中的一个包含 y 的元素 T 使得 T 在拓扑空间 X 中的闭包 $\overline{T}\subset S$,则 Y 作为 X 的子空间是一个正则空间.

证明 首先我们证明:对于任何 $y\in Y$ 和 y 在 X 中的任何一个开邻域 U,存在 y 在 X 中的一个开邻域 V 使得 $\overline{V}\subset U$.

因为根据子基的定义可见,存在某有限个 $S_1,S_2,\cdots,S_n\in\mathscr{S}$ 使得 $y\in\bigcap_{i=1}^n S_i\subset U$,其中 $\mathscr{S}$ 是 X 的一个子基.于是当 $\mathscr{S}$ 满足引理条件时,对于每一个 $i=1,2,\cdots,n$,存在 $T_i\in\mathscr{S}$ 包含 y 并且使得 $T_i^-\subset S_i$.于是 $V=\bigcap_{i=1}^n T_i$ 是 y 的一个开邻域,并且

$$\overline{V}=\left(\bigcap_{i=1}^n T_i\right)^-=\bigcap_{i=1}^n T_i^-\subset\bigcap_{i=1}^n S_i\subset U$$

现在设 U_1 是 $y\in Y$ 在子空间 Y 中的一个开邻域.则存在 y

在X中的一个开邻域U使得$U_1=U\cap Y$. 根据前面的结论可知，存在y在X中的一个开邻域V使得$\overline{V}\subset U$. 令$V_1=V\cap Y$，它是y在Y中的一个开邻域. V_1在Y中的闭包即为V_1在X中的闭包V_1^-与Y的交，因此包含于U_1中. 这证明子空间Y是一个正则空间. ■

定理 10.3.3 设X和Y都是拓扑空间. 如果Y是一个正则空间，则连续映射空间$\mathscr{C}(X,Y)$(紧致开拓扑)也是一个正则空间.

证明 根据定义，连续映射空间$\mathscr{C}(X,Y)$(紧致开拓扑)是映射空间Y^X(紧致开拓扑)的子空间. 而后者有一个子基

$$\mathscr{S}_{\mathscr{C}}=\{W(K,U)\mid K\text{ 是 }X\text{ 中的一个紧致子集}\\ U\text{ 是 }Y\text{ 中的一个开集}\}$$

其中$W(K,U)=\{f\in Y^X\mid f(K)\subset U\}$. 因此

$$\overline{\mathscr{S}}_{\mathscr{C}}=\mathscr{S}_{\mathscr{C}}|_{\mathscr{C}(X,Y)}$$

是$\mathscr{C}(X,Y)$(紧致开拓扑)的一个子基.

为证明本定理，设$f\in W(K,U)\cap\mathscr{C}(X,Y)$，其中$K$是$X$中的一个紧致子集，$U$是$Y$中的一个开集. 由于$Y$是一个正则空间，所以对于每一个$y\in f(K)(\subset U)$存在$y$的一个开邻域$V_y$使得$V_y^-\subset U$. 集族$\{V_y\mid y\in f(K)\}$是$f(K)$的一个开覆盖. 由于$f$是一个连续映射，所以$f(K)$是$Y$的一个紧致子集，因此$f(K)$的开覆盖$\{V_y\mid y\in f(K)\}$有一个有限子覆盖，设为$\{V_{y_1},V_{y_2},\cdots,V_{y_n}\}$. 令$V=\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. V是Y的一个开集，并且易见$f(K)\subset V$，所以$f\in W(K,V)\in\mathscr{S}_{\mathscr{C}}$. 此外

$$\overline{V}=\Big(\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}\Big)^-=\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}^-\subset U$$

因此$W(K,\overline{V})\subset W(K,U)$. 由于

$$W(K,\overline{V})=\bigcap_{x\in K}W(\{x\},\overline{V})$$

$$= \bigcap_{x\in K}(Y^X - W(\{x\}, Y-\overline{V}))$$
$$= Y^X - \bigcup_{x\in K} W(\{x\}, Y-\overline{V})$$

其中对于每一个 $x\in K$，$W(\{x\}, Y-\overline{V})$是相对于 Y^X 的紧致开拓扑的一个开集，从而 $W(K,\overline{V})$是一个闭集. 由于 $W(K,V)\subset W(K,\overline{V})$，可见

$$\overline{W(K,V)}\subset W(K,\overline{V})\subset W(K,U)$$

这样我们根据引理 10.3.2 便可见连续映射空间 $\mathscr{C}(X,Y)$（紧致开拓扑）是一个正则空间. ■

我们现在来指出一致收敛拓扑和紧致开拓扑两者之间的一个关联.

定理 10.3.4 设 X 是一个紧致空间，(Y,ρ)是一个度量空间. 则连续映射空间 $\mathscr{C}(X,Y)$的一致收敛拓扑和紧致开拓扑相同.

证明 分别记 $\mathscr{T}$ 和 $\tilde{\mathscr{T}}$ 为 $\mathscr{C}(X,Y)$的一致收敛拓扑和紧致开拓扑. 并且记 $\tilde{\rho}$ 为 $\mathscr{C}(X,Y)$的一致收敛拓扑定义中诱导这个拓扑的度量. 我们分为两个方面来证明定理.

(1) 设 $f\in W(K,U)\cap\mathscr{C}(X,Y)$，其中 K 是 X 的一个紧致子集，U 是 Y 的一个开集，则 $W(K,U)$是 f 相对于 $\mathscr{C}(X,Y)$的一致收敛拓扑 $\mathscr{T}$ 而言的一个邻域. (因此 $W(K,U)\cap\mathscr{C}(X,Y)\in\mathscr{T}$. 从而 $\tilde{\mathscr{T}}\subset\mathscr{T}$.)

因为如果 $K=\varnothing$或者 $U=Y$，则 $W(K,U)=\mathscr{C}(X,Y)$. 在这种情形下没有什么要证明的. 以下假设 $K\neq\varnothing$和 $U\neq Y$，这时由于 f 是一个连续映射，故 $f(K)$是包含于开集 U 中的一个非空紧致子集，并且 $Y-U$ 是 Y 的一个非空闭集. 因此

$$\delta=\rho(f(K), Y-U)>0$$

由此可见 $f\in B(f,\delta)\subset W(K,U)$，其中 $B(f,\delta)$是相对于度量 $\tilde{\rho}$ 而言的球形邻域. 这是因为，如果 $g\in B(f,\delta)$，则对于每一个 $x\in X$有 $\rho(g(x),f(x))<\delta$. 因此当 $x\in K$ 时 $g(x)\in U$. 因此

$g(K)\subset U$，即 $g\in W(K,U)$.

(2) $f\in\mathscr{C}(X,Y)$的相对于度量 $\tilde{\rho}$ 而言的每一个球形邻域 $B(f,\varepsilon)$也是 f 相对于紧致开拓扑 $\tilde{\mathscr{T}}$而言的一个邻域.(因此 $\mathscr{T}\subset\tilde{\mathscr{T}}$.)

这是因为 f 连续，故 $f(X)$是 Y 的一个紧致子集.集族 $\left\{B\left(f(x),\frac{1}{3}\varepsilon\right)\Big| x\in X\right\}$是$f(X)$的一个开覆盖，所以有有限子覆盖，设为

$$\left\{B\left(f(x_1),\frac{1}{3}\varepsilon\right),B\left(f(x_2),\frac{1}{3}\varepsilon\right),\cdots,B\left(f(x_n),\frac{1}{3}\varepsilon\right)\right\}$$

对于每一个 $i=1,2,\cdots,n$，令 $K_i=f^{-1}\left(\left(B\left(f(x_i),\frac{1}{3}\varepsilon\right)\right)^-\right)$和 $U_i=B\left(f(x_i),\frac{2}{3}\varepsilon\right)$. 于是 K_i 是 X 中的闭集，所以也是紧致子集，U_i 是 Y 中的开集.这时我们有：

$$X=K_1\cup K_2\cup\cdots\cup K_n$$

和

$$f(K_i)\subset\left(B\left(f(x_i),\frac{1}{3}\varepsilon\right)\right)^-\subset U_i$$

所以若令

$$\widetilde{W}=\widetilde{W}(K_1,U_1)\cap\widetilde{W}(K_2,U_2)\cap\cdots\cap\widetilde{W}(K_n,U_n)$$

则有 $f\in\widetilde{W}$，其中 $\widetilde{W}(K_i,U_i)=W(K_i,U_i)\cap\mathscr{C}(X,Y)$.

如果 $g\in\widetilde{W}$，则对于每一个 $x\in X$，存在某一个 $i=1,2,\cdots,n$ 使得$x\in K_i$. 于是 $g(x)\in U_i$，即 $\rho(g(x),f(x_i))<\frac{2}{3}\varepsilon$. 此外 $f(x)\in\left(B\left(f(x_i),\frac{1}{3}\varepsilon\right)\right)^-$，即 $\rho(f(x),f(x_i))\leqslant\frac{1}{3}\varepsilon$. 从而

$$\rho(g(x),f(x))\leqslant\rho(g(x),f(x_i))+\rho(f(x_i),f(x))<\varepsilon$$

即 $g\in B(f,\varepsilon)$. 这证明包含 f 的相对于拓扑$\tilde{\mathscr{T}}$而言的开集 $\widetilde{W}$ 包含于$B(f,\varepsilon)$. 因此 $B(f,\varepsilon)$是 f 相对于拓扑$\tilde{\mathscr{T}}$而言的一个邻域.

■

习 题

1. 设 X 和 Y 是一个拓扑空间，$X_1 \subset X$. 定义映射

$$r: \mathscr{C}(X, Y) \to \mathscr{C}(X_1, Y)$$

使得对于任何 $f \in \mathscr{C}(X, Y)$，$r(f) = f|_{X_1}$. 证明：对于 $\mathscr{C}(X, Y)$ 和 $\mathscr{C}(X_1, Y)$ 的紧致开拓扑而言，映射 r 连续.

2. 设 X 和 Y 是两个拓扑空间. 映射 $e: \mathscr{C}(X, Y) \times X \to Y$ 使得对于每一个 $(f, x) \in \mathscr{C}(X, Y) \times X$ 有

$$e(f, x) = f(x)$$

称为**赋值映射**. 证明：对于 $\mathscr{C}(X, Y)$ 的紧致开拓扑而言，赋值映射 e 是一个连续映射.

索　　引

K

L