点集拓扑学教案

为开设数学专业本科自学考试及宁德师专数学系数学教育专业“点集拓扑”课程, 按熊金城《点集拓扑讲义》(第三版, 北京: 高等教育出版社, 2003)第一至七章编写的教案。自考生授课 30 学时, 专科生授课 45 学时。教学内容与进度安排如下。

章节	自考生授课主要内容	时数
1	朴素集合论	2
2.1-2.3	度量空间、拓扑空间、连续映射、邻域	4
2.4-2.7	闭集闭包、内部、边界、基、序列	4
3	子空间、积空间、商空间	3
4	连通、连通分支、局部连通、道路连通	3
5	第一、二可数性、可分性、Lindelöf 性	3
6.1-6.4	各种分离性公理 T_0-T_4	3
6.5-6.6	分离公理的运算保持、Urysohn 度量化定理	2
7.1-7.3	紧致性、分离性及 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致子集	3
7.4-7.5	各种紧致性、度量空间中的紧致性	2
7.6	局部紧致空间、仿紧致空间	1

章节	专科生授课主要内容	时数	备注
	拓扑学的起源	1	
一	**朴素集合论**	5	习题课时 1
1.1	集合、映射与关系	2	
1.2	无限集、选择公理	2	
二	**拓扑空间与连续映射**	14	习题课时 2
2.1	度量空间与连续映射	3	不讲附录
2.2	拓扑空间与连续映射	2	
2.3	邻域与邻域系	1	不讲定理 2.3.3
2.4	导集、闭集、闭包	3	不讲例 2.4.4, 定理 2.4.8
2.5	内部、边界	1	
2.6	基与子基	1	部分证明定理 2.6.3, 邻域基及相关内容在 5.1 中介绍
2.7	拓扑空间中的序列	1	
三	**子空间、有限积空间、商空间**	5	习题课时 1
3.1	子空间	1.5	嵌入在 6.6 中介绍
3.2	积空间	1.5	
3.3	商空间	1	例 3.3.3 起不讲
四	**连通性**	6	习题课时 1
4.1	连通空间	2	
4.2	连通性的某些简单应用	1	
4.3	连通分支	0.5	
4.4	局部连通空间	1	
4.5	道路连通空间	0.5	道路连通分支不讲
五	**有关可数性的公理**	5	习题课时 1
5.1	第一与第二可数性公理	2	
5.2	可分空间	1	定理 5.2.1 不讲
5.3	Lindelöf 空间	1	
六	**分离性公理**	8	习题课时 2
6.1	T_0、T_1、Hausdorff 空间	1.5	
6.2	正则、正规、T_3、T_4 空间	1	例 6.2.2 讲部分
6.3	Urysohn 引理和 Tietze 扩张定理	0.5	不讲定理 6.3.1, 6.3.4 的证明
6.4	完全正则空间, Tychonoff 空间	1	
6.5	分离性公理与子空间、积空间和商空间	1	
6.6	可度量化空间	1	定理 6.6.1 讲部分
七	**紧致性**	10	习题课时 3(含总复习)
7.1	紧致性	2.5	定理 7.1.6 讲部分
7.2	紧致性与分离性公理	0.5	引理 7.3.2 用分析中的结论
7.3	n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致子集	0.5	
7.4	几种紧致性以及其间的关系	1.5	
7.5	度量空间中的紧致性	1	
7.6	局部紧致空间, 仿紧致空间	1	定理 7.6.8 不讲

第一章 朴素集合论

点集拓扑学(Point-set Topology)现称一般拓扑学(General Topology), 它的起源与出发点都是集合论. 作为基本的点集拓扑学知识, 所需的只是一些朴素集合论的预备知识. 本章介绍本书中要用到的一些集合论内容, 主要涉及集合及集族的运算、等价关系、映射、可数集、选择公理等. 作为一教材, 讲义对各部分内容均有较系统的论述, 作为授课, 我们只强调一些基本内容, 而对已有过了解的知识不提或少提.

记号: **Z, Z$_+$, R, Q** 分别表示整数集, 正整数集, 实数集和有理数集.

一. 集合的运算

幂集 $\mathcal{P}(X)$, 交∩、并∪、差－(补, 余 CA, A').

运算律: De Morgan 律: (1) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

(2) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

利用集合的包含关系证明(1).

类似可定义任意有限个集的交或并, 如记

$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=(A_1\cup\ldots\cup A_{n-1})\cup A_n=\cup_{i\leq n}A_i=\cup_{i=1}^{n}A_i$.

规定 0 个集之并是$\varnothing$, 不用 0 个集之交.

二. 关系

R 是集合 X 的一个关系, 即 $R\subset X\times X$, $(x, y)\in R$ 记为 xRy, 称 x 与 y 是 R 相关的.

R 称为自反的, 若$\forall x\in X$, xRx;

R 称为对称的, 若 xRy, 则 yRx;

R 称为传递的, 若 xRy, yRz, 则 xRz.

等价关系: 自反、对称、传递的关系.

如, $\Delta(X)=\{(x, x)|x\in X\}$, 恒同关系, 它是等价关系; $\{(x, y)|\ x, y\in \mathbf{R}, x<y\}$, 小于关系, 它是传递的, 但不是对称的、不是自反的.

设 R 是 X 上等价关系, $\forall x\in X$, x 的 R 等价类或等价类$[x]_R$ 或$[x]$为$\{y\in X\mid xRy\}$, $[x]_R$ 的元称为$[x]_R$ 的代表元; 商集 $X/R=\{[x]_R\mid x\in X\}$.

定理 1.4.1 设 R 是非空集合 X 的等价关系, 则

(1) $\forall x\in X$, $x\in[x]_R$;

(2) $\forall x, y\in X$, 或者$[x]_R=[y]_R$, 或者$[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$.

证(2). 设 $z\in[x]_R\cap[y]_R$, 则 zRx, zRy, 于是$[x]_R\subset[y]_R$ 且$[y]_R\subset[x]_R$, 于是$[x]_R=[y]_R$.

三. 映射

函数 $f: X\to Y$. $\forall A\subset X$, $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$像; $\forall B\subset Y$, $f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$原像.

满射、单射、一一映射(双射)、可逆映射、常值映射、恒同映射 i_X、限制 $f|_A$、扩张、内射 $i_X|_A$: $A\to X$.

集合 X_i, $i\le n$, 笛卡儿积 $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n=\Pi_{i\le n}X_i=\Pi_{i=1}^{n}X_i=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid x_i\in X_i, i\le n\}$到第 i 个坐标集 X_i的投射 $p_i: X\to X_i$ 定义为 $p(x)=x_i$, 其中 $x=(x_1,\ldots,x_n)$.

对等价关系 R, 集合 X 到商集 X/R 的自然投射 $p: X\to X/R$ 定义为 $p(x)=[x]_R$.

四. 集族

数列$\{x_n\}=\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}_+}$, 有标集族$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, 指标集 Γ, 与$\{A_\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}$不同, 可记有标集族$\mathcal{A}=\{A\}_{A\in\mathcal{A}}$; 类似地, 定义其并$\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$(或$\cup\mathcal{A}$)、交$\cap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$(或$\cap\mathcal{A}$), 不定义 0 个集的交. 与有限集族有相同的运算律, 如 De Morgan 律

$A-(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\cap_{\gamma\in\Gamma}(A-A_\gamma)$, $A-(\cap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\cup_{\gamma\in\Gamma}(A-A_\gamma)$.

映射对应的集族性质: $f(\cup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)=\cup_{\gamma\in\Gamma}f(A_\gamma)$, $f(\cap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma)\subset\cap_{\gamma\in\Gamma}f(A_\gamma)$,

$$f^{-1}(\cup_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\cup_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(B_\gamma),\ f^{-1}(\cap_{\gamma\in\Gamma}B_\gamma)=\cap_{\gamma\in\Gamma}f^{-1}(B_\gamma).$$

五. 无限集

通过一一映射来确定两集合的个数的多少.

有限集($\varnothing$或与某$\{1, 2, \ldots, n\}$有一一映射), 无限集, 可数集($\varnothing$或存在 X 到 $\mathbf{Z}_+$的单射), 不可数集.

易验证: 有限集是可数集, 可数集的子集是可数集, 可数集的映像是可数集.

定理 1.7.3 X 是可数集$\Leftrightarrow$X 是 $\mathbf{Z}_+$的映像.

由此, $\mathbf{Q}$ 是可数集, 两可数集的笛卡儿积集是可数集, 可数个可数集之并集是可数集.

定理 1.7.8 $\mathbf{R}$ 是不可数集.

利用 Cantor 对角线法证明开区间(0, 1)中的实数不可数.

直观上, 集合 A 中元素的个数称为该集合的基数, 记为 card A, 或$|A|$. $|\mathbf{Z}_+|=\aleph_0$, $|\mathbf{R}|=\aleph$. 若存在从集合 A 到集合 B 的单射, 则定义$|A|\le|B|$.

连续统假设: 不存在基数α, 使得$\aleph_0<\alpha<\aleph$.

选择公理: 若 $\mathcal{A}$ 是由非空集构成的集族, 则$\forall A\in\mathcal{A}$, 可取定$\varepsilon(A)\in A$.

由选择公理可证明, 若α, β是基数, 则下述三式中有且仅有一成立: $\alpha<\beta$, $\alpha=\beta$, $\alpha>\beta$.

第二章 拓扑空间与连续映射

本章是点集拓扑学基础中之基础, 从度量空间及其连续映射导入一般拓扑学中最基本的两个概念: 拓扑空间、连续映射, 分析了拓扑空间中的开集、邻域、聚点、闭集、闭包、内部、边界、基与子基的性质，各几种不同的角度生成拓扑空间，及刻画拓扑空间上的连续性.

§2.1 度量空间与连续映射

在 $\mathbf{R}$ 上, $|x-y|$表示点 x 与 y 之间的距离. 绝对值是一非负函数, 具有三条重要性质.

定义 2.1.1 设 X 是一集合, ρ: $X\times X\to\mathbf{R}$. 如果ρ满足正定性、对称性和三角不等式, 则称ρ是 X 的一个度量. (X, ρ)称为度量空间, $\rho(x, y)$表示两点 x, y 之间的距离.

例 2.1.1 实数空间 $\mathbf{R}$.

$\rho(x,y)=|x-y|$, $\mathbf{R}$ 的通常度量.

例 2.1.2 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n=\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\ldots\times\mathbf{R}$.

对于 $x\in\mathbf{R}^n$, 记 $x=(x_i)$. 定义$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$, $\mathbf{R}^n$ 的通常度量, n 维欧氏空间. $\mathbf{R}^2$ 称为欧氏平面或平面.

例 2.1.3 Hilbert 空间 $\mathbf{H}$.

$\mathbf{H}=\{x=(x_1, x_2, \ldots) \mid x_i\in\mathbf{R}, i\in\mathbf{Z}_+; \sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty\}$. 定义$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2}$, 则度量空间$(\mathbf{H}, \rho)$称为 Hilbert 空间.

例 2.1.4 离散度量空间.

度量空间(X, ρ)称为离散的，若$\forall x\in X$, $\exists\delta_x>0$, 使得不存在 X 中的点 $y\neq x$, 满足$\rho(x, y)<\delta_x$. 如对集合 X, 按如下方式定义ρ: $X\times X\to\mathbf{R}$ 是 X 上的离散度量:

$$\rho(x, y)=\begin{cases}0, x=y,\\ 1, x\neq y.\end{cases}$$

定义 2.1.2 设(X, ρ)是度量空间. $B(x, \varepsilon)=\{y\in X \mid \rho(x, y)<\varepsilon\}$称为以 x 为心, ε为半径的球形邻域, 或ε邻域, 或球形邻域. 对$(\mathbf{R}, |.|)$, $B(x, \varepsilon)=(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$.

定理 2.1.1 度量空间(X, ρ)的球形邻域具有性质:

(1) $\forall x\in X$, $\varepsilon>0$, $x\in B(x, \varepsilon)$;

(2) $\forall x\in X$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2>0$, $\exists\varepsilon>0$, 使 $B(x, \varepsilon)\subset B(x, \varepsilon_1)\cap B(x, \varepsilon_2)$;

(3) 若 $y\in B(x, \varepsilon)$, $\exists\delta>0$ 使 $B(y, \delta)\subset B(x, \varepsilon)$.

证 (2) $0<\varepsilon<\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$; (3) $\delta=\varepsilon-\rho(x, y)$, 则 $B(y, \delta)\subset B(x, \varepsilon)$.

定义 2.1.3 X 的子集 A 称为(X, ρ)的开集, 若$\forall a\in A$, $\exists\varepsilon>0$, 使 $B(a, \varepsilon)\subset A$.

每一球形邻域是开集.

例 2.1.5 **R** 中的开区间是开集.

$\forall x\in(a, b)$, 让 $\varepsilon=\min\{x-a, b-x\}$, 则 $B(x, \varepsilon)\subset(a, b)$. 同样可证, 无限开区也是开集. 闭区间$[a, b]$不是开集.

定理 2.1.2 度量空间的开集具有以下性质:

(1)X, $\varnothing$是开集; (2)两开集的交是开集; (3)任意开集族之并是开集.

证 (1)由定理 2.1.1(1); (2), (3)由定理 2.1.1(2).

定义 2.1.4 设 X 是度量空间, $x\in X$, $U\subset X$. U 称为 x 的邻域, 若$\exists$开集 V, 使 $x\in V\subset U$.

定理 2.1.3 U 是 X 中点 x 的邻域$\Leftrightarrow\exists\varepsilon>0$, 使 $B(x, \varepsilon)\subset U$.

定义 2.1.5 设 X, Y 是两度量空间. $f: X\to Y$, $x_0\in X$, 称 f 在 x_0 连续, 若$\forall f(x_0)$的球形邻域 $B(f(x_0), \varepsilon)$($\forall\varepsilon>0$), $\exists x_0$ 的球形邻域 $B(x_0, \delta)$($\exists\delta>0$), 使 $f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\varepsilon)$(当$\rho_X(x, x_0)<\delta$时, $\rho_Y(y, f(x_0))<\varepsilon$).

称 f 在 X 连续, 若 f 在 X 的每一点连续.

定理 2.1.4 设 X,Y 是两度量空间. $f: X\to Y$, $x_0\in X$, 那么

(1)f 在 x_0 连续$\Leftrightarrow$若 U 是 $f(x_0)$的邻域, 则 $f^{-1}(U)$是 x_0 的邻域;

(2)f 在 X 连续$\Leftrightarrow$若 U 是 Y 的开集, 则 $f^{-1}(U)$是 X 的开集.

证 (1)利用定义 2.1.5, 2.1.4.

(2)"$\Rightarrow$" $f^{-1}(U)$是每一点的邻域."$\Leftarrow$"证每一点连续, 利用(1).

由此可见, 度量空间的连续只与邻域或开集有关. 它导入建立比度量空间更一般的拓扑空间的概念及其连续性.

§2.2 拓扑空间与连续映射

定义 2.2.1 设 $\mathcal{T}$ 是集合 X 的子集族, 若 $\mathcal{T}$ 满足:

(1)$X, \varnothing\in\mathcal{T}$; (2) $\forall A, B\in\mathcal{T}\Rightarrow A\cap B\in\mathcal{T}$; (3) $\forall\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}$, $\cup\mathcal{T}_1\in\mathcal{T}$;

称 $\mathcal{T}$ 是 X 的一个拓扑. $(X, \mathcal{T})$是拓扑空间, $\mathcal{T}$ 的元称为 X 的开集.

空间 X 的拓扑是 X 的全体开集的族.

定义 2.2.2 (X, ρ)度量空间. $\mathcal{T}_\rho$ 由 X 的所有开集构成的族. $(X, \mathcal{T}_\rho)$称为由度量ρ诱导出的拓扑空间. 简称 $\mathcal{T}_\rho$ 为度量拓扑.

度量空间$\Rightarrow$拓扑空间.

例 2.2.1 平庸拓扑 $\mathcal{T}=\{X, \varnothing\}$. 平庸空间.

例 2.2.2 离散拓扑 $\mathcal{T}=\mathcal{P}(X)$. 离散空间. X 的每一子集是开集. 由离散度量空间导出的拓扑是离散拓扑.

例 2.2.4 有限补拓扑 $\mathcal{T}=\{U\subset X \mid U'$是 X 的有限子集$\}\cup\{\varnothing\}$.

验证 $\mathcal{T}$ 是 X 上的拓扑. (1)显然. (2)$\forall A, B\subset X$, 讨论 $A\cap B$ 时分两种情形, 一是 A, B 中有一是 $\varnothing$, 二是 A, B **都不是**$\varnothing$. (3)设 $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}$, 不妨设$\exists\varnothing\neq A_0\in\mathcal{T}_1$, 利用 De Morgan 律. 有限补空间.

例 2.2.5 可数补拓扑 $\mathcal{T}=\{U\subset X \mid U'$是 X 的可数子集$\}\cup\{\varnothing\}$.

定义 2.2.3 可度量化空间.

离散空间是可度量化空间. 多于一点的平庸空间不是可度量化空间. 度量化问题是点集拓扑学研究的中心问题之一. 本书将在§6.6 中给出该问题的一个经典的解.

定义 2.2.4 X, Y 是两拓扑空间. $f: X\to Y$. 称 f 连续, 若 Y 中每一开集 U 的原象 $f^{-1}(U)$是 X 中的开集.

定理 2.2.1 恒同映射连续. 连续函数的复合是连续的.

定义 2.2.5 $f: X\to Y$ 称为同胚或同胚映射, 若 f 是一一映射且 f 及 f^{-1} 均连续.

定义 2.2.6 称两空间 X 与 Y 同胚, 或 X 同胚于 Y, 若存在从 X 到 Y 的同胚.

定理 2.2.2(2.2.3) 恒同映射同胚(X 与 X 同胚); f 同胚 $\Rightarrow f^{-1}$ 同胚(若 X 与 Y 同胚, 则 Y 与 X 同胚); 同胚的复合是同胚(若 X 与 Y 同胚, 且 Y 与 Z 同胚, 则 X 与 Z 同胚).

空间的同胚关系是等价关系.

拓扑学的中心任务: 研究拓扑不变性质.

抽象化过程: 欧氏空间→度量空间→拓扑空间; 点距离→度量→开集.

§2.3 邻域

定义 2.3.1 设$(X, \mathcal{T})$是拓扑空间. $x\in X$, $U\subset X$ 称为 x 的邻域, 如果存在 $V\in\mathcal{T}$ 使 $x\in V\subset U$; 若 U 是开的, U 称为 x 的开邻域.

定理 2.3.1 设 $U\subset X$. U 是 X 的开集$\Leftrightarrow$U 是它的每一点的邻域.

证 由定义得“$\Rightarrow$”; 利用开集之并为开得“$\Leftarrow$” .

x 在 X 的所有邻域构成的族称为 x 的邻域系, 记为 $\mathcal{U}_x$.

定理 2.3.2 $\mathcal{U}_x$ 的性质:

(1) $X\in U_x$; $\forall U\in\mathcal{U}_x$, $x\in U$;

(2) $U, V\in\mathcal{U}_x\Rightarrow U\cap V\in\mathcal{U}_x$;

(3) $U\in\mathscr{U}_x$ 且 $U\subset V\Rightarrow V\in\mathscr{U}_x$;

(4) $U\in\mathscr{U}_x\Rightarrow\exists V\in\mathscr{U}_x$ 使 $V\subset U$ 且 $\forall y\in V$, $V\in\mathscr{U}_y$.

证 由定义 2.3.1 得(1); 由开集的交是开集得(2); 由定义 2.3.1 得(3); 取 V 为满足 $x\in V\subset U$ 的开集.

由邻域系出发可建立拓扑空间的理论, 显得自然, 但不流行. 利用邻域与开集的关系(定理 2.3.1)导出开集, 从 $\mathscr{U}_x(\forall x\in X)$具有定理2.3.2 的性质的(1)-(4)出发, 定义 $\mathscr{T}=\{U\subset X \mid \forall x\in U, U\in\mathscr{U}_x\}$, 则$(X, \mathscr{T})$是拓扑空间, 且这空间中每一点 x 的邻域系恰是 $\mathscr{U}_x$. 详见定理 2.3.3.

定义 2.3.2(点连续) 映射 $f: X\to Y$ 称为在点 $x\in X$ 连续, 如果 U 是 f(x)在 Y 中的邻域, 则 $f^{-1}(U)$ 是 x 在 X 中的邻域.

定理 2.1.4 保证了在度量空间中点的连续性与由度量导出的拓扑空间中的点的连续性的一致. 另一方面, 关于点的连续性, 易验证(定理 2.3.4), 恒等映射在每一点连续, 两点连续的函数之复合仍是点连续的. 定义 2.2.4 与定义 2.3.2 所定义的“整体”连续与每一“点”连续是一致的.

定理 2.3.5 设 $f: X\to Y$. 则 f 连续$\Leftrightarrow$f 在每一 $x\in X$ 连续.

证 “$\Rightarrow$”若 U 是 f(x)的邻域, $\exists$开集 V 使 $f(x)\in V\subset U$, $x\in f^{-1}(V)\subset f^{-1}(U)$.

“$\Leftarrow$”若 U 是 Y 的开集, $\forall x\in f^{-1}(U)$, U 是 f(x)的邻域, $f^{-1}(U)$是 x 的邻域, 所以 $f^{-1}(U)$在 X 中开.

§2.4 导集、闭集、闭包

定义 2.4.1 设 $A\subset X$. x 称为 A 的聚点(凝聚点, 极限点), 如果 x 的每一邻域 U 中有 A 中异于 x 的点, 即 $U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$. A 的全体聚点之集称为 A 的导集, 记为 d(A). x 称为 A 的孤立点, 若 x 不是 A 的聚点, 即存在 x 的邻域 U 使 $U\cap(A-\{x\})=\varnothing$, 即 $U\cap A\subset\{x\}$.

例 2.4.1 X 是离散空间. 若 $A\subset X$, 则 $d(A)=\varnothing$.

$\forall x\in X$, 取 $U=\{x\}$, 则 $U\cap A\subset\{x\}$, 所以 $x\notin d(A)$.

例 2.4.2 X 是平庸空间, $A\subset X$. 若 $A=\varnothing$, 则 $d(A)=\varnothing$; 若$|A|=1$, 则 $d(A)=X-A$; 若$|A|>1$, 则 $d(A)=X$.

对于 $x\in X$, 若 U 是 x 的邻域, 则 $U=X$, 于是 $U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing\Leftrightarrow A-\{x\}\neq\varnothing\Leftrightarrow A\not\subset\{x\}$, 由此, 易计算 d(A).

定理 2.4.1 $A, B\subset X$, 则

(1) $d(\varnothing)=\varnothing$;

(2) $A\subset B\Rightarrow d(A)\subset d(B)$;

(3) $d(A\cup B)=d(A)\cup d(B)$;

(4) $d(d(A)) \subset A\cup d(A)$.

证 由定义 2.4.1 得(1)和(2).

关于(3). 由(2)得 $d(A)\cup d(B)\subset d(A\cup B)$. 设 $x\notin d(A)\cup d(B)$, 分别存在 x 的邻域 U, V 使得 $U\cap A\subset\{x\}$, $V\cap B\subset\{x\}$, 令 $D=U\cap V$, 则 $D\cap(A\cup B) \subset\{x\}$.

关于(4). 设 $x\notin A\cup d(A)$, 存在 x 的邻域 U, 使得 $U\cap A\subset\{x\}$, 取 x 的开邻域 $V\subset U$, 则 $V\cap A=\varnothing$, $\forall y\in V$, $V\cap(A-\{y\})=\varnothing$, $y\notin d(A)$, $V\cap d(A)=\varnothing$, $x\notin d(d(A))$.

定义 2.4.2 $A\subset X$ 称为 X 的闭集, 如果 $d(A)\subset A$.

定理 2.4.2 A 闭$\Leftrightarrow A'$开.

证 "$\Rightarrow$"$\forall x\in A'$, 由于 $d(A)\subset A$, 存在 x 的邻域 U 使 $U\cap A=\varnothing$, 于是 $U\subset A'$. "$\Leftarrow$"$\forall x\in A'$, $A'\cap A=\varnothing$, $x\notin d(A)$, 所以 $d(A)\subset A$.

例 2.4.3 R 的闭区间是闭集.

$[a, b]'=(-\infty, a)\cup(b, +\infty)$开集. (a, b)不是闭集, 因为 a 是聚点.

定理 2.4.3 记 $\mathcal{F}$ 是空间 X 的全部闭集族, 则

(1) $X, \varnothing\in\mathcal{F}$;

(2) $A, B\in\mathcal{F}\Rightarrow A\cup B\in\mathcal{F}$;

(3) $\varnothing\neq\mathcal{H}\subset\mathcal{F}\Rightarrow\cap_{H\in\mathcal{H}}H\in\mathcal{F}$.

证 利用 De Morgan 定律及拓扑的定义. $\mathcal{F}=\{U' \mid U\in\mathcal{T}\}$. 直接验证可得(1)、(2).

(3) 令 $\mathcal{U}=\{H' \mid H\in\mathcal{H}\}$. 则$\cup_{H\in\mathcal{H}}H'\in\mathcal{T}$, 从而$\cap_{H\in\mathcal{H}}H=\cap_{H\in\mathcal{H}}H''=(\cup_{H\in\mathcal{H}}H')'\in\mathcal{F}$.

Cantor 集(例 2.4.4)是集合论、点集拓扑或实变函数论中是具有特别意义的例子, 它说明 **R** 中的闭集可以是很复杂的, 在此不介绍.

定义 2.4.3 $A\cup d(A)$称为 A 的闭包, 记为$\overline{A}$, A^-或 c(A).

定理 2.4.5 对 $A, B\subset X$, 有

(1) $\varnothing^-=\varnothing$;

(2) $A\subset A^-$;

(3) $(A\cup B)^-=A^-\cup B^-$;

(4) $(A^-)^-=A^-$.

证 (3) $(A\cup B)^-=A\cup B\cup d(A\cup B)=A\cup d(A)\cup B\cup d(B)=A^-\cup B^-$.

(4) $(A^-)^-=(A\cup d(A))^-=A^-\cup d(A)^-=A\cup d(A)\cup d(d(A))=A^-$.

上述 4 条确定了闭包运算, 称为 Kuratowski 闭包公理, 由此可建立拓扑空间的概念. 事实上, 记此运算为 c(A), 定义 $\mathcal{T}=\{U\subset X \mid c(U')=U'\}$, 则$(X, \mathcal{T})$是拓扑空间, 且这空间中每一 $c(A)=A^-$, 详

见定理 2.4.8.

关于闭包的几个相关结果:

(1) $x\in A^{-}\Leftrightarrow$ 对 x 的任一邻域有 $U\cap A\neq\varnothing$. (**定义 2.4.3** 后)

(2) $d(A)=(A-\{x\})^{-}$.

(3) A 闭 $\Leftrightarrow d(A)\subset A\Leftrightarrow A=A^{-}$. (**定理 2.4.4**)

(4) A^{-}是闭集. (**定理 2.4.6**)

(5) A^{-}是包含 A 的所有闭集之交, 是包含 A 的最小闭集. (**定理 2.4.7**: 设 F 是包含 A 的所有闭集之交, 则 $A\subset F\subset A^{-}$, $A^{-}\subset F$, 所以 $F=A^{-}$.)

定义 2.4.5 (X, ρ)是度量空间. 对非空的 $A\subset X$, $x\in X$, 定义$\rho(x, A)=\inf\{\rho(x, y) \mid y\in A\}$.

定理 2.4.9 对度量空间(X, ρ)的非空子集 A,

(1) $x\in A^{-}\Leftrightarrow\rho(x, A)=0$;

(2) $x\in d(A)\Leftrightarrow\rho(x, A-\{x\})=0$.

证 $\rho(x, A)=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0, \exists y\in A, \rho(x, y)<\varepsilon\Leftrightarrow B(x, \varepsilon)\cap A\neq\varnothing\Leftrightarrow\forall U\in\mathcal{U}_x, U\cap A\neq\varnothing\Leftrightarrow x\in A^{-}$.

定理 2.4.10 设 $f: X\to Y$, 则下述等价

(1) f 连续;

(2) 若 B 闭于 Y, 则 $f^{-1}(B)$闭于 X;

(3) $\forall A\subset X, f(A^{-})\subset f(A)^{-}$.

证 (1)⇒(2) B 是 Y 的闭集, B'是 Y 的开集, $f^{-1}(B')=f^{-1}(B)'$是 X 的开集, $f^{-1}(B)$是 X 的闭集.

(2)⇒(3) $f(A)\subset f(A)^{-}, A\subset f^{-1}(f(A)^{-}), A^{-}\subset f^{-1}(f(A)^{-}), f(A^{-})\subset f(A)^{-}$.

(3)⇒(1)设 U 是 Y 的开集, U'是 Y 的闭集且 $f(f^{-1}(U')^{-})\subset f(f^{-1}(U'))^{-}\subset U'^{-}=U'$, $f^{-1}(U')^{-}\subset f^{-1}(U')$, $f^{-1}(U')=f^{-1}(U)'$是闭, $f^{-1}(U)$是开.

§2.5 内部、边界

定义 2.5.1 若 A 是 x 的邻域, 则称 x 是 A 的内点. A 的所有内点的集合称为 A 的内部, 记为 A°.

定理 2.5.1 对 $A\subset X$, $A^{\circ}=A'^{-\prime}$, $A^{-}=A'^{\circ\prime}$.

证 $x\in A^{\circ}$, 由于 $A\cap A'=\varnothing$, 于是 $x\notin A'^{-}$, 从而 $x\in A'^{-\prime}$. 反之, $x\in A'^{-\prime}$, $x\notin A'^{-}$, $\exists x$的邻域$V\cap A'=\varnothing$, $V\subset A$, $x\in A^{\circ}$. 因此, $A^{\circ}=A'^{-\prime}$. 从而 $A'^{\circ}=A''^{-\prime}=A^{-\prime}$, $A^{\circ -}=A'^{\circ\prime}$.

定理 2.5.3 对 $A, B\subset X$, 有

(1) $X^{\circ}=X$;

(2) $A^{\circ}\subset A$;

(3) $(A\cap B)^{\circ}=A^{\circ}\cap B^{\circ}$;

(4) $A^{\circ\circ}=A^{\circ}$.

证 (1)、(2)是显然的. $(A\cap B)^{\circ}=(A'\cup B')^{-\prime}=A'^{-\prime}\cap B'^{-\prime}=A^{\circ}\cap B^{\circ}$. 而 $A^{\circ\circ}=A'^{-\prime\prime-\prime}=A'^{-\prime}=A^{\circ}$.

关于内部的几个相关结果:

(1) A 是 x 的邻域$\Leftrightarrow x\in A^{\circ}$.

(2) A°是开集. (**定理 2.5.4**)

(3) A 是开集 $\Leftrightarrow A=A^{\circ}$.(**定理 2.5.2**)

(4) A°是 A 所包含的所有开集之并, 是含于 A 内的最大开集. (**定理 2.5.5**)

证 (2) $A^{\circ}=A'^{-\prime}$是开集. (3) A 开 $\Leftrightarrow A'$闭 $\Leftrightarrow A'=A'^{-}\Leftrightarrow A=A'^{-\prime}=A^{\circ}$. (4)设 O 是含于 A 内的所有开集之并, $A^{\circ}\subset O\subset A$, $O\subset A^{\circ}$, 所以 $O=A^{\circ}$.

定义 2.5.2 x 称为 A 的边界点, 若 x 的每一邻域, 既含有 A 中的点又有 A'中的点. A 的边界点之集称为边界, 记为∂A.

定理 2.5.6 对 $A\subset X$, 有(1) $\partial A=A^{-}\cap A'^{-}=\partial(A')$; (2)$A^{-}=A^{\circ}\cup\partial A$; (3)$A^{\circ}=A^{-}-\partial A$.

证 (2) $A^{\circ}\cup\partial A=A^{\circ}\cup(A^{-}\cap A'^{-})=(A^{\circ}\cup A^{-})\cap(A^{\circ}\cup A'^{-})=A^{-}\cap(A^{\circ}\cup A^{\circ -})=A^{-}$.

(3) $A^{-}-\partial A=A^{-}-(A^{-}\cap A'^{-})=A^{-}-A'^{-}=A^{-}\cap A'^{-\prime}=A^{\circ}$.

§2.6 基与子基

度量空间→球形邻域→开集→拓扑. 在度量空间中球形邻域的作用就是拓扑空间中基的作用.

定义 2.6.1 设$\mathcal{T}$是空间 X 的拓扑, $\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$, 如果$\mathcal{T}$中每一元是$\mathcal{B}$中某子集族之并, 称$\mathcal{B}$是 X 的基.

所有单点集的族是离散空间的基.

定理 2.6.2 设$\mathcal{B}\subset\mathcal{T}$. $\mathcal{B}$为 X 的基$\Leftrightarrow\forall x\in X$ 及 x 的邻域 U_x, $\exists V_x\in\mathcal{B}$ 使 $x\in V_x\subset U_x$.

证 "$\Rightarrow$" $\exists$开集 W_x 使得 $x\in W_x\subset U_x$, $\exists\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}$ 使得 $W_x=\cup\mathcal{B}_1$, $\exists V_x\in\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}$ 使 $x\in V_x\subset U_x$.

"$\Leftarrow$" 设 $U\in\mathcal{T}$, $\forall x\in U$, $\exists V_x\in\mathcal{B}$使 $x\in V_x\subset U$, 从而$\{V_x\mid x\in U\}\subset\mathcal{B}$ 且 $U=\cup_{x\in U}V_x$.

在度量空间中, 所有球形邻域的族是度量拓扑的基(定理 2.6.1). 所有开区间的族是 **R** 的基.

定理 2.6.3 拓扑空间 X 的基 $\mathcal{B}$满足:

(i) $\cup\mathcal{B}=X$; (ii) $\forall B_1, B_2\in\mathcal{B}$, $x\in B_1\cap B_2$, $\exists B_3\in\mathcal{B}$ 使 $x\in B_3\subset B_1\cap B_2$.

反之, 若集合 X 的子集族 $\mathcal{B}$满足(1)、(2), 定义$\mathcal{T}=\{\cup\mathcal{B}_1\mid\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}\}$, 则$\mathcal{T}$是 X 的以$\mathcal{B}$作为基的

唯一拓扑.

证 验证$\mathcal{T}$是X的拓扑. (1) $\varnothing=\cup\varnothing$. (2) 先设$B_1, B_2\in\mathcal{B}$, $\forall x\in B_1\cap B_2$, $\exists W_x\in\mathcal{B}$使$x\in W_x\subset B_1\cap B_2$, 于是$B_1\cap B_2=\cup\{W_x\,|\,x\in B_1\cap B_2\}\in\mathcal{T}$. 如果$A_1, A_2\in\mathcal{T}$, 设$A_1=\cup\mathcal{B}_1$, $A_2=\cup\mathcal{B}_2$, 则$A_1\cap A_2=\cup\{B_1\cap B_2\,|\,B_1\in\mathcal{B}_1, B_2\in\mathcal{B}_2\}\in\mathcal{T}$. (3) 设$\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}$, $\forall A\in\mathcal{T}_1$, $\exists\mathcal{B}_A\subset\mathcal{B}$, 使得$A=\cup\mathcal{B}_A$, 那么$\cup\mathcal{T}_1=\cup(\cup\{\mathcal{B}_A\,|\,A\in\mathcal{T}_1\})$.

较强于(ii)且易于验证的条件是(ii′) $\forall B_1, B_2\in\mathcal{B}$, $B_1\cap B_2\in\mathcal{B}$.

例 2.6.1 实数下限拓扑空间.

令$\mathcal{B}=\{[a, b)\mid a, b\in\mathbf{R}, a<b\}$, 则$\mathcal{B}$为$\mathbf{R}$上一拓扑的基. 这空间称为实数下限拓扑空间, 记为$\mathbf{R}_l$. 开区间是$\mathbf{R}_l$中的开集, 因为$(a, b)=\cup_{i\in\mathbf{Z}_+}[a+1/i, b)$.

定义 2.6.2 设$(X, \mathcal{T})$是拓扑空间, $\mathcal{S}\subset\mathcal{T}$. 若$\mathcal{S}$的元之所有有限交构成的族是$\mathcal{T}$的基, 则称$\mathcal{S}$是$\mathcal{T}$的子基.

$\mathcal{S}$的元之有限交构成的族$\{S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_n\mid S_i\in\mathcal{S}, i\le n\in\mathbf{Z}_+\}$.

显然, 空间X的基是子基.

例 2.6.2 $\mathcal{S}=\{(a, +\infty)\mid a\in\mathbf{R}\}\cup\{(-\infty, b)\mid b\in\mathbf{R}\}$是$\mathbf{R}$的子基.

对照定理 2.6.3, 集合X的子集族$\mathcal{S}$要作为子基生成X上的拓扑的充要条件是$\cup\mathcal{S}=X$. (定理 2.6.4)

映射的连续性可用基、子基来刻画或验证.

定理 2.6.5 设X, Y是两拓扑空间, $f: X\to Y$, 下述等价:

(1) f连续;

(2) Y基$\mathcal{B}$, 使得$\mathcal{B}$中每一元的原像在X中开;

(3) Y有子基$\mathcal{S}$, 使得$\mathcal{S}$中每一元的原像在X中开.

证 (3)$\Rightarrow$(2) 设$\mathcal{B}$是$\mathcal{S}$的元之所有有限交构成的族, 则$\mathcal{B}$满足(2). (2)$\Rightarrow$(1) 设U在Y中开, 则$U=\cup\mathcal{B}_1$, 于是$f^{-1}(U)=\cup\{f^{-1}(B)\,|\,B\in\mathcal{B}_1\}$在X中开.

类似地, 可定义点的邻域基与邻域子基的概念, 同时用它们来验证映射的连续性等. 在第五章中定义第一可数性时再介绍这些概念.

§2.7 拓扑空间中的序列

可以与$\mathbf{R}$中一样地定义序列、常值序列、子序列, 见定义 2.7.1, 2.7.3.

定义 2.7.2 X中序列$x_i\to x$. 极限, 收敛序列.

平庸空间中任意序列收敛于空间中的任一点. 数学分析中的一些收敛性质还是保留的, 如常值序列收敛, 收敛序列的子序列也收敛. (定理 2.7.1)

定理 2.7.2 A-{x}中序列 $x_i\to x\Rightarrow x\in d(A)$.

证 $\forall x$ 的邻域 U, $U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$, 所以 $x\in d(A)$.

定理 2.7.3 f 在 x_0 连续且 $x_i\to x_0\Rightarrow f(x_i)\to f(x_0)$.

证 设 U 是 $f(x_0)$的邻域, 则 $f^{-1}(U)$是 x_0 的邻域, $\exists n\in\mathbf{Z}_+$, 当 i>n 时有 $x_i\in f^{-1}(U)$, 从而 $f(x_i)\in U$.

上述两定理的逆命题均不成立.

例 2.7.1 设 X 是不可数集赋予可数补拓扑, 则

(1)在 X 中 $x_i\to x\Leftrightarrow\exists n\in\mathbf{Z}_+$, 当 i>n 时有 $x_i=x$;

(2)若 A 是 X 的不可数子集, 则 d(A)=X.

证(1)的必要性. 令 $D=\{x_i\mid x_i\neq x, i\in\mathbf{Z}_+\}$, 则 D'是 x 的邻域, $\exists n\in\mathbf{Z}_+$, 当 i>n 时有 $x_i\in D'$, 即 $x_i=x$.

证(2) $\forall x$ 的邻域 U, $A-\{x\}\not\subset U'$(可数集), 所以 $U\cap(A-\{x\})\neq\varnothing$, $x\in d(A)$.

定理 2.7.2 的逆命题不真. 如例 2.7.1, 取定 $x_0\in X$, 让 $A=X-\{x_0\}$, 则 $x_0\in d(A)$, 但 A 中没有序列收敛于 x_0.

定理 2.7.3 的逆命题不真. 取 X 是实数集赋予可数补拓扑, 让 i: $X\to\mathbf{R}$ 是恒等映射, 若在 X 中 $x_i\to x$, 则在 **R** 中 $f(x_i)\to f(x)$, 但 i 在 x 不连续, 因为 x 在 **R** 的开邻域(x-1, x+1)的原像 $i^{-1}((x-1, x+1))=(x-1, x+1)$在 X 中不是开的.

定理 2.7.4 设$\{x_i\}$是度量空间(X, ρ)中的序列, 则 $x_i\to x\Leftrightarrow\rho(x_i, x)\to 0$.

证 $x_i\to x\Leftrightarrow\forall x$ 的邻域 U, $\exists n\in\mathbf{Z}_+$, 当 i>n 时有 $x_i\in U\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0, \exists n\in\mathbf{Z}_+$, 当 i>n 时有 $x_i\in B(x,\varepsilon)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0, \exists n\in\mathbf{Z}_+$, 当 i>n 时有$\rho(x_i, x)<\varepsilon\Leftrightarrow\rho(x_i, x)\to 0$.

第三章 子空间、积空间、商空间

介绍三种从原有的拓扑空间或拓扑空间族构造新空间的经典方法, 引入遗传性、可积性、可商性等概念, 这些是研究拓扑性质的基本构架.

§3.1 子空间

对于空间 X 的子集族$\mathcal{A}$ 及 $Y\subset X$, $\mathcal{A}$ 在 Y 上的限制 $\mathcal{A}|_Y=\{A\cap Y\mid A\in\mathcal{A}\}$.(定义 3.1.2)

引理 3.1.2 设 Y 是空间$(X,\mathcal{T})$的子集, 则 $\mathcal{T}|_Y$ 是 Y 上的拓扑.

证 按拓扑的三个条件逐一验证. 如, 设 $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}|_Y$, $\forall A\in\mathcal{T}_1$, $\exists B_A\in\mathcal{T}$, 使得 $A=B_A\cap Y$, 于是$\cup\mathcal{T}_1=\cup\{B_A\cap Y\mid A\in\mathcal{T}_1\}=(\cup\{B_A\mid A\in\mathcal{T}_1\})\cap Y\in\mathcal{T}|_Y$.

定义 3.1.3 对 $Y\subset X$, $(Y, \mathcal{T}|_Y)$称为$(X,\mathcal{T})$的子空间, $\mathcal{T}|_Y$ 称为相对拓扑.

"子空间"= "子集" +"相对拓扑".

易验证, 若 Z 是 Y 的子空间, 且 Y 是 X 的子空间, 则 Z 是 X 的子空间. (定理 3.1.4)

定理 3.1.5(3.1.7) 设 Y 是 X 的子空间, $y\in Y$, 则

(1)若 $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}^*$分别为 X, Y 的拓扑, 则 $\mathcal{T}^*=\mathcal{T}|_Y$;

(2)若 $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^*$分别为 X, Y 的全体闭集族, 则 $\mathcal{F}^*=\mathcal{F}|_Y$;

(3)若 $\mathcal{U}_y$, $\mathcal{U}_y^*$分别为 y 在 X, Y 中的邻域系, 则 $\mathcal{U}_y^*=\mathcal{U}_y|_Y$;

(4)若 $\mathcal{B}$ 是 X 的基, 则 $\mathcal{B}|_Y$ 是 Y 的基.

证 (2) $F^*\in\mathcal{F}^*\Leftrightarrow Y-F^*\in\mathcal{T}|_Y\Leftrightarrow Y-F^*=U\cap Y, U\in\mathcal{T}\Leftrightarrow F^*=(X-U)\cap Y, U\in\mathcal{T}\Leftrightarrow F^*\in\mathcal{T}|_Y$.

(4) $\forall U$ 开于 Y, $\exists X$ 的开集 V, 使得 $U=V\cap Y$, $\exists\mathcal{B}_1\subset\mathcal{B}$, 满足 $V=\cup\mathcal{B}_1$, 则 $U=\cup(\mathcal{B}_1|_Y)$.

在 **R** 的子空间$(0,+\infty)$中$(0, 1]$是闭集.

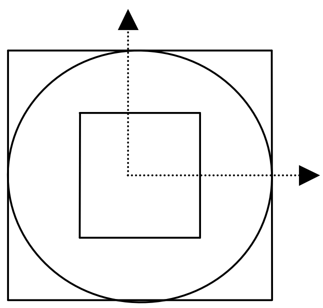
定理 3.1.6 设 Y 是 X 的子空间, $A\subset Y$, 则 (1)$d_Y(A)=d_X(A)\cap Y$; (2)$c_Y(A)=c_X(A)\cap Y$.

证 (1) $y\in d_Y(A)$, $\forall y$ 在 X 中的邻域 U, $U\cap(A-\{y\})\supset(U\cap Y)\cap(A-\{y\})\neq\varnothing$, 所以 $y\in d_X(A)\cap Y$. 反之, 设 $y\in d_X(A)\cap Y$, $\forall y$ 在 Y 中的邻域 V, $\exists y$ 在 X 中的邻域 U 使 $V=U\cap Y$, 于是 $V\cap(A-\{y\})=(U\cap(A-\{y\}))\cap Y= U\cap(A-\{y\})\neq\varnothing$, 所以 $y\in d_Y(A)$.

(2) $c_Y(A)=A\cup d_Y(A)= A\cup(d_X(A)\cap Y)=(A\cup d_X(A))\cap(A\cup Y)=c_X(A)\cap Y$.

§3.2 有限积空间

就平面的球形邻域 $B_d(x, \varepsilon)$而言, 我们知道球形邻域内含有方形邻域, 方形邻域内含有球形邻域. 从基的角度而言, 形如 $B_1(x_1, \varepsilon_1)\times B_2(x_2, \varepsilon_2)$的集合就是平面拓扑的基了. 对于两个拓扑空间 X, Y, 在笛卡儿积集 $X\times Y$ 中可考虑形如 $U\times V$ 的集合之全体, 其中 U, V 分别是 X, Y 的开集. 对于有限个空间 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 可考虑形如 $U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$ 的集合.



定理 3.2.2 设$(X_i,\mathcal{T}_i)(i\le n)$是 n 个拓扑空间, 则 $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ 有唯一的拓扑, 以 X 的子集族 $\mathcal{B}=\{U_1\times U_2\times\ldots\times U_n \mid U_i\in\mathcal{T}_i, i\le n\}$为它的一个基.

证 验证$\mathcal{B}$满足定理2.6.3的条件(i), (ii′). (1) $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n\in\mathcal{B}$, $\cup\mathcal{B}=X$; (2) 若$U_1\times U_2\times\ldots\times U_n$, $V_1\times V_2\times\ldots\times V_n\in\mathcal{B}$, 则$(U_1\times U_2\times\ldots\times U_n)\cap(V_1\times V_2\times\ldots\times V_n)=(U_1\cap V_1)\times\ldots\times(U_n\cap V_n)\in\mathcal{B}$.

定义 3.2.2 以定理 3.2.2 中 $\mathcal{B}$ 为基生成 $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ 上的唯一拓扑, 称为拓扑 $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\ldots,\mathcal{T}_n$ 的积拓扑. $(X,\mathcal{T})$称为$(X_1, \mathcal{T}_1), \ldots, (X_n, \mathcal{T}_n)$的(有限)积空间.

定理 3.2.4 设 $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ 是积空间, $\mathcal{B}_i$ 是 X_i 的基, 则 $\mathcal{B}^*=\{B_1\times B_2\times\ldots\times B_n \mid B_i\in\mathcal{B}_i, i\le n\}$是积拓扑 $\mathcal{T}$ 的基.

证 利用定理 2.6.2. 设 $x\in U\in\mathcal{T}$, $\exists U_i\in\mathcal{T}_i$ 使 $x\in U_1\times U_2\times\ldots\times U_n\subset U$, $\exists B_i\in\mathcal{B}_i$ 使 $x_i\in B_i\subset U_i$, 那么 $x\in B_1\times B_2\times\ldots\times B_n\subset U_1\times U_2\times\ldots\times U_n\subset U$.

例 3.2.1 形如$(a_1, b_1)\times(a_2, b_2)\times\ldots\times(a_n, b_n)$的集合构成$\mathbb{R}^n$的基.

设(X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2)是两个度量空间. 令$\rho(x, y)=\sqrt{\rho_1(x_1,y_2)^2+\rho_2(x_2,y_2)^2}$, 则ρ是 $X_1\times X_2$ 上的度量, 导出 X 上的度量拓扑 $\mathcal{T}$. 对于 n 个度量空间之积可类似地定义. (定义 3.2.1)

定理 3.2.1 度量空间的有限积: 积拓扑与度量拓扑一致.

验证 n=2 的情形. 易验证 $B_1(x_1, \varepsilon/\sqrt{2})\times B_2(x_2,\varepsilon/\sqrt{2})\subset B(x, \varepsilon)\subset B_1(x_1, \varepsilon)\times B_2(x_2, \varepsilon)$, 于是每一 $B(x, \varepsilon)$是积拓扑的开集, 且每一 $B_1(x_1, \varepsilon)\times B_2(x_2, \varepsilon)$是度量拓扑的开集, 所以导出相同的拓扑.

定理 3.2.5 有限积空间 $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ 以 $\mathcal{S}=\{p_i^{-1}(U_i) \mid U_i\in\mathcal{T}_i, i\le n\}$为子基, 其中 $\mathcal{T}_i$是 X_i的拓扑, $p_i: X\to X_i$ 是投射.

仅证 n=2 的情形. $p_1^{-1}(U_1)= U_1\times X_2$, $p_2^{-1}(U_2)= X_1\times U_2$, 所以 $p_1^{-1}(U_1)\cap p_2^{-1}(U_2)= U_1\times U_2\in\mathcal{B}$.

定义 3.2.3 $f: X\to Y$ 称为开(闭)映射, 若 U 开(闭)于 X, 则 f(U)开(闭)于 Y.

定理 3.2.6 $p_i: X\to X_i$是满、连续、开映射，未必是闭映射.

由于 $p_i^{-1}(U_i)= X_1\times X_2\times\ldots\times U_i\times\ldots\times X_n$, 所以 p_i 连续. 由于 $p_i(U_1\times U_2\times\ldots\times U_n)= U_i$, 所以 p_i 是开的. 但是 $p_1: \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 不是闭的.

定理 3.2.7 设映射 $f: Y\to X$, 其中 X 是积空间 $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$. 则 f 连续$\Leftrightarrow\forall i\le n$, $p_i\circ f: Y\to X_i$ 连续.

证 充分性. 对 X 的子基 $\mathcal{S}=\{p_i^{-1}(U_i) \mid i\le n, U_i\in\mathcal{T}_i\}$, $f^{-1}(p_i^{-1}(U_i))=(p_i\circ f)^{-1}(U_i)$开于 Y.

多元函数连续当且仅当它的每一分量连续.

定理 3.2.8 积拓扑是使每一投射都连续的最小拓扑. 即设 $\mathcal{T}$ 是积空间 $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ 的积拓扑, 若集合 X 的拓扑 $\mathcal{T}^*$满足: 每一投射 $p_i: (X, \mathcal{T}^*)\to X_i$ 连续, 则 $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}^*$.

证 由于$\{p_i^{-1}(U_i) \mid U_i\in\mathcal{T}_i, i\le n\}\subset\mathcal{T}^*$, 所以 $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}^*$.

§3.3 商空间

回忆, 商集 X/R, 及自然投射 $p: X\to X/R$ 定义为 $p(x)=[x]_R$. 问题: 设 X 是拓扑空间, 要在 X/R 上定义拓扑, 使 p 连续的最大的拓扑.

讨论更一般的情形, 设$(X, \mathcal{T})$是拓扑空间且 $f: X\to Y$ 是满射. 赋予集合 Y 什么拓扑, 使 f 连续

的最大的拓扑. 若 f 连续, 且 U 是 Y 的开集, 则 $f^{-1}(U)$是 X 的开集. 让 $\mathcal{T}_1=\{U\subset Y\,|\,f^{-1}(U)\in\mathcal{T}\}$, 易验证 $\mathcal{T}_1$是 Y 上的拓扑.

定义 3.3.1(3.3.2) 称 $\mathcal{T}_1$是 Y 的相对于满射 f 而言的商拓扑, $f: (X, \mathcal{T})\to(Y, \mathcal{T}_1)$称为商映射.

这时, U 在 Y 中开$\Leftrightarrow f^{-1}(U)$在 X 中开; F 在 Y 中闭$\Leftrightarrow f^{-1}(F)$在 X 中闭.

定理 3.3.1 商拓扑是使 f 连续的最大拓扑.

证 设 $f: (X, \mathcal{T})\to(Y, \mathcal{T}_1)$是商映射. 显然, f 是连续的. 如果 $\mathcal{T}_2$是 Y 的拓扑使 $f: (X, \mathcal{T})\to(Y, \mathcal{T}_2)$连续, 则$\forall U\in\mathcal{T}_2$, $f^{-1}(U)\in\mathcal{T}$, 于是 $U\in\mathcal{T}_1$, 即 $\mathcal{T}_2\subset\mathcal{T}_1$, 所以 $\mathcal{T}_1$是使 f 连续的最大拓扑.

定理 3.3.2 设 $f: X\to Y$ 是商映射. 对于空间 Z, 映射 $g: Y\to Z$ 连续$\Leftrightarrow$映射 $g\circ f: X\to Z$ 连续.

证 设 $g\circ f: X\to Z$ 连续, $\forall W$ 开于 Z, $(g\circ f)^{-1}(W)=f^{-1}(g^{-1}(W))$开于 X, 由于 f 是商映射, 所以 $g^{-1}(W)$开于 Y, 故 g 连续.

定理 3.3.3 连续, 满开(闭)映射$\Rightarrow$商映射.

证 设 $f: (X, \mathcal{T}_X)\to(Y, \mathcal{T}_Y)$是连续的满开(闭)映射, $\mathcal{T}_1$是 Y 的相对于 f 而言的商拓扑, 要证 $\mathcal{T}_Y=\mathcal{T}_1$. 由定理 3.3.1, $\mathcal{T}_Y\subset\mathcal{T}_1$. 反之, $\forall V\in\mathcal{T}_1$, $f^{-1}(V)\in\mathcal{T}_X$. 对于开映射的情形, $V=f(f^{-1}(V))\in\mathcal{T}_Y$; 对于闭映射的情形, $V=Y\text{-}f(X\text{-}f^{-1}(V))\in\mathcal{T}_Y$, 所以总有 $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}_Y$.

定义 3.3.3 设 R 是空间$(X, \mathcal{T})$的等价关系, 由自然投射 $p: X\to X/R$ 确定了 X/R 的商拓扑$\mathcal{T}_R$, 称$(X/R, \mathcal{T}_R)$为商空间, 这时 $p: X\to X/R$ 是商映射.

例 3.3.1 在 **R** 中定义等价关系~: $\forall x, y\in\mathbf{R}$, $x\sim y\Leftrightarrow$或者 $x, y\in\mathbf{Q}$, 或者 $x, y\notin\mathbf{Q}$. 商空间 **R**/~是由两点组成的平庸空间. 由于 **Q** 在 **R** 中既是开集, 也不是闭集, 所以单点集[**Q**]在 **R**/~中既不是开集, 也不是闭集. 习惯上, 把 **R**/~说成是在 **R** 中将所有有理点和所有无理点分别粘合为一点所得到的商空间.

例 3.3.2 在[0, 1]上定义等价关系~: $\forall x, y\in[0, 1]$, $x\sim y\Leftrightarrow$或者 x=y, 或者{x, y}={0, 1}. [0, 1]/~是在[0, 1]中粘合 0, 1 两点所得到的商空间, 这商空间同胚于单位圆周 S^1.

第四章 连通性

本章起的四章介绍 4 类重要的拓扑不变性质. 本章讨论连通性、道路连通性、局部连通性及其在实分析中的一些简单的应用.

§4.1 连通空间

在拓扑中怎样定义连通, 分隔区间(0, 1), (1, 2)的关系与(0, 1), [1, 2)的关系不同, 虽然他们都不相交, 但相连的程度不一样.

定义 4.1.1 设 $A, B\subset X$, 若 $A\cap B^-=A^-\cap B=\varnothing$, 则称 A, B 是隔离的.

区间(0, 1)与(1, 2)隔离, 但区间(0, 1)与[1, 2)不隔离. 几个基本事实: (1)两不交的开集是隔离的; (2)两不交的闭集是隔离的; (3)隔离子集的子集是隔离的.

定义 4.1.2 X 称为不连通的, 若 X 中有非空的隔离子集 A, B 使 $X=A\cup B$, 即 X 可表为两非空隔离集之并. 否则 X 称为连通的.

包含多于一个点的离散空间不连通, 平庸空间是连通的.

定理 4.1.1 对空间 X, 下述等价:

(1)X 是不连通的;

(2)X 可表为两非空不交闭集之并;

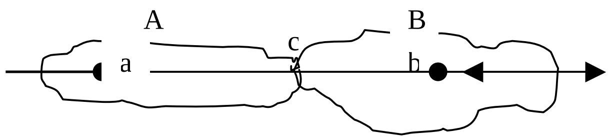
(3)X 可表为两非空不交开集之并;

(4)X 存在既开又闭的非空真子集.

证 (1)$\Rightarrow$(2)设隔离集 A, B 之并是 X, $B^-=B^-\cap(A\cup B)=(B^-\cap A)\cup(B^-\cap B)=B$. 同理, A 也是闭的. (2)$\Rightarrow$(3)设 X 是两非空不交闭集 A, B 之并, 则 X 是两非空不交开集 A', B'之并. (3)$\Rightarrow$(4)设 X 是两非空不交开集A, B 之并, 则A, B 都是X的既开又闭的非空真子集. (4)$\Rightarrow$(1)若A是X的开闭集, 则 $A, X-A$ 隔离.

例 4.1.1 $\mathbf{Q}$ 不是 $\mathbf{R}$ 的连通子空间, 因为 $\mathbf{Q}=(\mathbf{Q}\cap(-\infty, \pi))\cup(\mathbf{Q}\cap(\pi, +\infty))$.

定理 4.1.2 $\mathbf{R}$ 是连通的.



证 若 $\mathbf{R}$ 不连通, 则 $\mathbf{R}$ 是两非空不交闭集 A, B 之并. 取定 $a\in A$, $b\in B$, 不妨设 $a<b$. 令 $A^*=[a, b]\cap A$, $B=[a, b]\cap B$, 则 A^*, B^*是 $\mathbf{R}$ 两非空不交闭集且$[a, b]=A^*\cup B^*$. 让 $c=\sup A^*$. 因 A^*是闭的, $c\in A^*$, $c<b$, $(c, b]\subset B^*$. 因 B^*是闭的, $c\in B^*$, 从而 $A^*\cap B^*\neq\varnothing$, 矛盾.

定义 4.1.3 若 X 的子空间 Y 是连通的, 则称 Y 为连通子集, 否则, 称为不连通子集.

定理 4.1.3 设 $A, B\subset Y\subset X$, 则 A, B 是 Y 的隔离集$\Leftrightarrow A, B$ 是 X 的隔离集.

证 $c_Y(A)\cap B=c_X(A)\cap Y\cap B=c_X(A)\cap B$; 同理, $c_Y(B)\cap A=c_X(B)\cap A$.

定理 4.1.4 设 Y 是 X 的连通子集. 如果 X 有隔离子集 A, B, 使 $Y\subset A\cup B$, 则 $Y\subset A$ 或 $Y\subset B$.

证 $A\cap Y, B\cap Y$ 是 Y 的隔离集, 所以 $A\cap Y=\varnothing$, 或 $B\cap Y=\varnothing$, 于是 $Y\subset B$ 或 $Y\subset A$.

定理 4.1.5 若 Y 是 X 的连通子集且 $Y\subset Z\subset Y^-$, 则 Z 是连通的.

证 若 Z 不连通, $\exists X$ 的非空隔离集 A, B 使 $Z=A\cup B\supset Y$, 于是 $Y\subset A$ 或 $Y\subset B$, 不妨设 $Y\subset A$, 那么 $Z\subset Y^-\subset A^-$, 于是 $B=Z\cap B=\varnothing$, 矛盾.

定理 4.1.6 设$\{Y_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是空间 X 的连通子集族. 如果$\cap_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\neq\varnothing$, 则$\cup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$连通.

证 若$\cup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$是 X 中隔离集 A, B 之并, 取定 $x\in\cap_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$, 不妨设 $x\in A$, 则$\forall\gamma\in\Gamma$, $Y_\gamma\subset A$, 所以$\cup_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma\subset A$, 于是 $B=\varnothing$.

定理 4.1.7 设 $Y\subset X$. 若$\forall x, y\in Y$, $\exists X$ 的连通子集 Y_{xy} 使 $x, y\in Y_{xy}\subset Y$, 则 Y 连通.

证 设 $Y\neq\varnothing$. 取定 $a\in Y$, 则 $Y=\cup_{y\in Y}Y_{ay}$ 且 $a\in\cap_{y\in Y}Y_{ay}$, 所以 Y 连通.

定理 4.1.8(连续映射保持) 设 $f: X\to Y$ 连续. 若 X 连通, 则 f(X)连通.

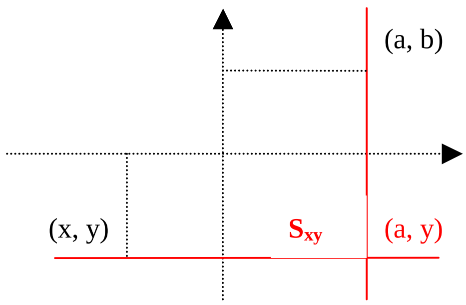
证 若 f(X)不连通, 则 f(X)含有非空的开闭真子集 A. 由于 $f: X\to f(X)$连续, 于是$f^{-1}(A)$是 X 的非空开闭真子集.

连续映射保持性⇒**可商性**⇒拓扑不变性.

有限可积性. 对于拓扑性质 P, 要证有限可积性, 因为 $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ 同胚于$(X_1\times\ldots\times X_{n-1})\times X_n$, 所以只须证: 若 X, Y 具性质 P, 则 $X\times Y$ 具有性质 P.

定理 4.1.9 (有限可积性) 设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 连通, 则 $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ 连通.

证 仅证若 X, Y 连通, 则 $X\times Y$ 连通. 取定$(a, b)\in X\times Y$. $\forall(x, y)\in X\times Y$, 令 $S_{xy}=(X\times\{y\})\cup(\{a\}\times Y)$, 由于 $X\times\{y\}$同胚于 X, $\{a\}\times Y$ 同胚于 Y, 所以 $X\times\{y\}$, $\{a\}\times Y$ 都连通且$(a, y)\in(X\times\{y\})\cap(\{a\}\times Y)$, 由定理 4.1.6, S_{xy} 连通且 $(x, y)\in S_{xy}$, 再由定理 4.1.7, $X\times Y=\cup\{S_{xy}\mid(x, y)\in X\times Y\}$连通.



§4.2 连通性的应用

利用 **R** 连通性的证明(定理 4.1.2)知, 区间都是连通的. 区间有 9 类：

无限区间 5 类：$(-\infty, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$.

有限区间 4 类：(a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$.

定理 4.2.1 设 $E\subset\mathbf{R}$, 则 E 连通⇔E 是区间.

证 若 E 不是区间, $\exists a<c<b$, 使 $a, b\in E$ 但 $c\notin E$. 令 $A=(-\infty, c)\cap E$, $B=(c, +\infty)\cap E$, 则 E 是不交的非空开集 A, B 之并.

定理 4.2.2 设 X 连通, $f: X\to\mathbf{R}$ 连续, 则 f(X)是 **R** 的一个区间.

注 $\forall x, y\in X$, 如果 t 介于 f(x)与 f(y)之间, 则$\exists z\in X$, 使 $f(z)=t$. 事实上, 不妨设 $f(x)\le t\le f(y)$, 则 $t\in[f(x), f(y)]\subset f(X)$, 所以$\exists z\in X$, 使 $f(z)=t$.

定理 4.2.3(介值定理) 设 $f: [a, b]\to\mathbf{R}$ 连续, 若 r 介于 f(a)与 f(b)之间, 则$\exists z\in[a, b]$使 $f(z)=r$.

定理 4.2.4(不动点定理) 设 $f: [0, 1]\to[0, 1]$连续，则$\exists z\in[0, 1]$使 $f(z)=z$.

证 不妨设 $0<f(0), f(1)<1$. 定义 $F: [0, 1]\to\mathbf{R}$ 使 $F(x)=x-f(x)$，则 F 连续且 $F(0)<0<F(1)$, $\exists z\in[0,1]$ 使得 $F(z)=0$，即 $f(z)=z$.

定义 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ 为 $f(t)=(\cos2\pi t, \sin2\pi t)$，则 f 连续且 $f(\mathbf{R})=S^1$，于是 S^1 是连通的. 对 $x=(x_1, x_2)\in S^1$, $-x=(-x_1, -x_2)\in S^1$ 称为 x 的对径点，映射 $r: S^1\to S^1$ 定义为 $r(x)=-x$ 称为对径映射，则 r 连续.

定理 4.2.5(Borsuk-Ulam 定理) 设 $f: S^1\to\mathbf{R}$ 连续，则$\exists x\in S^1$，使得 $f(x)=f(-x)$.

证 定义 $F: S^1\to\mathbf{R}$ 为 $F(x)=f(x)-f(-x)$，则 F 连续. 若$\exists a\in S^1$，使得 $f(a)\neq f(-a)$，则 $F(a)\cdot F(-a)<0$，由定理 4.2.2, $\exists z\in S^1$，使得 $F(z)=0$，即 $f(z)=f(-z)$.

定理 4.2.6 $\mathbf{R}^n-\{\mathbf{0}\}$连通，其中 $n>1$, $\mathbf{0}=(0, 0, \dots, 0)\in\mathbf{R}^n$.

证 只证 $n=2$ 的情形. 令 $A=[0, +\infty)\times\mathbf{R}-\{\mathbf{0}\}$, $B=(-\infty, 0]\times\mathbf{R}-\{\mathbf{0}\}$，则 $A\cup B=\mathbf{R}^2-\{\mathbf{0}\}$, $A\cap B\neq\varnothing$. 由于 $(0, +\infty)\times\mathbf{R}\subset A\subset c((0, +\infty)\times\mathbf{R})$，所以 A 连通. 同理, B 连通，从而 $A\cup B$ 连通.

定理 4.2.7 $\mathbf{R}^2$ 与 $\mathbf{R}$ 不同胚.

证 若$\exists$同胚 $f: \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$，令 $g=f|_{\mathbf{R}^2-\{\mathbf{0}\}}: \mathbf{R}^2-\{\mathbf{0}\}\to\mathbf{R}$，则 g 连续，从而 $g(\mathbf{R}^2-\{\mathbf{0}\})=\mathbf{R}-\{f(\mathbf{0})\}$连通，矛盾.

§4.3 连通分支

将不连通集分解为一些“最大”连通子集(“连通分支”)之并.

定义 4.3.1 $x, y\in X$ 称为连通的，若$\exists X$ 的连通子集同时含 x, y，记为 $x\sim y$. 点的连通关系~是等价关系：(1) $x\sim x$; (2) $x\sim y\Rightarrow y\sim x$; (3) $x\sim y, y\sim z\Rightarrow x\sim z$.

定义 4.3.2 空间 X 关于点的连通关系的每一等价类称为 X 的一个连通分支.

$x\sim y\Leftrightarrow x, y$ 属于 X 的同一连通分支. X 是 X 的全体连通分支的互不相交并.

定理 4.3.1 设 C 是空间 X 的连通分支，则

(1)若 Y 是 X 的连通子集且 $Y\cap C\neq\varnothing$，则 $Y\subset C$;

(2)C 是连通的闭集.

证 (1)取定 $x\in Y\cap C$, $\forall y\in Y$，则 $x\sim y$，所以 $y\in C$.

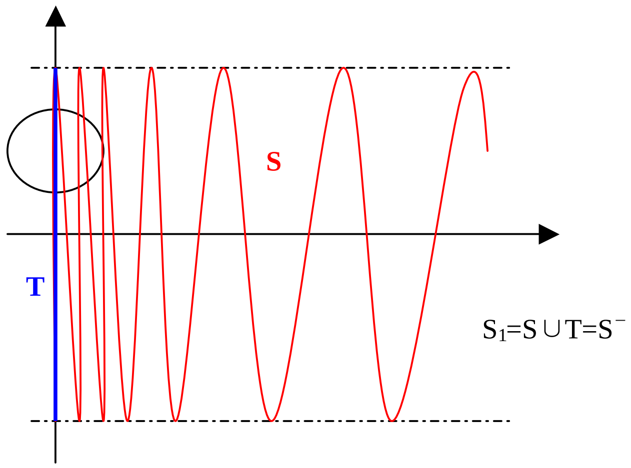
(2)取定 $c\in C$. $\forall x\in C, \exists X$ 的连通集 $Y_x\ni c, x$，由于 $Y_x\cap C\neq\varnothing$, $Y_x\subset C$，于是 $C=\cup\{Y_x \mid x\in C\}$且 $c\in\cap\{Y_x \mid x\in C\}$，所以 C 是连通的. 从而 C^-连通且 $C^-\cap C\neq\varnothing$，于是 $C^-\subset C$，故 C 闭.

以上说明：连通分支是最大的连通子集.

连通分支可以不是开集. $\mathbf{Q}$ 的连通分支都是单点集，不是 $\mathbf{Q}$的开子集. $\forall x, y\in Q$，由定理 4.2.1, 不存在 $\mathbf{Q}$ 的连通子集同时含有 x, y，所以 $\mathbf{Q}$ 的连通分支都是单点集.

§4.4 局部连通空间

例 4.4.1(拓扑学家的正弦曲线) 令 $S=\{(x, \sin(1/x)) \mid x\in(0, 1]\}$, $T=\{0\}\times[-1, 1]$, $S_1=S\cup T$, 则 $S^-=S_1$, 于是 S, S_1 连通. 在 S_1 中, S 中点与 T 中点的“较小的”邻域表现出不同的连通性.



定义 4.4.1 设 $x\in X$. 若 x 的每一邻域 U 中都含有 x 的某一连通的邻域 V, 称 X 在 x 是局部连通的. 空间 X 称为局部连通的, 若 X 在每一点是局部连通的.

S_1 是连通, 非局部连通的. 多于一点的离散空间是局部连通, 非连通的.

定理 4.4.1 对空间 X, 下述等价:

(1)X 是局部连通;

(2)X 的任一开集的任一连通分支是开集;

(3)X 有一个基, 每一元是连通的.

证 (1)$\Rightarrow$(2)设 C 是 X 的开集 U 的连通分支. $\forall x\in C$, $\exists x$ 的连通的邻域 $V\subset U$, 于是 $V\cap C\neq\varnothing$, $V\subset C$, 所以 C 是 x 的邻域, 故 C 开.

(2)$\Rightarrow$(3)令 $\mathscr{B}=\{C\subset X \mid C$ 是 X 的开集 U 的连通分支$\}$, 则 $\mathscr{B}$ 是 X 的基.

(3)$\Rightarrow$(1)设 U 是 x 的邻域, $\exists$开集 V 使 $x\in V\subset U$, $\exists$连通开集 C 使 $x\in C\subset V\subset U$, 所以 X 局部连通.

定理 4.4.2 设 $f: X\to Y$ 是连续开映射. 若 X 局部连通, 则 $f(X)$局部连通.

证 $\forall y\in f(X)$, 及 y 在 $f(X)$中的邻域 U, 取 $x\in f^{-1}(y)$, 则 $f^{-1}(U)$是 x 的邻域, $\exists X$ 的连通开集 V 使 $x\in V\subset f^{-1}(U)$, 于是 $y=f(x)\in f(V)\subset U$.

定理 4.4.3 局部连通性是有限可积性, 即设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 局部连通, 则 $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ 局部连通.

证 仅证若 X_1, X_2 局部连通, 则 $X_1\times X_2$ 局部连通. 设 $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ 分别是 X_1, X_2 的由连通开集组成的基, 则$\{B_1\times B_2 \mid B_1\in\mathscr{B}_1, B_2\in\mathscr{B}_2\}$是 $X_1\times X_2$ 的由连通开集组成的基(定理 3.2.4).

§4.5 道路连通空间

定义 4.5.1 设 X 是拓扑空间，连续映射 f: [0, 1]→X 称为 X 中的一条道路, f(0), f(1)分别称为 f 的起点和终点, f 称为从 f(0)到 f(1)的一条道路, f([0, 1])称为 X 中的一条曲线. 若 f(0)=f(1), f 称为闭路.

定义 4.5.2 对空间 X，如果∀x, y∈X, ∃X 中从 x 到 y 的道路，则称 X 是道路连通的.

类似可定义道路连通子集.

R 是道路连通的, ∀x, y∈**R**，定义 f: [0, 1]→**R** 为 f(t)=(1-t)x+ty.

定理 4.5.1 道路连通⇒连通.

证 设 X 道路连通. ∀x, y∈X, ∃X 中从 x 到 y 的道路 f: [0, 1]→X，这时 f([0, 1])是 X 中含 x, y 的连通子集, 所以 X 连通.

拓扑学家正弦曲线 S_1 是连通，非道路连通的空间.

定理 4.5.2 设 f: X→Y 连续. 若 X 道路连通，则 f(X)道路连通.

证 $\forall y_1, y_2\in f(X)$, $\exists x_1, x_2\in X$ 使 $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2$, ∃道路 g: [0, 1]→X 使 $g(0)=x_1$, $g(1)=x_2$，则 $f\circ g$: [0, 1] →Y 是 f(X)中从 y_1 到 y_2 的道路.

定理 4.5.3 道路连通性是有限可积性.

证 仅证若 X_1, X_2 是道路连通，则 $X_1\times X_2$ 道路连通. $\forall x=(x_1, x_2), y=(y_1, y_2)\in X_1\times X_2$，则∃道路 f_i: $[0, 1]\to X_i$ 使 $f_i(0)=x_i$, $f_i(1)=y_i$，定义 $f: [0, 1]\to X_1\times X_2$ 为 $f(t)=(f_1(t), f_2(t))$, 则 f 是从 x 到 y 的道路.

可引进局部道路连通空间的概念. 同时，与连通分支类似，可建立道路连通分支：空间中最大的道路连通子集.

第五章 可数性公理

本章主要介绍 4 种与可数性相关的拓扑性质，它们与度量空间性质、下章要讨论的分离性公理都是密切相关的. 本章的要点是给出它们之间的基本关系.

§5.1 第一与第二可数性定理

第二章介绍的空间的基，在生成拓扑空间，描述局部连通性，刻画连续性等方面都发挥了积极的作用. 较少的基元对于进一步讨论空间的属性是重要的.

定义 5.1.1 若 X 有可数基，称 X 满足第二可数(性)公理，或是第二可数空间，简称 A_2 空间.

定理 5.1.1 **R**⇒A_2.

证 令 $\mathscr{B}=\{(a, b) \mid a, b\in\mathbf{Q}\}$, 定理 2.6.2, $\mathscr{B}$ 是 $\mathbf{R}$ 的可数基.

离散空间 X 具有可数基⇔X 是可数集.

下面讨论"局部基"性质. (定义 2.6.3)对 $x\in X$, 设 $\mathscr{U}_x$ 是 x 的邻域系, 若 $\mathscr{V}_x\subset\mathscr{U}_x$ 满足: $\forall U\in\mathscr{U}_x$, $\exists V\in\mathscr{V}_x$ 使 $V\subset U$, 则称 $\mathscr{V}_x$ 是 x 的邻域基, 若更设 $\mathscr{V}_x$ 中每一元都是开的, 则称 $\mathscr{V}_x$ 是 x 的开邻域基或局部基. 易验证, (1) 若 $\mathscr{V}_x$ 是 x 在 X 的邻域基, 则$\{V^\circ \mid V\in\mathscr{V}_x\}$是 x 在 X 的局部基; (2)(定理 2.6.7) 若 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的基, $\forall x\in X$, 则 $\mathscr{B}_x=\{B\in\mathscr{B} \mid x\in B\}$是 x 的局部基.

定义 5.1.2 若 X 的每一点有可数邻域基, 称 X 满足第一可数(性)公理, 或是第一可数空间, 简称 A_1 空间.

定理 5.1.2 度量空间$\Rightarrow A_1$.

证 $\{B(x, 1/n) \mid n\in\mathbf{Z}_+\}$是 x 的可数邻域基.

例 5.1.1 不可数多个点的可数补空间 X: 非 A_1.

设 $x\in X$ 有可数局部基$\mathscr{V}$. $\forall y\in X-\{x\}, \exists V_y\in\mathscr{V}$ 使 $V_y\subset\{y\}'$, $\{y\}\subset V_y'$, 从而不可数集$\{x\}'\subset\cup\{V_y' \mid x\neq y\in X\}$可数集, 矛盾.

定理 5.1.3 $A_2\Rightarrow A_1$.

证 若 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数基, 则 $\mathscr{B}_x=\{B\in\mathscr{B} \mid x\in B\}$是 $x\in X$ 的可数邻域基.

逆命题不成立, 不可数的离散空间是反例.

定理 5.1.4 设 $f: X\to Y$ 连续、满、开映射, 则 X 是 $A_2(A_1)\Rightarrow$Y 是 $A_2(A_1)$.

证 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数基, 则 $\mathscr{B}^*=\{f(B) \mid B\in\mathscr{B}\}$是 Y 的可数基. 事实上, 设 U 是 y 在 Y 中的邻域, 取 $x\in f^{-1}(y)$, 则 $f^{-1}(U)$是 x 的邻域, $\exists B\in\mathscr{B}$ 使 $x\in B\subset f^{-1}(U)$, $y\in f(B)\subset U$. 证明也适用于: 设 $\mathscr{V}$ 是 x 在 X 的局部基, 则 $\mathscr{V}^*=\{f(V) \mid V\in\mathscr{V}\}$是 f(x)在 Y 的局部基.

可遗传性质(如, 离散性, 平庸性), 开遗传性质(如, 局部连通性), 闭遗传性质.

定理 5.1.5 A_2, A_1 都是可遗传性质.

证 设 $Y\subset X$. 若 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数基, 则 $\mathscr{B}|_Y$ 是 Y 的可数基. 若 $y\in Y$ 且 $\mathscr{V}$ 是 y 在 X 中的邻域基, 则 $\mathscr{V}|_Y$ 是 y 在 Y 中的可数邻域基.

定理 5.1.6 A_2, A_1 都是有限可积性.

证 仅证若 X_1, X_2 是 A_1 空间, 则 $X_1\times X_2$ 是 A_1 空间. $\forall x=(x_1, x_2)\in X_1\times X_2$, 分别设 x_1, x_2 在 X_1, X_2 的可数局部基是 $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2$, 令 $\mathscr{V}=\{V_1\times V_2 \mid V_1\in\mathscr{V}_1, V_2\in\mathscr{V}_2\}$, 则 $\mathscr{V}$ 是 x 在 $X_1\times X_2$ 中的可数局部基. 事实上, 设 U 是 x 在 $X_1\times X_2$ 中的邻域, 则分别$\exists X_1, X_2$ 的开集 U_1, U_2 使 $x\in U_1\times U_2\subset U^\circ$, $\exists V_1\in\mathscr{V}_1, V_2\in\mathscr{V}_2$, 使 $V_1\subset U_1$ 且 $V_2\subset U_2$, 则 $V_1\times V_2\subset U_1\times U_2\subset U$.

推论 5.1.7 $\mathbf{R}^n$ 的每一子空间是 A_2.

作为§2.7 的继续, 下面讨论第一可数空间的序列性质. X 中的集列$\{A_i\}_{i\in \mathbf{Z}_+}$称为下降的, 如果 $A_1\supset A_2\supset\ldots$.

定理 5.1.8 X 在 x 有可数邻域基⇔X 在 x 有下降的可数邻域基$\{U_i\}_{i\in \mathbf{Z}_+}$.

证 "⇒"设$\{V_i\}_{i\in \mathbf{Z}_+}$是 x 在 X 的可数邻域基, 令 $U_i=V_1\cap V_2\cap\ldots\cap V_i$.

定理 5.1.9 设 X 是 A_1 空间, $A\subset X$. $A-\{x\}$中序列 $x_i\to x\Leftrightarrow x\in d(A)$.

证 定理 2.7.2 已证"⇒", 下证"⇐". 设$\{U_i\}_{i\in \mathbf{Z}_+}$是 x 在 X 中下降的可数邻域基. $\exists x_i\in U_i\cap(A-\{x\})$, 则 $x_i\to x$. 事实上, $\forall x$ 的邻域 U, $\exists n\in Z_+$使 $U_n\subset U$, $\forall i>n$, $x_i\in U_i\subset U_n\subset U$.

定理 5.1.10 设 X 是 A_1 空间. $f: X\to Y$ 连续$\Leftrightarrow\forall x_i\to x\in X$, $f(x_i)\to f(x)$.

证 定理 2.7.3 已证"⇒", 下证"⇐". 若 f 在某点 $x\in X$ 不连续, $\exists f(x)$的邻域 V 使 $f^{-1}(V)$不是 x 的邻域. 设$\{U_i\}_{i\in \mathbf{Z}_+}$是 x 在 X 中下降的可数邻域基, 那么每一$U_i\not\subset f^{-1}(V)$, $\exists x_i\in U_i-f^{-1}(V)$, 于是 $x_i\to x$, 从而 $f(x_i)\to f(x)\in V$, $\exists n\in \mathbf{Z}_+$, $\forall i>n$ 有 $f(x_i)\in V$, $x_i\in f^{-1}(V)$, 矛盾.

§5.2 可分空间

定义 5.2.1 $D\subset X$ 称为 X 的稠密子集, 若 $c(D)=X$, 即若 U 是 X 的非空开集, 则 $U\cap D\neq\varnothing$.

定义 5.2.2 若 X 有可数的稠密子集, X 称为可分空间.

定理 5.2.2 $A_2\Rightarrow$可分.

证 设$\mathcal{B}$是 X 的可数基, $\forall B\in\mathcal{B}$, 取定 $x_B\in B$, 令 $D=\{x_B \mid B\in\mathcal{B}\}$, 则 D 可数. $\forall x\in X$, 及 x 的任一邻域 U, $\exists B\in\mathcal{B}$ 使 $x\in B\subset U$, 那么 $x_B\in U\cap D$, 所以 $U\cap D\neq\varnothing$, 即 $x\in c(D)$. $c(D)=X$.

由此, A_2 的每一子空间是可分的; $\mathbf{R}^n$ 的每一子空间是可分的.

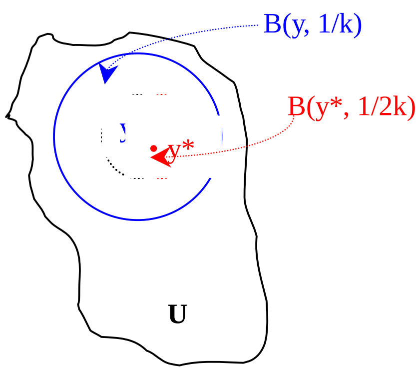
例 5.2.1 设$(X, \mathcal{T})$是拓扑空间, $\infty\notin X$. 定义 $X^*=X\cup\{\infty\}$, $\mathcal{T}^*=\{A\cup\{\infty\} \mid A\in\mathcal{T}\}\cup\{\varnothing\}$. 易验证, $(X^*, \mathcal{T}^*)$是拓扑空间; $\mathcal{B}$ 是$(X, \mathcal{T})$的基$\Leftrightarrow\mathcal{B}^*=\{B\cup\{\infty\} \mid B\in\mathcal{B}\}$是$(X^*, \mathcal{T}^*)$的基.

(1) $(X^*, \mathcal{T}^*)$是可分空间, 因为$\{\infty\}$是 X^*的稠密集;

(2) $(X^*, \mathcal{T}^*)$是 $A_2\Leftrightarrow(X, \mathcal{T})$是 A_2;

(3) $(X, \mathcal{T})$是$(X^*, \mathcal{T}^*)$的(闭)子空间, 因为 $\mathcal{T}=\mathcal{T}^*|_X$.

现在, 取$(X, \mathcal{T})$是不可数的离散空间, 则$(X, \mathcal{T})$不是可分空间, $(X^*, \mathcal{T}^*)$是可分, 非 A_2 空间, 所以, (i)可分$\not\Rightarrow A_2$; (ii)可分性不是(闭)遗传性.



定理 5.2.4 可分度量$\Rightarrow A_2$.

证 设 D 是度量空间(X, ρ)的可数稠密集. 令 $\mathcal{B}=\{B(x, 1/n) \mid x\in D, n\in \mathbf{Z}_+\}$, 则$\mathcal{B}$是 X 的可数基. 事实上,

$\forall y\in X$ 及 y 在 X 中的邻域 U, $\exists k\in \mathbf{Z}_+$, 使 $B(y, 1/k)\subset U$. 由于 $c(D)=X$, $\exists y^*\in B(y, 1/2k)\cap D$, 那么 $B(y^*, 1/2k)\in \mathcal{B}$ 且 $y\in B(y^*, 1/2k)\subset B(y, 1/k)\subset U$.(设 $x\in B(y^*, 1/2k)$, $\rho(x, y)\le\rho(x, y^*)+\rho(y^*, y)<1/k$).

由此, 可分度量空间的每一子空间是可分的.

§5.3 Lindelöf 空间

定义 5.3.1 设 $\mathcal{A}$ 是 X 的子集族, $B\subset X$. 若 $B\subset\cup\mathcal{A}$, 则称 $\mathcal{A}$ 是 B 的覆盖, 并且当 $\mathcal{A}$ 是可数集(有限集, 开集, 闭集)族时, 称 $\mathcal{A}$ 是 B 的可数(有限, 开, 闭)覆盖. 若 $\mathcal{A}$ 的子集 $\mathcal{A}_1$ 覆盖 B, 则 $\mathcal{A}_1$ 称为 $\mathcal{A}$ 的子覆盖.

数学分析中的 Heine-Borel 定理: **R** 的闭区间的每一开覆盖有有限子覆盖.

定义 5.3.2 X 称为 Lindelöf 空间, 若 X 的每一开覆盖有可数子覆盖.

含有不可数多个点的离散空间不是 Lindelöf 空间.

定理 5.3.1(Lindelöf 定理) $A_2\Rightarrow$Lindelöf.

证 设 X 有可数基 $\mathcal{B}$. 让 $\mathcal{A}$ 是 X 的任一开覆盖, 令 $\mathcal{B}_1=\{B\in\mathcal{B}\mid \exists A\in\mathcal{A}$ 使 $B\subset A\}=\{B_n\}_{n\in\mathbf{Z}_+}$. $\exists A_n\in\mathcal{A}$ 使 $B_n\subset A_n$. 则$\{A_n\}_{n\in\mathbf{Z}_+}$是$\mathcal{A}$的可数子覆盖. 事实上, $\forall x\in X$, $\exists A\in\mathcal{A}$ 使 $x\in A$, $\exists B\in\mathcal{B}$ 使 $x\in B\subset A$, 设 $B=B_n$, 那么 $x\in A_n$.

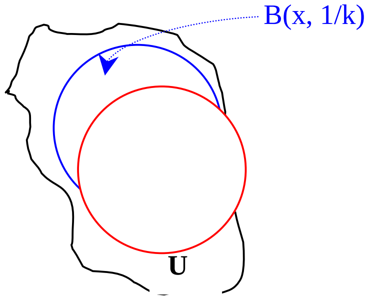
由此, A_2 空间的每一子空间是 Lindelöf 空间.(推论 5.3.2)

例 5.3.1 含有不可数个点的可数补空间 X: Lindelöf 空间.

例 5.1.1 已证明 X 不是 A_1 空间. 设 $\mathcal{A}$ 是 X 的开覆盖. 取定$\varnothing\neq A\in\mathcal{A}$, $\forall x\in A'$, $\exists A_x\in\mathcal{A}$ 使 $x\in A_x$, 则$\{A\}\cup\{A_x\mid x\in A'\}$是 $\mathcal{A}$ 的可数子覆盖. 故 X 是 Lindelöf 空间. 同理, X 的每一子空间也是 Lindelöf 空间.

定理 5.3.3 Lindelöf 度量$\Rightarrow A_2$.

证 设(X, ρ)是 Lindelöf 的度量空间. $\forall k\in\mathbf{Z}_+$, X 的开覆盖 $\mathcal{A}_k=\{B(x, 1/k)\mid x\in X\}$有可数子覆盖 $\mathcal{B}_k=\{B(x_{ki}, 1/k)\mid i\in\mathbf{Z}_+\}$. 下证 $D=\{x_{ki}\mid k, i\in\mathbf{Z}_+\}$是 X 的可数稠密集. 对 X 的任一非空开集 U, $\exists x\in U$, $\exists k\in\mathbf{Z}_+$使 $B(x, 1/k)\subset U$. 由于 $\mathcal{B}_k$ 是 X 的覆盖, $\exists i\in\mathbf{Z}_+$使 $x\in B(x_{ki}, 1/k)$, 那么 $x_{ki}\in B(x, 1/k)\subset U$, 于是 $D\cap U\neq\varnothing$. 故 X 是可分空间, 再由定理 5.2.4, X 是 A_2.

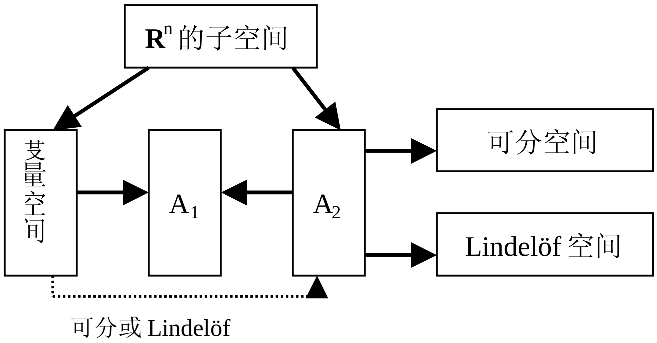


定理 5.3.4 Lindelöf 是可闭遗传性质.

证 设 Y 是 Lindelöf 空间 X 的闭子空间. $\mathcal{A}$是 Y 的开覆盖, $\forall A\in\mathcal{A}$, $\exists$X 的开集 U_A 使 $U_A\cap Y=A$, 那么 X 的开覆盖$\{U_A\mid A\in\mathcal{A}\}\cup\{Y'\}$有可数子覆盖$\{U_{A_i}\mid i\in\mathbf{Z}_+\}\cup\{Y'\}$. 于是$\{A_i\mid i\in\mathbf{Z}_+\}$是$\mathcal{A}$关于 Y

的可数子覆盖.

本章介绍的几类可数性的关系见图表 5.1.



第六章 分离性公理

本章介绍分离性公理与可度量化定理, 其中包含著名的 Urysohn 引理、Tietze 扩张定理和 Urysohn 嵌入定理, 这是全书中最难证明的几个重要定理. 几类分离性公理的刻画及相互关系(§6.1-§6.4)是本章的主要内容.

§6.1 T_0, T_1, Hausdorff 空间

定义 6.1.1 X 称为 T_0 空间, 若 X 中任两个不同点中必有一点有一个开邻域不包含另一点, 即 $\forall x\neq y\in X$, 或者 x 有开邻域 U 不含 y, 或者 y 有开邻域 V 不含 x.

定理 6.1.1 X 是 $T_0\Leftrightarrow\forall x\neq y\in X$, $\{x\}^-\neq\{y\}^-$.

证 "⇒"$\forall x\neq y\in X$, 若 x 有邻域 U 使 $y\notin U$, 那么 $x\notin\{y\}^-$, 所以$\{x\}^-\neq\{y\}^-$. 同理, 若 y 有邻域 V 使 $x\notin V$, 那么$\{x\}^-\neq\{y\}^-$.

"⇐" $\forall x\neq y\in X$, 由于$\{x\}^-\neq\{y\}^-$, 不妨设$\{x\}^--\{y\}^-\neq\varnothing$, 如果 $x\in\{y\}^-$, 那么$\{x\}^-\subset\{y\}^-$, 矛盾, 于是 $x\notin\{y\}^-$, 所以 $x\in\{y\}^{-\prime}$.

定义 6.1.2 X 称为 T_1 空间, 若 X 中任两不同点中每一点有一个开邻域不包含另一点, 即 $\forall x\neq y\in X$, $\exists x$ 的邻域 U 使 $y\notin U$.

$T_1\Rightarrow T_0$, 反之不成立, 如 $X=\{0, 1\}$, $\mathcal{T}=\{\varnothing, \{0\}, X\}$.

定理 6.1.2 X 是 $T_1\Leftrightarrow\forall x\in X$, $\{x\}$是闭集.

证 "⇒"$\forall x\neq y\in X$, 存在 y 的邻域 U 使 $x\notin U$, 那么 $y\notin\{x\}^-$, 从而$\{x\}=\{x\}^-$.

"⇐" $\forall x\neq y\in X$, x 有开邻域$\{y\}'$使 $y\notin\{y\}'$, y 有开邻域$\{x\}'$使 $x\notin\{x\}'$.

等价于有限集是闭集, 因为$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}=\{x_1\}\cup\dots\cup\{x_n\}$.

定理 6.1.3 设 X 是 T_1 空间, $A\subset X$. 则 $x\in d(A)\Leftrightarrow\forall x$ 的邻域 U, $U\cap A$ 是无限集.

只须证"$\Rightarrow$". 若不然, $\exists x$ 的邻域 U 使 $U\cap A$ 是有限集, 则 $B=U\cap A-\{x\}$是闭集, 于是 U-B 是 x 的开邻域且$(U-B)\cap A=\varnothing$, 矛盾.

定义 6.1.3 X 称为 T_2 空间或 Hausdorff 空间, 若 X 中不同点存在互不相交的开邻域. 即 $\forall x\neq y\in X$, 分别$\exists x, y$ 的邻域 U, V 使得 $U\cap V=\varnothing$.

$T_2\Rightarrow T_1$, 反之不成立.

例 6.1.1 含有无限多个点的有限补空间 X: T_1, 非 T_2.

X 的每一有限子集是闭集, 所以 X 是 T_1 空间. 由于 X 中任两个非空开集必定相交, 所以 X 不是 T_2 空间.

定理 6.1.5 T_2 空间中, 任意收敛序列有唯一极限点.

证 设 T_2 空间 X 中的序列 $x_i\to y_1$, 又有 $x_i\to y_2$ 且 $y_1\neq y_2$, 分别$\exists y_1$, y_2 的开邻域 V_1, V_2 使 $V_1\cap V_2=\varnothing$, $\exists n\in \mathbf{Z}_+$, 使$\forall i>n$ 有 $x_i\in V_1\cap V_2$, 矛盾.

在 T_1 空间中, 定理 6.1.5 可以不成立. 如对例 6.1.1 中的空间 X, X 中的任一由两两不同点构成的序列$\{x_i\}$收敛于任意 $x\in X$. 事实上, 设 U 是 x 的开邻域, 则 U'是有限集, $\exists n\in \mathbf{Z}_+$, 使当 $i>n$ 时有 $x_i\in U$, 所以 $x_i\to x$.

§6.2 正则, 正规, T_3, T_4 空间

定义 6.2.1(集的邻域) 设 A, $U\subset X$, 若 $A\subset U^\circ$, 称 U 是 A 的邻域. 若 U 还是开(闭)集, 称 U 是 A 的开(闭)邻域.

定义 6.2.2 X 称为正则空间, 如果$\forall x\in X$, 及 X 的不含 x 的闭集 A, 则 x 与 A 有不相交的开邻域, 即$\exists$X 的不交开集 U, V 使 $x\in U$ 且 $A\subset V$.

定理 6.2.1 X 是正则空间$\Leftrightarrow\forall x\in X$ 及 x 的开邻域 U, $\exists$开集 V 使 $x\in V\subset V^-\subset U$.

证 "$\Rightarrow$"对 x 的开邻域 U, $x\notin U'$, $\exists$X 的不交开集 U_1, V_1 使 $x\in U_1$, $U'\subset V_1$, 从而 $x\in U_1\subset(U_1)^-\subset(V_1)^{\prime\prime}\subset U$.

"$\Leftarrow$"$\forall x\in X$ 及 X 的闭集 A 使 $x\notin A$, 那么 $x\in A'$, $\exists$开集 V 使 $x\in V\subset V^-\subset A'$, 令 $U=V^{-\prime}$, 则 V, U 是不交开集且 $x\in V$, $A\subset U$.

定义 6.2.3 X 称为正规空间, 如果 X 中不交闭集存在不交的开邻域, 即若 A, B 是 X 的不交的闭集, 存在不交开集 U, V 使 $A\subset U$, $B\subset V$.

定理 6.2.2 X 是正规空间$\Leftrightarrow$对 X 的闭集 A 及 A 的开邻域 U, 存在开集 V 使 $A\subset V\subset V^-\subset U$.

与定理 6.2.1 的证明类似.

例 6.2.1 正则+正规$\not\Rightarrow T_0$.

令 $X=\{1, 2, 3\}$, $\mathcal{T}=\{\varnothing, \{1\}, \{2, 3\}, X\}$, 则$(X, \mathcal{T})$是拓扑空间. 由于 X 的开集也是闭集, 所以 X 是正则, 正规空间. 由两点 2, 3 可见, X 不是 T_0 空间.

例 6.2.2(Smirnov 删除序列拓扑) T_2, 非正则空间.

R 的通常拓扑为 $\mathcal{T}$. 令 $K=\{1/n \mid n\in \mathbf{Z}_+\}$, $\mathcal{T}^*=\{G-E \mid G\in\mathcal{T}, E\subset K\}$. 可以验证 $\mathcal{T}^*$是 **R** 上的拓扑且 $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}^*$. 于是$(\mathbf{R}, \mathcal{T}^*)$是 T_2 空间. 由于$(\mathbf{R}, \mathcal{T}^*)$的闭集 K 与 0 没有不交的开邻域, 所以$(\mathbf{R}, \mathcal{T}^*)$不是正则空间.

正则$\not\Leftrightarrow$正规, 关键在于“单点集未必是闭集”.

定义 6.2.4 T_3=正则+T_1, T_4=正规+T_1.

$T_4\Rightarrow T_3\Rightarrow T_2$.

定理 6.2.3 度量空间$\Rightarrow T_4$.

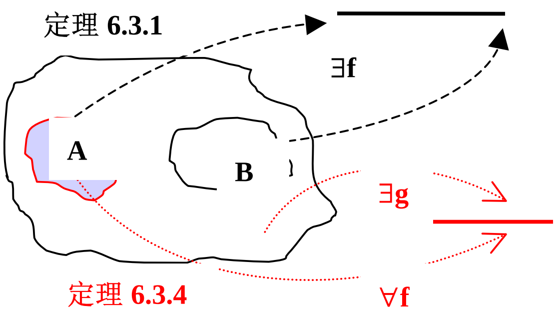
证 对度量空间(X, ρ), 先证 X 是 T_2. $\forall x\neq y\in X$, $\rho(x, y)=2\varepsilon>0$, 则 $B(x, \varepsilon)$, $B(y, \varepsilon)$是 x, y 的不交的开邻域.

设 A, B 是 X 的不交的非空闭集. $\forall x, y\in X$, 由定理 2.4.9, 如果 $x\notin B$, 则$\rho(x, B)>0$; 如果 $y\notin A$, 则$\rho(y, A)>0$. 记$\rho(x, B)=2\varepsilon(x)$, $\rho(y, A)=2\delta(x)$, 并令 $U=\cup_{x\in A}B(x, \varepsilon(x))$, $V=\cup_{y\in B}B(y, \delta(y))$, 则 U, V 分别是 A, B 的开邻域. 以下证明 $U\cap V=\varnothing$. 若不然, $\exists z\in U\cap V$, $\exists x_1\in A$, $y_1\in B$, 使 $z\in B(x_1, \varepsilon(x_1))\cap B(y_1, \delta(y_1))$, 于是 $\rho(z, x_1)<\varepsilon(x_1)$, $\rho(z, y_1)<\delta(y_1)$. 不妨设 $\varepsilon(x_1)\geq\delta(y_1)$, 于是 $\rho(x_1, y_1)\leq\rho(x_1, z)+\rho(z, y_1)<2\varepsilon(x_1)=\rho(x_1, B)$, 矛盾.

§6.3 Urysohn 引理和 Tietze 扩张定理

用函数分离与存在连续扩张的方式刻画正规性.

定理 6.3.1(Urysohn 引理) X 是正规空间$\Leftrightarrow$对 X 的任两不交闭集 A, B, 存在连续映射 $f: X\to[0, 1]$使 $f(A)\subset\{0\}$且 $f(B)\subset\{1\}$.



应用一例.

定理 6.3.2 T_4空间中任意多于一点的连通子集是不可数集.

证 设 C 是 T_4空间 X 的多于一点的连通集. 取定 $x\neq y\in C$, $\exists$连续映射 $f: X\to[0, 1]$使 $f(x)=0$, $f(y)=1$. 由 C 连通, $f(C)=[0, 1]$, 于是 C 是不可数集.

定理 6.3.4(Tietze 扩张定理) X 是正规空间$\Leftrightarrow$对 X 的任一闭集 A 及连续映射 $f: A\to[a, b]$, 存在连续映射 $g: X\to[a, b]$是 f 的扩张, 即 $g|_A=f$.

§6.4 完全正则空间, Tychonoff 空间

定义 6.4.1 X 称为完全正则空间, 如果$\forall x\in X$ 及不含 x 的闭集 B, 存在连续映射 $f: X\to[0, 1]$使 $f(x)=0$ 且 $f(B)\subset\{1\}$. 完全正则的 T_1空间称为 Tychonoff 空间, 或 $T_{3.5}$空间.

定理 6.4.1 完全正则$\Rightarrow$正则.

证 $\forall x\in X$ 及不含 x 的闭集 A, 存在连续映射 $f: X\to[0, 1]$使 $f(x)=0$ 且 $f(A)\subset\{1\}$. 令 $U=f^{-1}([0, 1/2))$, $V=f\text{-}1((1/2, 1])$, 则 U, V 是 X 的不交开集且 $x\in U$, $A\subset V$.

定理 6.4.2 正则+正规$\Rightarrow$完全正则.

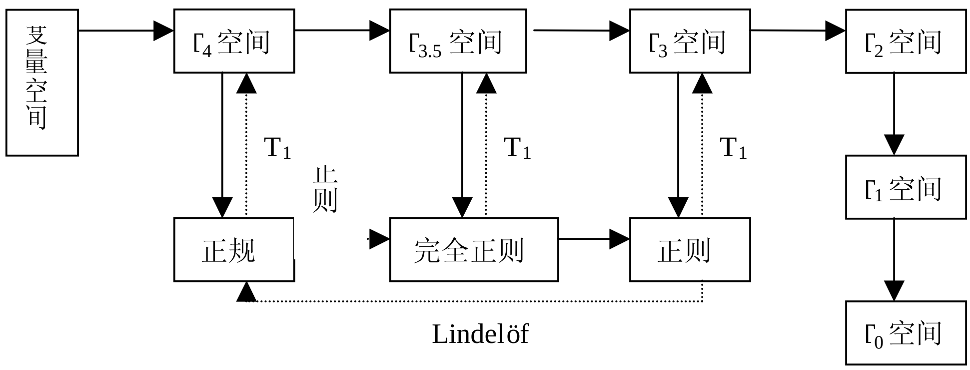
证 $\forall x\in X$ 及不含 x 的闭集 B, 由正则性, $\exists$开集 U 使 $x\in U\subset U^-\subset B'$, 则 U^-, B 是 X 的不交闭集, 由 Urysohn 引理, $\exists$连续映射 $f: X\to[0, 1]$使 $f(U^-)\subset\{0\}$且 $f(B)\subset\{1\}$, 这时 $f(x)=0$.

定理 6.4.3(Tychonoff 定理) 正则+Lindelöf$\Rightarrow$正规.

证 对正则 Lindelöf 空间 X 的不交闭集 A, B, $\forall\in A$, $x\notin B$, $\exists$开集 U_x 使 $x\in U_x\subset U_x^-\subset B'$. A 的覆盖$\{U_x \mid x\in A\}$存在可数子覆盖$\{U_i\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$, 这时每一 $U_i^-\cap B=\varnothing$. 同理, B 有可数开覆盖$\{V_i\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$使每一 $V_i^-\cap A=\varnothing$.

令 $U_n^*=U_n-\cup_{i\leq n}V_i^-$, $V_n^*=V_n-\cup_{i\leq n}U_i^-$, 则 U_n^*, V_n^*是开集且$\forall n, m\in\mathbf{Z}_+$有 $U_n^*\cap V_m^*=\varnothing$. 再令 $U=\cup_{n\in\mathbf{Z}_+}U_n^*$, $V=\cup_{n\in\mathbf{Z}_+}V_n^*$, 则 U, V 是 X 的不交开集且 $A\subset U$, $B\subset V$.

各分离性公理之间的关系如下.



§6.5 分离性公理与子空间、积空间和商空间

一、分离性公理是拓扑性质

定理 6.5.1 设空间 X, Y 同胚, 若 X 是完全正则, 则 Y 也是完全正则.

证 设同胚 $h: X\to Y$. $\forall y\in Y$ 及不含 y 的闭集 B, 则 X 中的闭集 $h^{-1}(B)$不含 $h^{-1}(y)$, ∃连续映射 $f: X\to[0, 1]$使 $f(h^{-1}(y))=0$ 且 $f(h^{-1}(B))\subset\{1\}$, 于是 $g=f\circ h^{-1}: Y\to[0, 1]$连续且 $g(y)=0$, $g(B)\subset\{1\}$.

二、T_0–$T_{3.5}$、正则、完全正则是可遗传性质, T_4、正规是闭遗传性质

定理 6.5.2 正则性是可遗传性质.

证 设 X 是正则空间, $Y\subset X$. $\forall y\in Y$ 及不含 y 的闭集 B, ∃X 的闭集 B^*使 $B^*\cap Y=B$, 那么 $y\notin B^*$, ∃X 中不交开集 U^*, V^*使 $y\in U^*$且 $B^*\subset V^*$, 从而 $y\in U^*\cap Y$, $B=B^*\cap Y\subset V^*\cap Y$.

三、T_0–$T_{3.5}$、正则、完全正则是有限可积性质, T_4、正规不是有限可积的

定理 6.5.3 完全正则性是有限可积性.

证 仅证若 X_1, X_2 是完全正则空间, 则 $X_1\times X_2$ 是完全正则空间. $\forall x=(x1,\ x2)\in X_1\times X_2$ 及不含 x 的闭集 B, 分别存在 X_1 的开集 U_1, X_2 的开集 U_2, 使得$(x_1, x_2)\in U_1\times U_2\subset X_1\times X_2-B$. 对 i=1, 2, ∃连续映射 $f_i: X_i\to[0, 1]$使得 $f_i(x_i)=0$ 且 $f_i(X_i-U_i)\subset\{1\}$.

定义映射 $f: X_1\times X_2\to[0, 1]$为 $f((y_1, y_2))=\max\{f_1(y_1), f_2(y_2)\}$, 易验证, f 连续且 $f((x_1, x_2))=0$. $\forall y=(y_1, y_2)\in B$, 则$(y_1, y_2)\notin U_1\times U_2$, ∃i=1 或 2 使 $y_i\notin U_i$, 从而 $f_i(y_i)=1$, 于是 $f(y)=1$, 即 $f(B)\subset\{1\}$.

本节习题 3 表明: 实数下限拓扑空间 $\mathbf{R}_l$ 是 T_4空间, 但是 $\mathbf{R}_l^2$ 不是正规空间.

有例子说明, 分离性都不是可商性质.

例 3.3.1 表明, 存在商映射 $q: \mathbf{R}\to\mathbf{R}/\sim$使$\mathbf{R}/\sim$是由两点组成的平庸空间. **R** 具有下述介绍的所有分离性质, 但是 $\mathbf{R}/\sim$不是 T_0 空间. 因此, 分离公理 T_i 不是可商性质.

例 6.5.1 正则性, 完全正则性, 正规性都不是可商性质.

记 **R** 的子集 $A=(-\infty, 0]$, $B=(0, 1)$, $C=[1, +\infty)$. 在 **R** 上定义等价关系~如下: $\forall x, y\in\mathbf{R}$, $x\sim y\Leftrightarrow x, y$ 同时属于 A, B 或 C 之一. 则商集 $Y=\mathbf{R}/\sim$为{A, B, C}, 商拓扑是{∅, {B}, {A, B}, {B, C}, {A, B, C}}. 易见 Y 是 T_0 空间. 考察 A, B 两点, Y 不是 T_1 空间. 考察两闭集{A}, {C}, Y 既不是正则空间, 也不是正规空间, 从而 Y 不是完全正则空间(定理 6.4.1).

§6.6 可度量化空间

可度量化空间(定义 2.2.3): 空间的拓扑与某一度量拓扑一致.

嵌入: 设 X, Y 是两拓扑空间, 映射 $f: X\to Y$ 称为嵌入, 如果 f 是 X 到 f(X)的同胚; 也称 X 可嵌入 Y.

回忆 Hilbert 空间 **H**.

定理 6.6.1(Urysohn 嵌入定理) 第二可数的 T_3 空间可嵌入 **H**.

证 设 X 是第二可数的正则空间, 则 X 是正规空间(Tychonoff 定理 6.4.3). 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的不含∅的可数基. 令 $\mathscr{A}=\{(U, V)\in\mathscr{B}\times\mathscr{B} \mid U^-\subset V\}=\{(U_i, V_i) \mid i\in \mathbf{Z}_+\}$. $\forall\, i\in \mathbf{Z}_+$, 因 $U_i^-\subset V_i$, ∃连续映射 f_i: X→[0, 1]使 $f_i(U_i^-)\subset\{0\}$, $f_i(X-V_i)\subset\{1\}$. 定义 f: X→H 使 $f(x)=(f_1(x), f_2(x)/2, \ldots, f_i(x)/i, \ldots)$. 则 f 是一个嵌入.

定理 6.6.2 H 是可分空间.

证 令 $D=\{(y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)\in \mathbf{H} \mid n\in\mathbf{Z}_+, y_i\in\mathbf{Q}\}$. 则 D 是 **H** 的可数稠密集. 只须证, $\forall x\in\mathbf{H}$, $\forall\varepsilon>0$, $B(x, \varepsilon)\cap D\neq\varnothing$. ∃n>0 使$\Sigma_{i>n}x_i^2<\varepsilon^2/2$. $\forall i\le n$, $\exists y_i\in\mathbf{Q}$ 使$|x_i-y_i|<\varepsilon/\sqrt{2n}$. 于是 $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)\in D$ 且$\rho(x, y)=\sqrt{\sum_{i\le n}(x_i-y_i)^2+\sum_{i>n}x_i^2}<\sqrt{n(\varepsilon/\sqrt{2n})^2+\varepsilon^2/2}=\varepsilon$, 所以 $y\in B(x, \varepsilon)\cap D$.

定理 6.6.3 下述等价:

(1)X 是第二可数的 T_3 空间;

(2)X 可嵌入 **H**;

(3)X 是可分的度量空间.

证 由已证命题可知(3)⇒(1)⇒(2). (2)⇒(3). **H** 是可分的度量空间, **H** 的子空间也是可分度量空间, 从而 X 是可分度量空间.

上述定理中的 T_3 条件是必不可少的, 如例 6.2.2 中的空间(**R**, $\mathscr{T}$*)是 A_2 的 T_2 空间, 但不是 T_3 空间.

第七章 紧致性

可度量性与紧致性是点集拓扑学中最重要的两个拓扑性质. 本章介绍紧致性及它与分离性公理、可数性公理的关系, 分析了度量空间中紧致性的几种等价形式, 引进了紧致性的两种本质推广: 局部紧致性与仿紧致性.

§7.1 紧致空间

Lindelöf 空间的定义. Heine-Borel 有限覆盖定理.

定义 7.1.1 紧致空间: X 的每一开覆有有限子覆盖.

紧⇒Lindelöf, 反之不然. 如由可数无限个点组成的离散空间.

例 7.1.1 R 不是紧致空间.

R 的开覆盖 $\mathscr{A}=\{(-n, n)\subset\mathbf{R} \mid n\in\mathbf{Z}_+\}$没有有限子覆盖.

定义 7.1.2 X 的子集 Y 称为紧致子集，如果 Y 作为子空间是紧致空间.

定理 7.1.1 设 $Y\subset X$，则 Y 紧致$\Leftrightarrow$由 X 中开集构成 Y 的覆盖有有限子覆盖.

证 "$\Rightarrow$"设 $\mathcal{A}$ 是 Y 的这样一个覆盖，$\mathcal{A}|_Y$ 有有限子覆盖$\{A_i\cap Y \mid i\le n\}$，则$\{A_i \mid i\le n\}$覆盖 Y.

"$\Leftarrow$"设 $\mathcal{A}$ 是 Y 的开覆盖，$\forall A\in\mathcal{A}$，$\exists$X 的开集 U_A 使 $A=U_A\cap Y$，$\mathcal{A}^*=\{U_A\}_{A\in\mathcal{A}}$ 有有限子覆盖$\{U_{A_i}\}_{i\le n}$，则$\{A_i\}_{i\le n}$是 Y 的有限子覆盖.

定义 7.1.3 有限交性质：每一有限子族具有不空的交.

定理 7.1.2 X 紧致$\Leftrightarrow$具有有限交性质的闭集族有非空的交.

证 "$\Rightarrow$"$\mathcal{F}$ 是 X 的具有有限交性质的闭集族，如果$\cap\mathcal{F}=\varnothing$，则$\cup\mathcal{F}'=X$，那么 X 有覆盖$\{F_1', \ldots F_n'\}$，从而$\cap_{i\le n}F_i=(\cup_{i\le n}F_i')'=\varnothing$，矛盾.

"$\Leftarrow$"设 $\mathcal{A}$ 是 X 的开覆盖，因为$\cup\mathcal{A}=X$，于是$\cap\mathcal{A}'=\varnothing$，所以某有限子集之交$\cap_{i\le n}A_i'=\varnothing$，即$\cup_{i\le n}A_i=X$，从而 $\mathcal{A}$ 有有限子覆盖.

定理 7.1.3 设 $\mathcal{B}$ 是 X 的基. 如果 X 的由 $\mathcal{B}$ 中元构成的每一覆盖有有限子覆盖，则 X 是紧致空间.

证 设 $\mathcal{A}$ 是 X 的开覆盖. 令 $\mathcal{B}'=\{B\in\mathcal{B} \mid \exists A\in\mathcal{A}$ 使 $B\subset A\}$，则$\cup\mathcal{B}'=X$. 事实上，$\forall x\in X, \exists A\in\mathcal{A}$ 使 $x\in A$，$\exists B\in\mathcal{B}$ 使 $x\in B\subset A$，那么 $B\in\mathcal{B}'$. 于是 $\mathcal{B}'$的某有限子集$\{B_1, \ldots, B_n\}$覆盖 X. $\forall i\le n$，$\exists A_i\in\mathcal{A}$ 使 $B_i\subset A_i$，则$\{A_i\}_{i\le n}$是 $\mathcal{A}$ 的有限子覆盖.

定理 7.1.4 设 $f: X\to Y$ 连续. 若 A 是 X 的紧致子集，则 f(A)是 Y 的紧致子集.

证 设 $\mathcal{C}$ 是由 Y 的开集组成的 f(A)的覆盖，则$\{f^{-1}(C) \mid C\in\mathcal{C}\}$是 X 的开集组成的 A 的覆盖，它有有限子覆盖$\{f^{-1}(C_i)\}_{i\le n}$，于是$\{C_i\}_{i\le n}$是 f(A)的有限子覆盖.

定理 7.1.5 紧致性是可闭遗传性.

证 设 Y 是紧致空间 X 的闭集. 设 $\mathcal{A}$ 是由 X 中开集组成的 Y 的覆盖，则 $\mathcal{A}\cup\{Y'\}$是 X 的开覆盖，它有有限子覆盖$\{A_i\}_{i\le n}\cup\{Y'\}$，从而$\{A_i\}_{i\le n}$是 Y 的覆盖.

紧致性是否是可开遗传性?

定理 7.1.6(Alexandroff 一点紧化定理) 每一拓扑空间必定是某一紧致空间的开子空间.

证 设$(X, \mathcal{T})$是拓扑空间，$\infty\notin X$. 令 $X^*=X\cup\{\infty\}$，$\mathcal{T}^*=\mathcal{T}\cup\{X^*\}\cup\mathcal{T}_1$，其中 $\mathcal{T}_1=\{E\subset X^* \mid X^*-E$ 是$(X, \mathcal{T})$中紧致闭集$\}$. 则

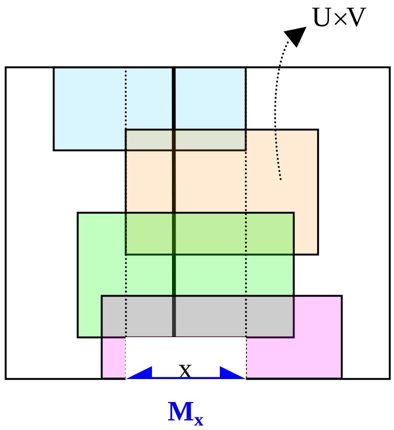
(1) $\mathcal{T}^*$是 X^*上的拓扑.

(2) $(X^*, \mathcal{T}^*)$是紧致空间：设 $\mathcal{C}$ 是 X^*的开覆盖，$\exists C\in\mathcal{C}$ 使$\infty\in C$，那么 X^*-C 是紧致的，有 $\mathcal{C}$ 的有限子集 $\mathcal{C}^*$覆盖 X^*-C，则 $\mathcal{C}^*\cup\{C\}$是 X^*的有限子覆盖.

(3)由于 $\mathcal{T}=\mathcal{T}^*|_X$，所以$(X, \mathcal{T})$是$(X^*, \mathcal{T}^*)$的开子空间.

定理 7.1.7 紧致性是有限可积性.

证 设 X_1, X_2 是紧致的, 要证 $X_1\times X_2$ 是紧致的. $\mathscr{B}=\{U\times V \mid U, V$ 分别是 X_1, X_2 的开集$\}$是 $X_1\times X_2$ 的基. 设 $\mathscr{A}$ 是由 $\mathscr{B}$ 中元构成的 $X_1\times X_2$ 的覆盖. $\forall x\in X_1$, $\{x\}\times X_2$ 同胚于 X_2, 所以 $\mathscr{A}$ 有有限子集 $\mathscr{A}_x=\{U_{xi}\times V_{xi}\}_{i\le n(x)}$覆盖$\{x\}\times X_2$, 不妨设 $x\in U_{xi}$. 令 $M_x=\cap_{i\le n\{x\}}U_{xi}$, 则 X_1 的开集 M_x 含点 x 且 $\cup\mathscr{A}_x\supset M_x\times X_2$. 这时 X_1 的开覆盖$\{M_x \mid x\in X_1\}$有有限子覆盖$\{M_{xj}\}_{j\le m}$. 令 $\mathscr{A}^*=\cup_{j\le m}\mathscr{A}_{xj}$, 则 $\mathscr{A}^*$是 $\mathscr{A}$ 的有限子覆盖.



§7.2 紧致性与分离性公理

定理 7.2.1(定理 7.2.5) X 是 T_2 空间. 若 A, B 是 X 不交的紧致子集, 则 X 中不交的开集分别含 A, B.

证 固定 $x\in A$, $\forall y\in B$, $\exists$不交开集U_y, V_y 分别含 x, y. B 的覆盖$\{V_y \mid y\in B\}$有有限子覆盖$\{V_{yi}\}_{i\le n}$, 令 $U_x^*=\cap_{i\le n}U_{yi}$, $V_x^*=\cup_{i\le n}V_{yi}$, 则 U_x^*, V_x^*是 X 的分别含 x, B 的不交开集. A 的覆盖$\{U_x^* \mid x\in A\}$有有限子覆盖$\{U_{xj}^*\}_{j\le m}$, 令 $U=\cup_{j\le m}U_{xj}^*$, $V=\cap_{j\le m}V_{xj}^*$. 则 U, V 是 X 中分别含 A, B 的不交开集.

推论 7.2.2 T_2 空间的紧致集是闭集.

证 设 A 是 T_2 空间 X 的紧致集. 若 $x\notin A$, $\exists$X 中不交的开集 U, V 分别含 x, A, 于是 $U\cap A=\varnothing$, 所以 $x\notin A^-$, 故 $A=A^-$是闭集.

推论 7.2.3 紧致 T_2 空间中, 闭集=紧致集.

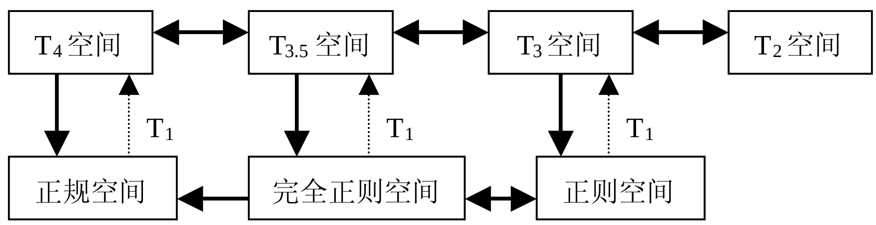
推论 7.2.6 紧致$+T_2\Rightarrow T_4$.

定理 7.2.7 设 X 是正则空间. 若 X 的紧致集 A 含于开集 U 中, 则存在开集 V 使 $A\subset V\subset V^-\subset U$.

证 $\forall x\in A$, $\exists$开集 V_x 使 $x\in V_x\subset V_x^-\subset U$. A 的覆盖$\{V_x \mid x\in A\}$有有限子覆盖$\{V_i\}_{i\le n}$. 令 $V=\cup_{i\le n}V_i$, 则 V 是 X 的开集且 $A\subset V\subset V^-\subset U$.

由此, 紧致的正则空间是正规空间, 从而紧致+正则$\Rightarrow$正规+正则$\Rightarrow$完全正则. 下图是紧致空间中分离性的关系.

紧致空间中



定理 7.2.8 设 $f: X\to Y$ 连续. 若 X 紧致, Y 是 T_2, 则 f 是闭的.

证 若 A 闭于 X, 则 A 是紧致的, 于是 f(A)是 Y 的紧致子集, 从而 f(A)闭于 Y.

若上述 f 还是双射, 则 f 是同胚. (推论 7.2.9)

§7.3 $\mathbf{R}^n$ 中的紧致子集

定义 7.3.1 (X, ρ)是度量空间. $A\subset X$ 称为有界子集, 若$\exists M>0$, $\forall x, y\in A$ 有$\rho(x, y)<M$. 若 X 有界, 称 X 是有界度量空间.

定理 7.3.1 紧致度量空间是有界的.

证 设(X, ρ)是紧致度量空间. X 的开覆盖$\{B(x, 1)\}_{x\in X}$ 有有限子覆盖$\{B(x_i, 1)\}_{i\le n}$. 令 $M=\max\{\rho(x_i, y_j)| i, j\le n\}+2$. $\forall x, y\in X$, $\exists i, j\le n$ 使 $x\in B(x_i, 1)$, $y\in B(x_j, 1)$, 于是$\rho(x, y)\le\rho(x, x_i)+\rho(x_i, x_j)+\rho(x_j, y)<M$.

引理 7.3.2(Heine-Borel 有限覆盖定理) 闭区间[a, b]是紧致空间.

定理 7.3.3 设 $A\subset\mathbf{R}^n$. 则 A 紧致$\Leftrightarrow$A 是有界闭集.

证 让ρ是 $\mathbf{R}^n$ 中通常度量. "$\Rightarrow$"由定理 7.3.1 和推论 7.2.2.

"$\Leftarrow$"设 $A\subset\mathbf{R}^n$ 是有界闭集. $\exists M>0$, 使$\forall x, y\in A$ 有$\rho(x, y)<M$. 取定 $x_0\in A$, 令 $N=M+\rho(\mathbf{0}, x_0)$, 则 $\forall x\in A$, $\rho(x, \mathbf{0})\le\rho(x, x_0)+\rho(x_0, \mathbf{0})<N$, 所以 $A\subset[-N, N]^n$, 于是 A 是紧致的.

$\forall n, m\in\mathbf{Z}_+$, n 维单位球面 S^n 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集, 所以是紧致的, 而 $\mathbf{R}^m$ 不是紧致的, 于是 S^n 与 $\mathbf{R}^m$ 不同胚.

定理 7.3.4 设 X 是紧致空间, $f: X\to\mathbf{R}$ 连续, 则$\exists x_0, x_1\in X$ 满足$\forall x\in X$ 有 $f(x_0)\le f(x)\le f(x_1)$.

证 f(X)是 $\mathbf{R}$ 的紧致子集, 于是 f(X)是 $\mathbf{R}$ 的有界闭集, 设 m, M 分别是 f(X)的上, 下确界, 于是 $m, M\in f(X)$, $\exists x_0, x_1\in X$ 使 $f(x_0)=m$, $f(x_1)=M$, 从而$\forall x\in X$ 有 $f(x_0)\le f(x)\le f(x_1)$.

§7.4 几种紧致性以及其间的关系

定义 7.4.1 可数紧致空间: 每一可数开覆盖有有限子覆盖.

紧致=可数紧致+Lindelöf. (定理 7.4.1, 7.4.2)

定义 7.4.2 列紧致空间: 每一无限子集有聚点.

定理 7.4.3 可数紧致$\Rightarrow$列紧致.

证 设 A 是可数紧致空间 X 的可数无限子集. 若 A 没有聚点, 则 $A^-=A\cup d(A)=A$ 是闭集, 且 $\forall a\in A$, $\exists a$ 的开邻域 U_a 使 $U_a\cap A=\{a\}$. X 的可数开覆盖$\{U_a| a\in A\}\cup\{A'\}$有有限子覆盖$\{U_{a_i}\}_{i\le n}\cup\{A'\}$, 于是 $A=((\cup_{i\le n} U_{a_i})\cup A')\cap A=\{a_i\}_{i\le n}$ 矛盾.

引理 7.4.4 X 是可数紧致$\Leftrightarrow$X 中任一非空下降的闭集列交非空.

证 "$\Rightarrow$"若 X 中的非空下降的闭集列$\{A_i\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$使$\cap_{i\in\mathbf{Z}_+}A_i=\varnothing$, 则 X=$\cup_{i\in\mathbf{Z}_+}A_i'$, $\exists$有限子集$\{A_{ij}'\}_{j\le n}$覆盖 X, 即 X=$\cup_{j\le n}A_{ij}'$, 所以$\varnothing=\cap_{j\le n}A_{ij}=A_m$, 其中 m=max$\{i_j:j\le n\}$, 矛盾.

"$\Leftarrow$"对 X 的可数开覆盖$\{U_j\}_{j\in\mathbf{Z}_+}$, 令 $V_i=\cup_{j\le i}U_j$. 若$\{U_j\}$没有有限子覆盖, 则每一 $V_i\neq X$. 于是$\{V_i'\}$是 X 的非空下降闭集列, 所以$\cap_{i\in\mathbf{Z}_+}A_i'\neq\varnothing$, 即 $X\neq\cup_{i\in\mathbf{Z}_+}V_i=\cup_{j\in\mathbf{Z}_+}U_j$, 矛盾.

定理 7.4.5 T_1+列紧致$\Rightarrow$可数紧致.

证 设 X 是 T_1 列紧致空间. 若 X 不是可数紧致, X 有非空下降闭集列$\{F_i\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$交为空, 取定 $x_i\in F_i$. 令 A=$\{x_i\mid i\in\mathbf{Z}_+\}$. 若 A 是有限集, $\exists a\in A$ 和子列$\{x_{ni}\}$使每一$x_{ni}=a$, 于是$\forall i\in\mathbf{Z}_+$有 $a=x_{ni}\in F_{ni}\subset F_i$, 从而 $a\in\cap_{i\in\mathbf{Z}_+}F_i$. 若 A 是无限集, 设 b 是 A 的聚点, $\forall i\in\mathbf{Z}_+$, 令 $A_i=\{x_j\mid j\ge i\}$, 因为 X 是 T_1 空间, 由定理 6.1.3, $b\in d(A_i)\subset A_i^-\subset F_i$, 所以 $y\in\cap_{i\in\mathbf{Z}_+}F_i$, 矛盾.

定义 7.4.4 序列紧致: 每一序列有收敛子列.

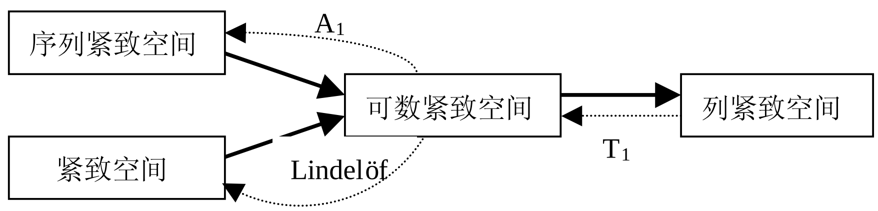
定理 7.4.6 序列紧致$\Rightarrow$可数紧致.

证 设 X 是序列紧致. 若 X 的可数开覆盖$\{U_i\}_{i\in\mathbf{Z}_+}$没有有限子覆盖, $\forall n\in\mathbf{Z}_+$, $\exists x_n\in X-\cup_{i\le n}U_i$. 设子序列 $x_{ni}\to y$, $\exists k\in\mathbf{Z}_+$使 $y\in U_k$, $\exists j>k$ 使 $x_{nj}\in U_k\cap(X-\cup_{i\le nj}U_i)\subset U_k\cap(X-U_k)=\varnothing$, 矛盾.

定理 7.4.7 第一可数+可数紧致$\Rightarrow$序列紧致.

证 设 X 是第一可数的可数紧致空间. 对 X 中的序列$\{x_i\}$, 若$\{x_i|i\in\mathbf{Z}_+\}$是有限集, 则$\{x_i\}$有收敛子列; 若$\{x_i|i\in\mathbf{Z}_+\}$是无限集, 设 x 是它的聚点, 由定理 5.1.9, 存在子列$\{x_{ni}\}$收敛于 x.

各种紧致性之间的关系如下



§7.5 度量空间中的紧致性

定义 7.5.1-7.5.2 Lebesgue 数: 对度量空间(X, ρ)及$\varnothing\neq A\subset X$, diam(A)=sup$\{\rho(x, y)|x, y\in A\}$称为 A 的直径. 实数$\lambda>0$ 称为 X 的开覆盖 $\mathcal{A}$ 的 Lebesgue 数, 若$\forall A\subset X$ 满足 diam(A)<λ, 则 A 含于 $\mathcal{A}$ 的某元中.

定理 7.5.1(Lebesgue 数定理) 序列紧致度量空间的每一开覆盖有 Lebesgue 数.

证 设 X 是序列紧致度量空间. 若 X 的开覆盖 $\mathcal{A}$ 没有 Lebesgue 数, $\forall i\in\mathbf{Z}_+$, $\exists E_i\subset X$ 使

$\mathrm{diam}(E_i)<1/i$ 且 E_i 不含于 $\mathcal{A}$ 的任何元中．取定 $x_i\in E_i$，则$\{x_i\}$有收敛子列 $x_{i_n}\to y$，$\exists A\in\mathcal{A}$ 使 $y\in A$，$\exists j\in\mathbf{Z}_+$使 $B(y, 2/j)\subset A$．$\exists m\in\mathbf{Z}_+$，当 $n>m$ 时 $x_{i_n}\in B(y, 1/j)$，取定 $k>\max\{m, j\}$，$\forall x\in E_{i_k}$，$\rho(x, y)\le\rho(x, x_{i_k})+\rho(x_{i_k}, y)<1/i_k+1/j<2/j$，所以 $E_{i_k}\subset B(y, 2/j)\subset A\in\mathcal{A}$，矛盾.

定理 7.5.2 序列紧致度量空间是紧致的.

证 设 $\mathcal{A}$ 是序列紧致的度量空间 X 的开覆盖．$\mathcal{A}$ 有 Lebesgue 数 $\lambda>0$．令 $\mathcal{B}=\{B(x, \lambda/3)\}_{x\in X}$，则 $\mathcal{B}$ 有有限子覆盖．否则，取定 $x_1\in X$，$\exists$序列$\{x_i\}$满足每一 $x_j\notin\cup_{i<j}B(x_i, \lambda/3)$，则$\forall i\neq j\in\mathbf{Z}_+$有 $\rho(x_i, x_j)>\lambda/3$，于是$\{x_i\}$没有收敛子序列.

设 $\mathcal{B}$ 的有限子覆盖为$\{B(z_i, \lambda/3)\}_{i\le n}$．由于 $\mathrm{diam}\, B(z_i, \lambda/3)\le 2\lambda/3<\lambda$，$\exists A_i\in\mathcal{A}$ 使 $B(z_i,\lambda/3)\subset A_i$，则$\{A_i\}_{i\le n}$是 $\mathcal{A}$ 的有限子覆盖.

定理 7.5.3 设 X 是度量空间，下列等价:

(1)X 是紧致;

(2)X 是列紧致;

(3)X 是序列紧致;

(4)X 是可数紧致.

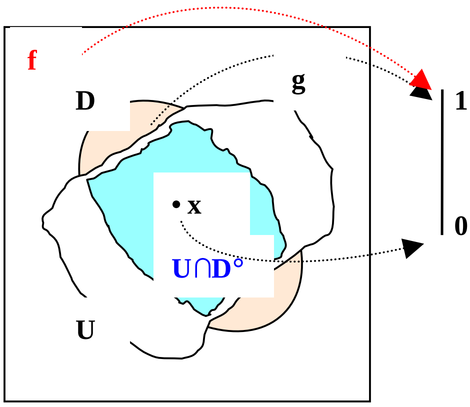
证 显然(1)⇒(2)，由 T_1 知(2)⇒(4)，由 A_1 知(4)⇒(3)，由定理 7.5.2 知(3)⇒(1).

§7.6 局部紧致空间，仿紧致空间

定义 7.6.1 局部紧致：每一点有紧致的邻域.

紧致，或 $\mathbf{R}^n$⇒局部紧致.

定理 7.6.1(定理 7.6.4) 局部紧致$+T_2\Rightarrow T_{3.5}$.



证 设X是局部紧致的T_2空间．$\forall x\in U$，其中 U 开于 X，$\exists x$ 的紧邻域 D，则 $x\in U\cap D^\circ\subset D$．由于 D 是正规子空间，$\exists$连续映射 $g: D\to[0, 1]$使 $g(x)=0$ 且 $g(D-U\cap D^\circ)\subset\{1\}$．定义 $f: X\to[0, 1]$为 $f(X-D)\subset\{1\}$ 且 $f|_D=g$，则 f 连续且 $f(x)=0$，$f(X-U)\subset\{1\}$．事实上，设 F 闭于 [0, 1]，若 $1\in F$，则 $f^{-1}(F)=(X-U\cap D^\circ)\cup g^{-1}(F)$闭于 X；若 $1\notin F$，则 $g^{-1}(F)=g^{-1}(F)$闭于 X.

定义 7.6.2 设集族 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 覆盖集合 X．如果$\forall A\in\mathcal{A}$，$\exists B\in\mathcal{B}$ 使 $A\subset B$，则称 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的加细，或 $\mathcal{A}$ 加细 $\mathcal{B}$.

显然，若 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{B}$ 的子覆盖，则 $\mathcal{A}$ 加细 $\mathcal{B}$. $\{\{x\} \mid x\in X\}$加细 X 的任意覆盖.

定义 7.6.3 设 $\mathcal{A}$ 是空间 X 的子集族. 称 $\mathcal{A}$ 在 X 是局部有限的，若 X 中每一点有一邻域仅与 $\mathcal{A}$ 中有限个元相交，即$\forall x\in X$, $\exists x$ 的邻域U，使$\{A\in\mathcal{A} \mid A\cap U\neq\varnothing\}$是有限的. 若$\mathcal{A}$还是 X 的覆盖，则称 $\mathcal{A}$ 是 X 的局部有限覆盖.

有限集族是局部有限的. 在 **R** 中，令 $\mathcal{A}=\{(n-1, n+1) \mid n\in \mathbf{Z}\}$, $\mathcal{B}=\{(-n, n) \mid n\in \mathbf{Z}_+\}$，则$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$都是 **R** 的开覆盖, $\mathcal{A}$ 加细 $\mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ 是 **R** 的局部有限覆盖，但是 $\mathcal{B}$ **不加细** $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ **不是局部有限的**.

定义 7.6.4 空间 X 称为仿紧致的，若 X 的每一开覆盖有局部有限的开加细，即若 $\mathcal{U}$ 是 X 的开覆盖，则存在 X 的局部有限的开覆盖 $\mathcal{V}$ 使 $\mathcal{V}$ 加细 $\mathcal{U}$.

紧致空间是仿紧致空间，离散空间是仿紧致空间.

定理 7.6.6 仿紧致+$T_2\Rightarrow T_4$.

证 设 A, B 是 T_2 仿紧致空间 X 中的不交闭集. 固定 $x\in A$. $\forall y\in B$, $\exists$不交开集 U_y, V_y 分别含 x, y 两点，那么 $x\notin (V_y)^-$. X 的覆盖$\{V_y \mid y\in B\}\cup\{B'\}$有局部有限开加细 $\mathcal{V}$，令 $\mathcal{V}_x=\{V\in\mathcal{V} \mid \exists y\in B$ 使 $V\subset V_y\}$, $V_x=\cup\mathcal{V}_x$，则 V_x 是 B 的开邻域且 $x\notin(V_x)^-$. 事实上, $\forall b\in B$, $\exists V\in\mathcal{V}$ 使 $b\in V$, $\exists y\in B$ 使 $V\subset V_y$，于是 $b\in V\subset V_x$. 由局部有限性，有 x 的邻域 W_x 仅与 $\mathcal{V}_x$ 中有限个元，设为$\{V_i \mid i\leq n\}$，相交，如果 $x\in(V_x)^-$，则 $x\in(W_x\cap(\cup\mathcal{V}_x))^-\subset(\cup_{i\leq n} V_i)^-\subset\cup_{i\leq n} V_i^-$，于是$\exists i\leq n$ 使 $x\in V_i^-$, $\exists y\in B$ 使 $V_i\subset V_y$，则 $x\in(V_y)^-$，矛盾. 令 $U_x=X-V_x^-$，则 U_x 是 x 的开邻域且, $V_x\cap U_x=\varnothing$，从而 $B\cap(U_x)^-=\varnothing$.

X 的覆盖$\{U_x \mid x\in A\}\cup\{A'\}$有局部有限开加细 $\mathcal{U}$，令 $\mathcal{U}_A=\{U\in\mathcal{U} \mid \exists x\in A$ 使 $U\subset U_x\}$, $U_A=\cup\mathcal{U}_A$，则 U_A 是 A 的开邻域且 $B\cap(U_A)^-=\varnothing$. 事实上, $\forall a\in A$, $\exists U\in\mathcal{U}$ 使 $a\in U$, $\exists x\in A$ 使 $U\subset U_x$，于是 $a\in U\subset U_A$. $\forall b\in B$，由局部有限性，有 b 的邻域 W_b 仅与 $\mathcal{U}_A$ 中有限个元，设为$\{U_j \mid j\leq m\}$，相交，如果 $b\in(U_A)^-$，则 $b\in(W_b\cap(\cup\mathcal{U}_A))^-\subset(\cup_{j\leq m} U_j)^-\subset\cup_{j\leq m} U_j^-$，于是$\exists j\leq m$ 使 $b\in U_j^-$, $\exists x\in A$ 使 $U_j\subset U_x$，则 $b\in(U_x)^-$，矛盾. 因而, U_A 与$(U_A)^{-\prime}$是 A, B 不交的开邻域，故 X 是正规空间.

书上证明了(定理 7.6.8), A_2, T_2, 局部紧致空间是仿紧致空间. 有两个更一般的结果: (1) Lindelöf 的正则空间是仿紧致空间; (2) 度量空间是仿紧致空间.