第29卷第4期 数 学 进 展 Vol.29, No.4
2000年8月 ADVANCES IN MATHEMATICS Aug., 2000

关于 Σ^*- 空间的一点注记

彭良雪 *
(首都师范大学数学系, 北京, 100037, 中国)
林寿
(福建师范大学数学系, 福州, 福建, 350007, 中国)

摘要 指出 $D_n \subset \cup\{E_m : m \in N\}$ 对 σ- 空间成立, 但对 Σ^*- 空间, 我们给出了一个例子说明它是不成立的. 因而 [5] 中的引理 3.2.13 是不对的. 这样 [3] 中的主要结论需要重新考虑.

关键词 Σ^*- 空间; 遗传闭包保持
MR(1991) 主题分类 54E18

1 引言

E. Michael 定义了空间类 $\Sigma^{\#}$- 空间, K. Okuyama 定义了空间类 Σ^*- 空间. 在 [1] 中讨论了 Σ^*- 空间. Σ^*- 空间在 Σ- 空间与 $\Sigma^{\#}$- 空间之间. 1985 年, Y. Tanaka 和 Y. Yajima 在 [2] 中得到 Σ- 空间的构成定理: 对每个 Σ- 空间满足下述条件 $(*)$.

$(*)$ 若 f 是从 X 到 Y 的闭满射, 那么在 Y 中存在一个 σ- 闭离散子集 Z, 使得对 $Y \setminus Z$ 中的每一点 y, 都有 $f^{-1}(y)$ 是 X 中的 w_1- 紧子集.

设 $\mathcal{K}$ 是 X 的覆盖, 若有覆盖 $\mathcal{A}$ 满足: 对每一个 $K \in \mathcal{K}$, 及含 K 的开集 U, 有 $A \in \mathcal{A}$, 使得 $K \subset A \subset U$, 我们称 $\mathcal{A}$ 为 X 的拟 (mod $\mathcal{K}$)- 网. 如果 X 有 σ- 遗传闭包保持 (简记为 HCP) 的闭拟 (mod $\mathcal{K}$)- 网, 其中 $\mathcal{K}$ 中的元都是 X 的可数紧子集, 则称 X 是 Σ^*- 空间 (参见 [1]). 人们自然想知道, 对于 Σ^*- 空间 X, 性质 $(*)$ 是否还成立.

若 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n : n \in N\}$ 是 X 的 σ-HCP 闭拟 (mod $\mathcal{K}$)- 网, 其中 $\mathcal{K}$ 是 X 的某由可数紧集构成的覆盖. 规定 $\mathcal{P}_n(x) = \{P : x \in P \in \mathcal{P}_n\}$, $E_m = \{x : \cap\mathcal{P}_m(x) = \{x\}\}$, $D_n = \{x : \mathcal{P}_n$ 在 x 不是点有限的$\}$.

在 [3] 中林寿证明了性质 $(*)$ 对 Σ^*- 空间也成立. 但是证明过程中用到结论 $D_n \subset \cup\{E_m : m \in N\}$. 本文给出一个例子, 说明对 σ-HCP 拟 (mod $\mathcal{K}$) 网来说, $D_n \subset \cup\{E_m : m \in N\}$ 并不一定成立. 因而 [5] 中 3.2.13 的证明是错误的, [3] 中的主要结果也应重新考虑.

本文中的空间都是 T_1 的. 2^X 是 X 的所有闭子集构成的族. 所有的映射都是连续的.

引理 1 如果 X 是 σ- 空间 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n : n \in N\}$ 是 X 的 σ-HCP 闭网, 且满足 $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{P}_{n+1}$, 则有 $D_n \subset \cup\{E_m : m \in N\}$.

证明 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的网. 因此若某个 $\mathcal{P}_m$ 在点 x 有 $1 \le |\cap\mathcal{P}_m(x)| < \omega$, 则有 $n \in N$, 使得 $|\cap\mathcal{P}_n(x)| = 1$. 因此我们只需证: 对任意 $x \in D_n$, 有 $m \in N$, $1 \le |\cap\mathcal{P}_m(x)| < \omega$. 假若对任意

收稿日期: 1998-10-30.
* 作者现在通讯地址: 北京工业大学应用数理学院, 北京, 10002.

$m\in N$, 有 $|\cap\mathcal{P}_m(x)|\geq\omega$, 则对 $m\geq n$, 可选取点 $x_m, x_m\in\cap\mathcal{P}_m(x)\backslash(\{x\}\cup\{x_i:n\leq i<m\})$ 及 $P_m\in\mathcal{P}_n(x)\backslash\{P_i:n\leq i<m\}$. 则 $x_m\in P_m$. 由 $\{P_m:m\geq n\}$ 的 HCP 性质知, $\{x_m:m\geq n\}$ 是 X 中的离散闭子集. 令 $V=X\backslash\{x_m:m\geq n\}$, 则 $x\in V$. 因此有 $m>n$, 及 $F\in\mathcal{P}_m$, 使 $x\in F\subset V$. 这样 $x_m\notin\cap\mathcal{P}_m(x)$. 矛盾.

在上述引理中 $D_n=\{x:|\mathcal{P}_n(x)|\geq\omega\}$. $E_m=\{x:x\in X,\cap\mathcal{P}_n(x)=\{x\}\}$.

引理 2 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_n:n\in N\}$ 是 X 的闭拟 (mod $\mathcal{K}$)- 网, 且 P_n 是 HCP 的, $\mathcal{P}_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$, 则 $D_n\subset\cup\{G_m:m\in N\}$, 其 $G_m=\{x\in X:1\leq|\cap\mathcal{P}_m(x)|<\omega\}$. $\mathcal{K}$ 中的元都是可数紧子集.

证明 假若有 $x\in D_n\backslash\cup\{G_m:m\in N\}$. 则 $|\mathcal{P}_n(x)|\geq\omega$, 且 $|\cap\mathcal{P}_m(x)|\geq\omega$. 这时对 $m\geq n$, 可取 $x_m\in\cap\mathcal{P}_m(x)\backslash(\{x\}\cup\{x_i:n\leq i<m\})$ 及 $P_m\in\mathcal{P}_n(x)\backslash\{P_i:n\leq i<m\}$. 则 $\{x_i:i\geq m\}$ 是离散闭集族. 有 $K\in\mathcal{K}$, 使得 $x\in K$. 因此有 $j\in N$, 当 $m>j$ 时, $x_m\notin K$. 令 $V=X\backslash\{x_i:i>j\}$, 则 $K\subset V$. 于是有 $m>\max\{n,j\}$, $P\in\mathcal{P}_m$, 使得 $K\subset P\subset V$. 这样 $x_m\notin P$. 因而 $x_m\notin\cap\mathcal{P}_m(x)$. 矛盾. 于是 $D_n\subset\cup\{G_m:m\in N\}$.

引理 3[2] 如果 $\mathcal{P}$ 是 X 的 HCP 子集族, 则 $\{P_1\cap P_2\cap\cdots\cap P_n;P_i\in\mathcal{P},i\leq n\}$ 也是 HCP 的, $n\in N$.

对空间 X 的集族 $\mathcal{P}$, 有如下关系 (I):

$$\{x:x\in X,|\cap\mathcal{P}(x)|<\omega\}$$

$$\subset\{x\in X:|\mathcal{P}(x)|\geq\omega\}\bigcup\bigcup_{i\in N}(\bigcup\{P_1\cap\cdots\cap P_i:P_k\in\mathcal{P},k\leq i\text{ 且 }|P_1\cap\cdots\cap P_i|<\omega\}).$$

推论 1 若 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_n:n\in N\}$ 是 X 的 σ-HCP 闭拟 (mod $\mathcal{K}$)- 网, 且 $P_n\subset\mathcal{P}_{n+1}$, $\mathcal{K}$ 是 X 的某可数紧集构成的覆盖, 则 $D=\bigcup_{n\in N}D_n$ 是 X 的 σ- 闭离散子集与 $G=\cup_{m\in N}G_m$ 是 X 的 σ- 闭离散子集等价.

此推论可由引理 2, 引理 3 及关系 (I) 得到.

由前面的引理可知, 对 σ-HCP 闭网来说 $D=\bigcup_{n\in N}D_n$ 是 σ- 离散子集. 对于 k- 空间来说每个 D_n 是离散的闭子集 (参见 [6]), 因而 D 是 σ- 离散的.

下面将给出一个例子, 说明对 σ-HCP 拟 (mod $\mathcal{K}$) 网 $D_n\subset\cup\{E_m:m\in N\}$ 不一定成立.

例 令 $X=N$, N 是自然数集. R 是实数直线, 拓扑是通常拓扑. 因而 X 是 R 的离散子空间. 令 $E=\{n:n\in N,\text{ 并且 }n\geq 3\}$. 把 E 表示成可数个两两不交子集的并, 即

$$E=\bigcup_{n\in N}A_n,\ A_n\subset E,\ A_n=\{x_i^n:i\in N\},$$

并且 $|A_n|=\omega, A_n\cap A_m=\emptyset,\ m\neq n$.

定义 $\mathcal{K}=\{\{1,2,\cdots,n\}:n\in N,\text{ 且 }n\geq 2\}$,

$$\mathcal{P}'_n=\{\{1,2,\cdots,n+1\}\}\cup\{\{1,2,\cdots,n+1\}\cup\{x_i^n\}:i\in N\}\cup\{\{x_i^n\}:i\in N\},\quad n\in N.$$

$$\mathcal{P}_n\quad\bigcup_{k=1}^n\mathcal{P}'_k\bigcup\{X\},\quad n\in N.$$

我们很容易知道 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_n:n\in N\}$ 是 X 的 σ-HCP 闭拟 (mod $\|$)- 网, 其中 $\mathcal{K}=\{\{1,2,\cdots,n\}:n\in N,n\geq 2\}$. 对 $n\in N,\{1,2\}\subset D_n$, 但 $\cup\{E_m:m\in N\}=E$, 而 $\{1,2\}\not\subset E$, 因此 $D_n\not\subset\cup\{E_m:m\in N\}$.

由上述例子知, 对 σ-HCP 拟 (mod $\mathcal{K}$) 网和给定的 $\mathcal{K}$ 及 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_n : n\in N\}$, $D_n\subset\cup\{E_m : m\in N\}$ 不一定成立. 因而 [5] 中引理 3.2.13 的证明是不正确的. [5] 中命题 3.2.14 及 3.2.20 的结论 ([3] 中的结果) 都需要重新考虑.

参考文献

1 Okugama, Akihiro. On a generalization of Σ-spaces. *Pacific J. of Math.*, 1972, 42 (2): 485–495.
2 Tanaka Y, Yajima Y. Decompositions for closed maps. *Topology Proc.*, 1985, 10: 399–411.
3 Lin Shou. A decomposition theorem for Σ^*-space. *Top. Proc.*, 16, 117–120.
4 Lin Shou. Spaces with σ-HCP pseudobases. *Northeastern Math. J.* (in Chinese), 1990, 6: 287–290.
5 林寿. 广义度量空间与映射. 中国科学出版社, 1995.
6 Tanaka Y. Decompositions of spaces determined by compact subsets. *Proc. AMS.* , 1986, 97: 549–555.

A Note for the Σ^*-Space

Peng Liangxue

(Dept. of Math., Capital Normal Univ., Beijing, P. R. China)

Lin Shou

(Dept. of Math., Fujian Normal Univ., Fuzhou, Fujian, 350007, P. R. China)

Abstract In the note, we point out that $D_n\subset\cup\{E_m : m\in N\}$ is true for σ-space, we give an example to show that it is not true for Σ^*-space. Thus the Lemma 3.2.13 appeared in [5] is false. As a result, the main conclusion of [3] should be considered again.

Key words Σ^*-space; σ-space; hereditarily closere-perserving