第42卷第1期
1999年1月

数学学报
ACTA MATHEMATICA SINICA

Vol.42, No. 1
Jan., 1999

序列网与度量空间的序列商映象
——献给高国士教授 80 寿辰

林 寿

(宁德师范高等专科学校数学系 福建 352100)

摘 要 本文定义了序列网的概念，建立了它与序列拟基、cs* 网之间的关系，获得了度量空间的确定商映象的一些新刻画.

关键词 序列空间， cs* 网，序列网，序列拟基，序列商映象， s 映射
MR(1991) 主题分类 54D55, 54E99, 54C10
中图分类 O189.1

Sequential Networks and the Sequentially Quotient Images of Metric Spaces

Lin Shou

(*Department of Mathematics, Ningde Teachers' College, Fujian* 352100, *P. R. China*)

Abstract In this paper the concept of sequential networks is introduced, the relations among that and the concepts of sequential quasi-bases and cs*-networks are established, and some new characterizations of the certain quotient images of metric spaces are obtained.

Keywords Sequential space, cs*-network, Sequential network, Sequential quasi-base, Sequentially quotient map, s-map
MR(1991) Subject Classification 54D55, 54E99, 54C10
Chinese Library Classification O189.1

1 定义

Arhangel'skii 在莫斯科拓扑学会议上曾提出问题 [1]: 是否每一具有权数 τ 的序列空间是某一具有权数 τ 的度量空间的商映象？ Svetlichny[1] 利用集论公理 $(MA+\neg CH)$ 否定了该问题，并由此引入了序列基 (本文重新定义为序列拟基，见定义 1.3) 的概念，证明了对于任意基数 τ, 空间 X 是具有权数 τ 的度量空间的商映象当且仅当 X 具有基数 τ 的序列基，给出了与 Arhangel'skii 问题相关的具有确定权数的度量空间商映象的内在特征. 由此可见，序列基的作用之一在于刻画度量空间的确定的商映象. 我们知道，度量空间的确定的商映象可以用具有特定性质的 cs* 网来刻画 [2]. 受此启发，我们推测序列基与 cs* 网这两个概念之间一定存在着某种必然的联系.

本文引入了序列网的概念，建立了它与序列基、cs* 网之间的较为精确的关系，证明了在一定条件下一个空间的序列基与 cs* 网是相互等价的，进而获得了具有确定权数的度量空间的序

收稿日期： 1997-06-10, 接受日期： 1998-05-05
国家自然科学基金及福建省自然科学基金资助项目

列商映象以及度量空间的序列商 s 映象的刻画，利用序列网的概念回答了 Arhangel'skii 提出的寻求确定权数的度量空间的商映象 [1] 以及度量空间的商 s 映象 [3] 的问题，深化了 Svetlichny[1] 和 Tanaka[2] 的已有结果.

为了叙述的简洁起见，我们约定：本文所论空间均满足 T_2 分离性公理，映射指连续的满函数. 对集合 X 中的一列点 x_n $(n \in N)$, $\langle x_n \rangle$ 表示 X 中的集合 $\{x_n : n \in N\}$; (x_n) 表示笛卡儿乘积 X^ω 中的一个第 n 个坐标为 x_n 的点；象通常一样 $\{x_n\}$ 表示 X 中的一个第 n 项为 x_n 的序列.

定义 1.1 对空间 X, 设 $P \subset X$. P 称为点 x 在 X 中的序列邻域 (sequential neighborhood), 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 那么存在 $k \in N$ 使得 $\{x\} \cup \{x_n : n \geq k\} \subset P$; P 称为 X 的序列开集 (sequential open set), 若 P 是 P 中每一点的序列邻域. 空间 X 称为序列空间 (sequential space)[4], 若 X 的每一序列开集是 X 的开集. 空间 X 称为 Fréchet 空间 (Fréchet space)[4], 若 X 中每一点的序列邻域是该点在 X 中的邻域.

易验证, 空间 X 的子集 P 是点 x 的序列邻域当且仅当 $x \in P$ 并且对 X 中任意收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$, P 含有序列 $\{x_n\}$ 的子序列；Fréchet 空间常用的等价定义是 [4]: 若 $x \in \mathrm{cl}(A) \subset X$, 则存在 A 中的序列在 X 中收敛于 x.

定义 1.2 对空间 X, 设空间 X 的子集族 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ 满足对每一 $x \in X$ 有 $x \in \cap\mathcal{P}_x$.

(1) $\mathcal{P}_x$ 称为点 x 在 X 中的网 (network), 若 G 是 x 在 X 中的邻域，那么存在 $P \subset \mathcal{P}_x$ 使得 $P \subset G$. $\mathcal{P}$ 称为 X 的网，若每一 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的网；

(2) $\mathcal{P}_x$ 称为点 x 在 X 中的 cs* 网 (cs*-network)[5], 若 G 是 x 在 X 中的邻域且 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 那么存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$ 和 $P \in \mathcal{P}_x$ 使得 $\langle x_{n_i} \rangle \subset P \subset G$. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs* 网，若每一 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的 cs* 网.

定义 1.3 对空间 X, 设空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 满足对每一 $x \in X$ 存在 $\mathcal{P}_x \subset \mathcal{P}^\omega$ 具有性质: 如果 $(P_n) \in \mathcal{P}_x$, 那么 $\langle P_n \rangle$ 是 x 在 X 中的下降的网. 简记为 $\mathcal{P} \approx \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的序列网 (sequential network), 如果 $P \subset X$ 且对任意的 $x \in P$ 及任意的 $(P_n) \in \mathcal{P}_x$ 存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$, 则 P 是 X 的序列开集；

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的序列拟基 (sequential quasi-base), 如果 $P \subset X$ 且对任意的 $x \in P$ 及任意的 $(P_n) \in \mathcal{P}_x$ 存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$, 则 P 是 X 的开集；

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 Fréchet 拟基 (Fréchet quasi-base), 如果 $x \in P \subset X$ 且对任意的 $(P_n) \in \mathcal{P}_x$ 存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$, 则 P 是 x 在 X 中的邻域.

我们之所以将满足条件 (1) 的集族定义为序列网是因为对任意的空间 X、X 的收敛序列的全体组成的集族构成了 X 的网且满足条件 (1). 序列拟基在文 [1] 中称之为序列基，由于 $\mathcal{P}$ 的元一般不是 X 的开集，所以我们改称 "拟基" 而不用 "基". Fréchet 拟基是仿照序列拟基及 Fréchet 空间命名的. 事实上，序列拟基与 Fréchet 拟基的概念都源于 Sirois-Dumais[6] 定义的弱拟第一可数空间 (weakly-quasi-first-countable space) 与拟第一可数空间 (quasi-first-countable space). 沿用定义 1.3 的术语与记号，设 $\mathcal{P} \approx \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$, Sirois-Dumais 称空间 X 是弱拟第一可数的 (拟第一可数的), 如果 X 具有序列拟基 (Fréchet 拟基) $\mathcal{P}$ 使得每一 $\mathcal{P}_x$ 是可数的. 定义这两类空间的目的是作为第一可数空间的推广将它们表为度量空间的确定的商映象.

定义 1.4 设映射 $f : X \to Y$.

(1) f 称为 s 映射 (s-map), 如果对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的具有可数基的子空间；

(2) f 称为序列商映射 (sequential quotient map)[7], 如果 $R \subset Y$ 且 $f^{-1}(R)$ 是 X 的序列开集, 则 R 是 Y 的序列开集.

2 序列网与 cs* 网

我们先建立定义 1.3 中的几个概念之间的简单联系. 显然, 对空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ 是 X 的第一可数基 $\Rightarrow$ $\mathcal{R}$ 是 X 的 Fréchet 拟基 $\Rightarrow$ $\mathcal{P}$ 是 X 的序列拟基 $\Rightarrow$ $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网.

引理 2.1 对空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$. 设 $\mathcal{P} \approx \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$, 那么 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网当且仅当如果 $x \in P \subset X$ 且对任意的 $(P_n) \in \mathcal{P}_x$ 存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$, 则 P 是 x 在 X 中的序列邻域.

证明 只须证必要性. 设 $\mathcal{P} \approx \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ 是 X 的序列网. 如果 $x \in P \subset X$ 且对任意的 $(P_n) \in \mathcal{P}_x$ 存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$, 往证 P 是 x 在 X 中的序列邻域. 设 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 如果存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_i}\}$ 使得所有的 $x_{n_i} \notin P$. 让 $Q = X \backslash \langle x_{n_i} \rangle$, 则易验证对任意的点 $z \in Q$ 及任意的 $(P_n) \in \mathcal{P}_z$ 存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset Q$, 于是 Q 是 X 的序列开集, 这与 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 $x \in Q$ 相矛盾. 因此, 存在 $\{x_n\}$ 的子序列含于 P 中, 从而 P 是 x 的序列邻域.

引理 2.2 (1) 空间 X 是序列空间当且仅当 X 具有序列拟基;

(2) 空间 X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 具有 Fréchet 拟基.

证明 (1) 已由文 [1] 命题 2.2 所证, 我们证明 (2) 成立. 设 X 是一个 Fréchet 空间, 让 $\mathcal{P}$ 是 X 的所有收敛序列组成的集族, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的 Fréchet 拟基. 反之, 设 $\mathcal{P} \approx \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ 是 X 的 Fréchet 拟基. 如果 X 的子集 P 是点 x 在 X 中的序列邻域, 对任意的 $(P_n) \in \mathcal{P}_x$, 若存在 X 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in P_n \backslash P$. 因为 $\langle P_n \rangle$ 是 x 在 X 中的网, 所以序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 这与 P 是 x 的序列邻域相矛盾, 因而存在 $m \in N$ 使得 $P_m \subset P$, 于是 P 是 x 的邻域, 故 X 是 Fréchet 空间.

推论 2.3 (1) $\mathcal{P}$ 是空间 X 的序列拟基当且仅当 X 是序列空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网;

(2) $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 Fréchet 拟基当且仅当 X 是 Fréchet 空间且 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网.

其次, 我们着重讨论序列网与 cs* 网之间的较为精细的联系.

定理 2.4 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的序列网, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs* 网.

证明 让 $\mathcal{P} \approx \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ 是空间 X 的序列网. 设 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x 且 G 是 x 在 X 中的开邻域, 因为 $\mathcal{P}$ 是 X 的网, 不妨设所有的 $x_n \neq x$. 置 $H = G \backslash \langle x_n \rangle$, 则 H 不是 x 在 X 中的序列邻域. 由引理 2.1, 存在 $(P_n) \in \mathcal{P}_x$ 使得对于任意的 $n \in N$ 有 $P_n \not\subset H$, 并且存在 $m_0 \in N$ 使得 $P_{m_0} \subset G$. 对于每一 $k \geq m_0$, 记 $Q_k = P_k \cap \langle x_n \rangle$, 那么 $Q_k \neq \phi$. 若有 $k_0 \geq m_0$ 使得 Q_{k_0} 是一有限集, 则存在 $m_1 > k_0$ 使得 $P_{m_1} \subset X \backslash Q_{k_0}$, 于是 $Q_{m_1} = \phi$. 矛盾. 从而当 $k \geq m_0$ 时, Q_k 为无限集. 因此, P_{m_0} 含有 $\{x_n\}$ 的子序列且 $P_{m_0} \subset G$, 故 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs* 网.

定理 2.4 引出的问题是: 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的 cs* 网, 那么 $\mathcal{P}$ 是否是 X 的序列网? 该问题的回答是否定的.

定理 2.5 空间 X 是第一可数空间当且仅当若 $\mathcal{P}$ 是 X 的关于有限交封闭的 cs* 网, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网.

证明 设 X 是一个第一可数空间. 对每一 $x \in X$, 设 x 在 X 中的下降的可数局部基为

$\langle V_{x,n}\rangle$, 置

$$\mathcal{P}_x=\{(P_n)\in\mathcal{P}^\omega: x\in P_{n+1}\subset P_n\subset V_{x,n}\},$$

则 $\mathcal{P}_x\neq\phi$ 且对任意的 $(P_n)\in\mathcal{P}_x$, $\langle P_n\rangle$ 是点 x 在 X 中的下降的网, 往证 $\mathcal{P}\approx\cup\{\mathcal{P}_x: x\in X\}$ 是 X 的序列网. 如果 $x\in P\subset X$ 且对任意的 $(P_n)\in\mathcal{P}_x$ 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 设 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 不妨设所有的 $x_n\neq x$ 且 $\langle x_n\rangle\subset V_{x,1}$. 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs* 网, 存在 $Q_1\in\mathcal{P}$ 和 $\langle x_n\rangle$ 的无限子集 S_1 使得 $\mathrm{cl}(S_1)\subset Q_1\cap V_{x,2}\subset V_{x,1}$, 于是又存在 $Q_2\in\mathcal{P}$ 和 S_1 的无限子集 S_2 使得 $\mathrm{cl}(S_2)\subset Q_2\cap V_{x,3}\subset V_{x,2},\cdots$. 因此, 我们可归纳地构造 $\langle x_n\rangle$ 的无限子集列 $\{S_n\}$ 以及 $(Q_n)\in\mathcal{P}^\omega$ 使得对每一 $n\in N$ 有

$$\mathrm{cl}(S_{n+1})\subset\mathrm{cl}(S_n)\subset Q_n\cap V_{x,n+1}\subset V_{x,n}.$$

令 $P_n=\cap_{i\le n}Q_i$, 则 $(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 那么存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 从而 $\mathrm{cl}(S_m)\subset P$, 所以 P 是点 x 在 X 中的序列邻域. 由引理 2.1, $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网.

反之, 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的一个关于有限交封闭的基, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs* 网, 于是 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网. 由定义 1.3, X 的每一点具有可数的局部基, 所以 X 是第一可数空间.

设 X 是任意的非第一可数的拓扑空间. 由定理 2.5, X 的拓扑是 X 的 cs* 网, 但它不是 X 的序列网. 定理 2.5 中的集族 $\mathcal{P}$ 带有一定的任意性, 它对于在非第一可数空间中判别一个确定的 cs* 网是否是序列网将无任何帮助. 一个空间的怎样的 cs* 网是序列网？下述定理对此给出部分的回答.

空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为点可数的 (point-countable), 如果对于每一 $x\in X$, $\{P\in\mathcal{P}: x\in P\}$ 是可数的.

定理 2.6 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数的 cs* 网, 则 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网.

证明 对于每一 $x\in X$, 置 $\mathcal{P}_x=\{(P_n)\in\mathcal{P}^\omega: \langle P_n\rangle$ 是点 x 在 X 中的下降的网 $\}$, 则 $\mathcal{P}_x\neq\phi$. 设 $x\in P\subset X$, 如果对任意的 $(P_n)\in\mathcal{P}_x$ 存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$, 往证 P 是 x 在 X 中的序列邻域. 设 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x, 不妨设所有的 $x_n\neq x$. 由文 [8] 引理 2.7.4, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集列 $\{\mathcal{P}_n\}$ 满足:

(1) 对每一 $n\in N$, $\langle x_n\rangle\subset\cup\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{P}_n$;

(2) 若 $x\in P_n\in\mathcal{P}_n$, 则 $\langle P_n\rangle$ 是 x 在 X 中的网;

(3) 对某一 $P'_k\in\mathcal{P}_k$, 若 P' 含有 $\{x_n\}$ 的子序列, 则 $x\in P'$.

记 $\mathcal{P}'_n=\{P'\in\mathcal{P}_n: P'$ 含有 $\{x_n\}$ 的子序列 $\}$, 那么 $\mathcal{P}'_n$ 非空且 $\mathcal{P}'_{n+1}$ 加细 $\mathcal{P}'_n$. 由文 [9] 引理 37.4 (König 引理), 对每一 $n\in N$ 存在 $P_n\in\mathcal{P}'_n$ 使得 $P_{n+1}\subset P_n$. 这时 $x\in P_n$, 从而 $(P_n)\in\mathcal{P}_x$, 于是存在 $m\in N$ 使得 $P_m\subset P$. 故存在 $\{x_n\}$ 的子序列含于 P 中, 所以 P 是 x 的序列邻域. 由引理 2.1, $\mathcal{P}$ 是 X 的序列网.

3 度量空间的映象

本节我们利用第一节中引进的新概念给出度量空间的确定商映象的一些新刻画, 特别地, 我们借助序列网刻画了度量空间的序列商映象以及序列商 s 映象.

引理 3.1 设 $f: X\to Y$ 是序列商映射. 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的序列网, 则 $f(\mathcal{P})$ 是空间 Y 的序列网.

证明 设 $\mathcal{P} \approx \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$. 对每一 $y \in Y$, 记 $\mathcal{R}_y = \{(f(P_n)) : (P_n) \in \mathcal{P}_x, x \in f^{-1}(y)\}$, 则 $\mathcal{R}_y \in f(\mathcal{P})^\omega$. 由于 f 的连续性，如果 $\langle P_n \rangle$ 是点 x 在 X 中的下降的网，则 $\langle f(P_n) \rangle$ 是点 $f(x)$ 在 Y 中的下降的网. 设 $R \subset Y$ 且对任意的 $y \in R$ 及任意的 $(R_n) \in \mathcal{R}_y$ 存在 $m \in N$ 使得 $R_m \subset R$, 那么对任意的 $x \in f^{-1}(R)$ 及任意的 $(P_n) \in \mathcal{P}_x$, 有 $f(x) \in R$ 且 $(f(P_n)) \in \mathcal{R}_{f(x)}$, 所以存在 $m \in N$ 使得 $f(P_m) \subset R$, 于是 $P_m \subset f^{-1}(R)$, 因而 $f^{-1}(R)$ 是 X 的序列开集. 因为 f 是序列商映射，故 R 是 Y 的序列开集，所以 $f(\mathcal{P})$ 是 Y 的序列网.

引理 3.2 ([8], 命题 2.1.16 和命题 2.1.17) 设映射 $f : X \to Y$.

(1) 若 Y 是序列空间且 f 是序列商映射，则 f 是商映射；

(2) 若 X 是序列空间且 f 是商映射，则 f 是序列商映射；

(3) 若 X 是度量空间且 f 是闭映射，则 f 是序列商映射.

定理 3.3 对任意基数 τ 及任意空间 X, X 具有基数 τ 的序列网当且仅当 X 是具有权数 τ 的度量空间的序列商映象.

证明 由引理 3.1, 只须证必要性. 不妨设 $\tau \geq \omega$. 设 $\mathcal{P} \approx \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ 是空间 X 的基数为 τ 的序列网. 对每一 $x \in X$, 记 $\mathcal{R}_x = \{(R_n) \in \mathcal{P}^\omega$: 存在 $(P_n) \in \mathcal{P}_x$ 和 $i \in N$ 使得当 $n \geq i$ 时 $R_n = P_n$ 且 $\{x\} = \cap_{n<i} R_n\}$. 再记 $\mathcal{P} = \{P_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. 对每一 $n \in N$. 让 Λ_n 是集合 Λ 赋予离散拓扑的空间. 定义

$$M = \left\{\beta = (\alpha_n) \in \prod_{n \in N} \Lambda_n : \text{ 存在 } x(\beta) \in X \text{ 使得 } (P_{\alpha_n}) \in \mathcal{R}_{x(\beta)}\right\}.$$

则 M 是权数不超过 τ 的度量空间，并且对于每一 $\beta \in M$, $x(\beta)$ 是唯一确定的，于是可以定义函数 $f : M \to X$ 使得 $f(\beta) = x(\beta)$. 显然， f 是满函数. 设 P 是 X 的开集并且 $f((\alpha_n)) \in P$, 那么存在 $m \in N$ 使得 $P_{\alpha_m} \subset P$. 置

$$\Gamma = \{\beta \in M : \beta \text{ 的第 } m \text{ 个坐标是 } \alpha_m\}.$$

则 Γ 是 M 的开集， $(\alpha_n) \in \Gamma$ 且 $f(\Gamma) \subset P_{\alpha_m} \subset P$, 于是 f 是连续函数. 如果 $P \subset X$ 且 $f^{-1}(P)$ 是 M 的序列开集，对任意的 $x \in P$ 及任意的 $(P_{\alpha_n}) \in \mathcal{P}_x$, 有 $(\alpha_n) \in f^{-1}(P)$. 因为 $f^{-1}(P)$ 是 M 的开集，存在 $\prod_{n \in N} \Lambda_n$ 的基本开集 $\prod_{n \in N} \Gamma_n$ 使得 $(\alpha_n) \in M \cap \prod_{n \in N} \Gamma_n \subset f^{-1}(P)$. 不妨设当 $n \leq m$ 时 $\Gamma_n = \{\alpha_n\}$, 当 $n > m$ 时 $\Gamma_n = \Lambda_n$. 对于 $y \in P_{\alpha_m}$, 取定 $(P_{\gamma_n}) \in \mathcal{P}_y$, 定义 $\gamma = (\widetilde{\gamma}_n) \in \prod_{n \in N} \Lambda_n$ 使得当 $n \leq m$ 时 $\widetilde{\gamma}_n = \alpha_n$, 当 $n > m$ 时 $\widetilde{\gamma}_n = \gamma_n$, 那么 $(P_{\widetilde{\gamma}_n}) \in \mathcal{R}_y$, 从而 $\gamma \in M \cap \prod_{n \in N} \Gamma_n$, 于是 $y = f(\gamma)$, 故 $P_{\alpha_m} \subset f\left(M \cap \prod_{n \in N} \Gamma_n\right) \subset P$, 所以 P 是 X 的序列开集，因此 f 是序列商映射.

以上我们证明了 X 是权数不超过 τ 的度量空间 M 的序列商映象，从而 X 也是与 M 同胚的 τ 个空间的拓扑和的序列商的映象，故 X 是权数 τ 的度量空间的序列商的映象.

推论 3.4[1] 对任意基数 τ 及任意空间 X, X 具有基数 τ 的序列拟基当且仅当 X 是具有权数 τ 的度量空间的商映象.

由定理 2.6 、定理 2.4 及文 [8] 的定理 2.7.5 有：

定理 3.5 对空间 X, 下述条件相互等价：

(1) X 具有点可数的序列网；

(2) X 具有点可数的 cs* 网；

(3) X 是度量空间的序列商 s 映象.

由定理 3.5 、引理 2.2 及文 [8] 的推论 2.7.6 有下述两个推论:

推论 3.6 空间 X 具有点可数的序列拟基当且仅当 X 是度量空间的商 s 映象.

推论 3.7 空间 X 具有点可数的 Fréchet 拟基当且仅当 X 是度量空间的伪开 s 映象.

定理 3.8 正则空间 X 具有 σ 遗传闭包保持的 Fréchet 拟基当且仅当 X 是度量空间的闭映象.

证明 由引理 2.2 、定理 2.4, 具有 σ 遗传闭包保持 Fréchet 拟基的空间是具有 σ 遗传闭包保持 cs* 网的 Fréchet 空间. 再由文 [8] 定理 2.5.7 (Foged 定理), 具有 σ 遗传闭包保持 cs* 网的正则的 Fréchet 空间是度量空间的闭映象. 反之, 设存在度量空间 M 和闭映射 $f: M \to X$. 显然, X 是正则的 Fréchet 空间. 让 $\mathcal{P}$ 是 M 的 σ 局部有限基, 则 $\mathcal{P}$ 是 M 的序列网且 $f(\mathcal{P})$ 是 X 的 σ 遗传闭包保持集族. 由引理 3.1 、引理 3.2 和推论 2.3, $f(\mathcal{P})$ 是 X 的 σ 遗传闭包保持的 Fréchet 拟基.

定理 3.9 正则空间 X 具有 σ 局部有限的 Fréchet 拟基当且仅当 X 是度量空间的闭 s 映象.

证明 由文 [8] 的定理 2.7.23, 度量空间的闭 s 映象等价于具有 σ 局部有限 cs* 网的正则的 Fréchet 空间. 由定理 2.4 、定理 2.6 及推论 2.3 知具有 σ 局部有限 cs* 网的 Fréchet 空间等价于具有 σ 局部有限 Fréchet 拟基的空间.

参 考 文 献

1 Svetlichny S A. Some classes of sequential spaces. Bull Austral Math Soc, 1993, 47(2): 377–384
2 Tanaka Y. Point-countable covers and k-networks. Topology Proc, 1987, 12(2): 323–349
3 Arhangel'skii A. Mappings and spaces. Russian Math Surveys, 1966, 21(4): 115–162
4 Franklin S P. Spaces in which sequences suffice. Fund Math, 1965, 57(1): 107–115
5 Gao Zhimin (高智民). $\aleph$-space is invariant under perfect mappings. Questions Answers in General Topology, 1987, 5(2): 271–279
6 Sirois-Dumais R. Quasi- and weakly-quasi-first-countable spaces. Topology Appl, 1980, 11(3): 223–230
7 Boone J, Siwiec F. Sequentially quotient mappings. Czech Math J, 1976, 26(1): 174–182
8 林寿. 广义度量空间与映射. 北京: 科学出版社, 1995
9 儿玉之宏, 永见启应 (方嘉琳译). 拓扑空间论. 北京: 科学出版社, 1984