总31卷 第2期 数学研究 Vol. 31 No. 2
1998年6月 Journal of Mathematical Study Jun. 1998

乘积空间的 k 空间性质(Ⅱ)①

林 寿
(福建宁德师范高等专科学校数学系,宁德 352100)

摘 要 证明集合论假设 $\neg BF(\omega_2)$ 下,如果 X,Y 都是具有紧可数 k 网的正则空间,那么 $X\times Y$ 是 k 空间当且仅当空间对 (X,Y) 满足 Tanaka 条件.

关键词 $BF(\omega_2)$,k 空间,紧可数集族,Tanaka 条件

拓扑空间 X 称为 k 空间,如果 $A\subset X$ 使得对于 X 的每一紧子集 K 有 $K\cap A$ 是 K 的闭子集. 则 A 是 X 的闭子集. 由于两个 k 空间的乘积空间未必是 k 空间,E. Michael[1]曾提出寻求使得两个正则的 k 空间的乘积空间是 k 空间的充分且必要条件的问题. Michael 问题的研究成果是极为丰富的,但尚有一遗留问题[2]:设 X,Y 都是具有紧可数 k 网的正则空间,若 $X\times Y$ 是 k 空间,那么空间对 (X,Y) 是否满足 Tanaka 条件? 我们知道,集论假设 $BF(\omega_2)$ 成立当且仅当 $S_\omega\times S_{\omega_1}$ 是 k 空间[3],而正则空间 S_ω 和 S_{ω_1} 都具有紧可数 k 网且空间对 (S_ω,S_{ω_1}) 不满足 Tanaka 条件. 本文将证明若否定 $BF(\omega_2)$,即 $\neg BF(\omega_2)$,那么两个具有紧可数 k 网的正则空间之积空间是 k 空间的充要条件是它们满足 Tanaka 条件.

本文所论空间均满足正则且 T_1 分离性公理,未定义的记号及术语以著作[4]为准,先回忆几个概念. 让 ${}^\omega\omega$ 表示所有从 ω 映入 ω 的函数之集合,对于 $f,g\in{}^\omega\omega$,若 $\{n\in\omega: f(n)>g(n)\}$ 是有限集,则定义为 $f\leq g$. $BF(\omega_2)$ 是断言:如果 ${}^\omega\omega$ 的子集 F 的基数小于 ω_2,则存在 $g\in{}^\omega\omega$ 使得对于所有 $f\in F$ 有 $f\leq g$. 我们知道"$CH\Rightarrow BF(\omega_2)$"[3]. 将 ω 个(ω_1 个)非平凡收敛序列的拓扑和空间中的极限点贴成一点得到的商空间称为扇空间,记为 $S_\omega(S_{\omega_1})$[4,例 1.8.7].

定义 [4,定义 3.8.18]空间列 $\{X_i\}$ 称满足 Tanaka 条件,如果 $\{X_i\}$ 满足下述条件之一:

(1) 所有 X_i 都是第一可数空间.

(2) 所有 X_i 都是 k 空间,并且至多有限个 X_i 不是紧空间,至多一个 X_i 不是局部紧空间.

(3) 所有 X_i 都是局部 K_ω 空间,并且至多有限个 X_i 不是紧空间.

特殊的情形是两个空间作为一组满足 Tanaka 条件. 若空间列 $\{X_i\}$ 满足 Tanaka 条件,则 $\Pi_{i\in N}X_i$ 是 k 空间[4].

引理 1[3] $\neg BF(\omega_2)$ 当且仅当 $S_\omega\times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间.

引理 2[5] ($\neg BF(\omega_2)$)设 $S_\omega\times X$ 是 k 空间. 若 X 具有紧可数 k 网,则 X 是局部 K_ω 空间.

引理 3[6] 设 X 是具有点可数 k 网的 k 空间. 若 X 不含有闭子空间同胚于 S_2 或 S_ω,则 X 是第一可数空间.

① 本文于 1997-09-08 收到; 福建省自然科学基金资助课题,国家自然科学基金资助课题

引理4　设$S_\omega \times Z$是k空间,则Z的每一第一可数点具有可数紧的邻域.

证明　记$S_\omega = \{x_0\} \cup (\bigcup_{n\in N} T_n)$,其中$x_0 \notin \bigcup_{n\in N} T_n$,可数无限集$T_n$两两互不相交,且每一$T_n$作为序列收敛于$x_0$.置

$$T_n = \{x_{nm} : m \in N\}, n \in N, Y = \{x_0\} \cup (\bigcup_{n\in N} T_n \times \{n\}).$$

集合Y赋予如下拓扑:$Y \setminus \{x_0\}$中的点是Y的孤立点,x_0在Y中的邻域基元形如$\{x_0\} \cup (\bigcup_{n\geq i} T_n \times \{n\})(\forall i \in N)$.那么$Y$是具有可数基的正则空间,于是$Y$是度量空间,令$A = \{(x,(x,n)) \in S_\omega \times Y : x \in T_n$且$n \in N\}$,则$A \subset S_\omega \times Y$且$(x_0, x_0) \in \overline{A} \setminus A$,从而$A$不是$S_\omega \times Y$的闭子集.另一方面,对于$S_\omega \times Y$的任意非空紧子集$K$,存在$S_\omega$和$Y$的非空紧子集$K_1$与$K_2$使得$K \subset K_1 \times K_2$.由$S_\omega$的定义知对于每一$n \in N$,若$t_n \in T_n$,则$\{t_n : n \in N\}$是$S_\omega$的闭离散子集,从$K_1$的紧性知存在$i \in N$使得$K_1 \cap (\bigcup_{n\geq i} T_n) = \varnothing$.记$B = (K_1 \times K_2) \cap A$.对于任意的$a \in K_1 \times K_2 \setminus B$,我们断言存在点$a$在$S_\omega \times Y$中的开邻域$V$使得$V \cap B = \varnothing$.事实上,设$a = (a_1, a_2)$.若$a_2 = x_0$,令$V_1 = S_\omega \times (\{x_0\} \cup (\bigcup_{n\geq i} T_n \times \{n\}))$,则$V_1$是点$a$在$S_\omega \times Y$中的开邻域,如果存在$b = (b_1, b_2) \in V_1 \cap B$,从$b_1 \in K_1$知存在$i_0 < i$使得$b_1 \in T_{i_0}$,再从$b \in A \cap V_1$知$b_2 = (b_1, i_0) \in (\bigcup_{n\geq i} T_n \times \{n\}))$,于是$i_0 \geq i$,矛盾,所以$V_1 \cap B = \varnothing$;若$a_2 \neq x_0$且$a_1 \neq x_0$,令$V_2 = \{a\}$,则$V_2$是点$a$在$S_\omega \times Y$中的开邻域,显然有$V_2 \cap B = \varnothing$;若$a_2 \neq x_0$且$a_1 = x_0$,设$a_2 = (x_{nm}, n) \in T_n \times \{n\}$,令$V_3 = (S_\omega \setminus \{x_{nm}\}) \times \{a_2\}$,则$V_3$是点$a$在$S_\omega \times Y$中的开邻域,如果存在$c = (c_1, c_2) \in V_3 \cap B$,则$c_2 = a_2$,从$c \in A \cap V_3$知$c_1 = x_{nm} \in S_\omega \setminus \{x_{nm}\}$,矛盾,所以$V_3 \cap B = \varnothing$.因此,$B$是$K_1 \times K_2$的闭子集.从而$K \cap A$是$K$的闭子集.这说明了$S_\omega \times Y$不是$k$空间.

现在,设z_0是空间Z的第一可数点,若z_0不具有可数紧的邻域,则存在z_0在Z中的可数邻域基$\{U_k : k \in N\}$使得每一$\overline{U}_k$不是Z的可数紧的子空间,那么存在$\{k\}$的子序列$\{k_n\}$及Z的无限可数闭离散子空间列$\{C_n\}$使得每一$C_n \subset \overline{U}_{k_n} \setminus \{z_0\}$且$\{C_n\}$中的元是两两互不相交的.令$Z_0 = \{z_0\} \cup (\bigcup_{n\in N} C_n)$,则$z_0$是$Z$的闭子空间且同胚于上面构造的空间$Y$,于是$S_\omega \times Z$不是$k$空间,矛盾.故$Z$在$Z_0$具有可数紧的邻域.

定理5[4]　具有点可数k网的可数紧的k空间是紧可度量空间.

本文的主要结果是

定理　$(\neg BF(\omega_2))$设空间X, Y都具有紧可数k网.若$X \times Y$是k空间,则空间对(X, Y)满足Tanaka条件.

证明　我们依次讨论空间X, Y是否含有闭子空间同胚于S_2或S_ω.

(1)　如果X, Y都含有闭子空间同胚于S_2或S_ω,由于S_ω是S_2的完备映象[4,例2.9.26],所以$S_\omega \times X$和$S_\omega \times Y$都是k空间,再由引理2知X, Y都是局部K_ω空间.

(2)　如果X含有闭子空间同胚于S_2或S_ω,而Y不含有闭子空间同胚于S_2和S_ω,那么$S_\omega \times Y$是k空间且由引理3知Y是第一可数空间.再由引理4和引理5知Y是局部紧空间,同理可证,如果Y含有闭子空间同胚于S_2或S_ω,而X不含有闭子空间同胚于S_2和S_ω,那么X是局部紧空间.

(3)　如果X, Y都不含有闭子空间同胚于S_2和S_ω,由引理3知X, Y都是第一可数空间.综上所述,空间对(X, Y)满足Tanaka条件.

推论　下述条件相互等价:

(1)　$\neg BF(\omega_2)$.

(2) 设$\{X_i\}$是具有紧可数 k 网的空间列，若 $\Pi_{i\in N}X_i$ 是 k 空间，则$\{X_i\}$满足 Tanaka 条件.

(3) 设$\{X_i\}$是具有紧可数 k 网的 g 第一可数的空间列，若 $\Pi_{i\in N}X_i$ 是 k 空间，则$\{X_i\}$满足 Tanaka 条件.

证明 (1)⇒(2). 设具有紧可数 k 网的空间列$\{X_i\}$使得 $\Pi_{i\in N}X_i$ 是 k 空间，因为$(S_2)^\omega$ 和$(S_\omega)^\omega$ 都不是 k 空间[4, 定理 3.8.20]. 所以仅有至多有限多个 X_i 含有闭子空间同胚于 S_2 或 S_ω，由引理 3 知存在 $n\in N$ 使得 $\Pi_{i\geq N}X_i$ 是第一可数空间，再由定理不难验证，$\{X_i\}$满足 Tanaka 条件.

(2)⇒(3). 显然.

(3)⇒(1). S_2 是具有可数 k 网的 g 第一可数空间，让 X 是文[4, 例 2.9.27]的空间 X，则 X 是具有紧可数 k 网的 g 第一可数空间且存在完备映射 $g: X\to Y$ 使得 Y 含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 由于 X 不是局部 K_ω 空间，所以空间对(S_2, X)不满足 Tanaka 条件，从而 $S_\omega\times X$ 不是 k 空间，因此 $S_\omega\times S_{\omega_1}$ 不是 k 空间，由引理 1，$BF(\omega_2)$不真.

作者对本文的审稿人指出原稿引理 4 中论证“$S_\omega\times Y$ 不是 k 空间”的一处失误表示衷心的感谢.

参 考 文 献

1 Michael E. On k-spaces, k_R-spaces and $k(X)$. Pacific J Math, 1973, 47: 487～498

2 Liu Chuan, Tanaka Y. Spaces with certain compact-countable k-networks, and questions. Questions Answers in General Topology, 1996, 14: 15～38

3 Gruenhage G. k-spaces and products of closed images of metric spaces. Proc Amer Math Soc, 1980, 80: 478～482

4 林 寿. 广义度量空间与映射. 北京：科学出版社，1995

5 Liu Chuan, Lin Shou. k-spaces property of product spaces. Acta Math Sinica, 1997, 13(4): 537～554

6 Lin Shou. A note on the Arens'space and the sequential fan, Topology Appl, 1997, 81: 185～196

k-spaces Property of Product Spaces (Ⅱ)

Lin Shou

(Department of Mathematics, Ningde Teachers' College, Ningde 352100)

Abstract In this paper it is shown that under set theoretic hypothesis $\neg BF(\omega_2)$ if X, Y are regular spaces with compact-countable k-networks, then $X\times Y$ is a k-space if and only if the (X, Y) satisfies the Tanaka's condition.

Key words $BF(\omega_2)$, k-space, compact-countable family, Tanaka's condition