第 27 卷 第 2 期
1998 年 4 月

数 学 进 展
ADVANCES IN MATHEMATICS

Vol. 27, No. 2
April, 1998

关于三商映射

林寿

(宁德师范高等专科学校数学系,宁德,福建,352100,中国)

摘要 三商映射是完备映射和开映射的共同推广. 本文综述三商映射的理论,论述三商映射,开映射,紧覆盖映射,诱导完备映射之间的一些转换关系,提出了几个供进一步研究的问题.

关键词 三商映射;开映射;紧覆盖映射;诱导完备映射;Čech 完备空间;Sieve 完备空间;单调 p 空间;Partition 完备空间

MR(1991) 主题分类 54C10;54E50

1 引言

众所周知,完备映射保持完备度量空间. 完备度量空间在开映射或紧覆盖映射下也具有较好的行为. 例如,

定理 1.1[1] 设 $f: X \to Y$ 是开映射. 若 X 是完备度量空间,Y 是度量空间,那么 Y 是完备度量空间.

定理 1.2[2] 设 $f: X \to Y$ 是紧覆盖映射. 若 X 是可分的完备度量空间,Y 是度量空间,那么 Y 是完备度量空间.

Michael[3]引进了三商映射,并且发表了系列论文以研究完备度量空间在三商映射下的行为[4-9],提出了一些相关问题. 对这些问题的探讨构成了映射理论的热点[7]. 近年来的研究表明三商映射具有开映射的许多优良性质且与紧覆盖映射、诱导完备映射密切相关,在映射理论中独树一帜. 本文综述三商映射的理论及 Michael 问题的研究进展.

本文所有空间是 T_2 的拓扑空间,映射指连续的满函数.

2 完备性与完备映射、开映射

本节介绍拓扑空间中的一些完备性概念. 我们知道空间 X 是完备度量空间当且仅当它是 Čech 完备的度量空间[10]. 与 Čech 完备性相关的完备性质有 Sieve 完备性[3]和 Partition 完备性[11]. 如果考虑覆盖族的单调性质,Sieve 完备空间可重新定义为单调 Čech 完备空间[12],相应地产生了单调 p 空间[12]. 它们之间的关系如下图:

收稿日期:1997-03-13.
国家自然科学基金资助课题.

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Čech 完备空间} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{Sieve 完备空间} \arrow[d, Leftrightarrow] & & p\text{ 空间} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{单调 Čech 完备空间} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & \text{单调 } p\text{ 空间} \\
\text{Partition 完备空间} & &
\end{tikzcd}
$$

定理 2.1[11] 空间 X 是 Sieve 完备空间当且仅当 X 是 partition 完备的单调 p 空间.

定理 2.2[3,12] Sieve 完备的仿紧空间是 Čech 完备空间.

定理 2.3[12] 单调 p 的 θ 加细空间是 p 空间.

定理 2.4 完备映射保持 Čech 完备性[10], Sieve 完备性[12],单调 p 性质[12]及 Partition 完备性[11].

定理 2.5 开映射保持 Sieve 完备性[3], Partition 完备性[11].

定理 2.6 开映射不保持 Čech 完备性[3], 单调 p 性质[13].

存在开的 Sieve 完备映射 $f: X \to Y$ 使得 X 是度量空间, Y 是 Michael 直线. 这时 Y 不是单调 p 空间[13].

3 三商映射

定义 3.1[3] 映射 $f: X \to Y$ 称为三商映射, 如果对 X 的每一开集 U, 对应 Y 的开集 U^* 满足:

(a) $U^* \subset f(U)$;

(b) $X^* = Y$;

(c) $U \subset V \Rightarrow U^* \subset V^*$;

(d) 若 $y \in V^*$ 且 $\mathcal{W}$ 是由 X 的开集组成的 $f^{-1}(y) \cap U$ 的覆盖, 则存在 $\mathcal{W}$ 的有限集族 $\mathcal{F}$ 使得 $y \in (\cup \mathcal{F})^*$.

三商映射与一些相关映射类之间的关系如下[3]:

完备映射 ⇒诱导完备映射 ⇒紧覆盖映射 ⇒可数的紧覆盖映射

⇓

开映射 ⇒三商映射 ⇐诱导三商映射 ⇒双商映射.

下面是三商映射自身的一些运算性质.

性质 3.2[3] 设 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$.

(a) 若 f, g 都是三商映射, 则 gf 也是三商映射.

(b) 若 gf 是三商映射, 则 g 也是三商映射.

性质 3.3[14] 设 $f_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha$ 是三商映射($\alpha \in A$),那么 $\Pi_{\alpha \in A} f_\alpha: \Pi_{\alpha \in A} X_\alpha \to \Pi_{\alpha \in A} Y_\alpha$ 也是三商映射.

关于三商映射的一个基本的研究方向为[3]:既被完备映射保持又被开映射保持的拓扑性质是否被三商映射保持? 当然, 只有这种性质不被双商映射保持时才有特别的意义. 事实上, 主要讨论完备性在三商映射下的行为. 与定理 2.5 平行的结果有:

定理 3.4　三商映射保持 Sieve 完备性[3]、Partition 完备性[8].

定理 3.5[13]　双商映射不保持 Sieve 完备性、Partition 完备性.

4　映射类之间的关系

本节论述三商映射、开映射、紧覆盖映射、诱导完备映射之间的一些转换关系. 为了简洁起见,我们约定:设 P 是一拓扑性质,称映射 $f: X\to Y$ 是 P 映射,如果每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的具有性质 P 的子空间. 本文常涉及的性质 P 有:紧性质、Lindelöf 性质、Čech 完备性质、Sieve 完备性质和完备度量性质. Michael 证明了

定理 4.1[3]　设 $f: X\to Y$,如下条件之一蕴含 f 是三商映射:

(a)　X 是仿紧空间,Y 是第一可数空间且 f 是闭映射.

(b)　Y 是局部紧空间且 f 是紧覆盖映射.

(c)　X 是正则空间,Y 是第一可数空间且 f 是边缘 Lindelöf 的可数的紧覆盖映射.

怎样的开映射是诱导完备映射?较为经典的结果有

定理 4.2[15]　设 $f: X\to Y$ 是开映射. 若 X 是 Čech 完备空间,Y 是仿紧空间,则 f 是诱导完备映射.

例 4.3[16]　存在开、紧、可数的紧覆盖映射 $f: X\to Y$ 使得 X 是 Partition 完备空间,Y 是紧空间,但是 f 不是紧覆盖映射.

定理 4.4[17]　设 $f: X\to Y$ 是开映射且每一 $f^{-1}(y)$ 是完备的. 若 X 是度量空间,Y 是仿紧空间,则 f 是诱导完备映射.

定理 4.5[4]　设 $f: X\to Y$ 是开映射. 若 X 是度量空间,Y 是可数的正则空间,则 f 是诱导完备映射.

怎样的三商映射是诱导完备映射?相关于定理 4.4 和定理 4.5 有下述两个问题.

问题 4.6[3]　设 $f: X\to Y$ 是三商映射且每一 $f^{-1}(y)$ 是完备的. 若 X 是度量空间,Y 是仿紧空间,f 是否是诱导完备映射?

问题 4.7[4]　设 $f: X\to Y$ 是三商映射. 若 X 是度量空间,Y 是可数的正则空间,f 是否是诱导完备映射?

这两个问题的回答都是否定的.

例 4.8[18]　存在三商、紧、可数的紧覆盖映射 $f: X\to Y$ 使得 X 是 σ 紧的度量空间,Y 是度量空间,但是 f 不是紧覆盖映射.

例 4.9[19]　存在三商映射 $f: X\to Y$ 使得 X 是可分度量空间,Y 是可数的紧度量空间,但是 f 不是紧覆盖映射.

例 4.8 也否定了如下的 Michael 问题[4,7]:设 $f: X\to Y$ 是紧、可数的紧覆盖映射. 若 X 是可分的度量空间,Y 是度量空间,f 是否是紧覆盖映射?定理 4.2 可以推广到三商映射的情形. 但它不可以推广到双商映射的情形[3].

定理 4.10[16]　设 $f: X\to Y$ 是三商映射,X 是正则空间且 Y 是仿紧空间. 若存在完备扩张 $f^+: X^+\to Y$ 使得 X 是 X^+ 的 W_δ 集,则 f 是诱导完备映射.

推论 4.11[20]　设 $f: X\to Y$ 是三商映射,X 是正则空间且 Y 是仿紧空间. 若存在完备扩张 $f^*: X^*\to Y$ 使得 X 是 X^* 的 G_δ 集,则 f 是诱导完备映射.

推论 4.12[3]　设 $f: X\to Y$ 是三商映射. 若 X 是正则的 Sieve 完备空间,Y 是仿紧

空间,则 f 是诱导完备映射.

推论 4.13[3,21] 设 $f: X\to Y$ 是 Lindelöf 的紧覆盖映射. 若 X 是正则的 Sieve 完备空间, Y 是仿紧、第一可数空间,则 f 是诱导完备映射.

定理 4.14[13] 设 $f: X\to Y$ 是 Sieve 完备的三商映射. 若 X 是正则的单调 p 空间, Y 是可数的正则空间,则 f 是诱导完备映射.

推论 4.15[13] 设 $f: X\to Y$ 是 Sieve 完备的三商映射,若 X 是正则的单调 p 空间, Y 是正则空间,则 f 是可数的紧覆盖映射.

相关于定理 4.14,我们提出下列问题.

问题 4.16 设 $f: X\to Y$ 是紧的三商映射. 若 Y 是可数空间, f 是否是诱导完备映射?

怎样的紧覆盖映射是诱导完备映射?推论 4.13 已给出它的一个解.

例 4.17[3] (1) 存在紧覆盖的开映射 $f: X\to Y$ 使得 X, Y 都是可分的度量空间,但是 f 不是诱导完备映射.

(2) 存在紧覆盖的双商映射 $f: X\to Y$ 使得 X 是完备度量空间, Y 是可数的度量空间,但是 f 不是诱导完备映射.

Michael 曾提出如下问题:

问题 4.18[4,7] 设 $f: X\to Y$ 是紧覆盖映射. 若 X 是可分度量空间, Y 是可数的度量空间, f 是否是诱导完备映射?

问题 4.19[4,7] 设 $f: X\to Y$ 是紧的紧覆盖映射. 若 X 是可分度量空间, Y 是度量空间, f 是否是诱导完备映射?

问题 4.18 已完满解决,而问题 4.19 仅获得部分回答.

定理 4.20[16] 设 $f: X\to Y$ 是 Lindelöf 的紧覆盖映射. 若 X 是度量空间, Y 是可数的度量空间,则 f 是诱导完备映射.

定理 4.21[19] 设 $f: X\to Y$ 是紧覆盖映射. 若 X 是可分度量空间, Y 是 σ 紧的度量空间,则 f 是诱导完备映射.

定理 4.22[22] 设 $f: X\to Y$ 是紧覆盖映射. 若 X 是可分度量空间, Y 是第一纲的度量空间,则 f 是诱导完备映射.

定理 4.23[18] 设 $f: X\to Y$ 是紧覆盖映射. 若 X 是 Borel 可分度量空间, Y 是度量空间,则在假设 Σ_1^1 - determine 之下, f 是诱导完备映射.

怎样的开映射是紧覆盖映射?

例 4.24[23] 存在紧的开映射 $f: X\to Y$ 使得 X 是仿紧空间, Y 是紧空间,但是 f 不是紧覆盖映射.

例 4.25[17] 存在完备度量的开映射 $f: X\to Y$ 使得 X 是可分度量空间, Y 是单位区间,但是 f 不是紧覆盖映射.

问题 4.26[24] 设 $f: X\to Y$ 是开映射. 若 X 是度量空间, Y 是可数的度量空间, f 是否是紧覆盖映射?

该问题的回答是肯定的.

定理 4.27[23] 设 $f: X\to Y$ 是开映射. 若 X 是度量空间, Y 是可数空间,则 f 是紧覆盖映射.

由例 4.9 知上述定理中的开映射不可减弱为三商映射.

定理 4.28[12] 设 $f: X\to Y$ 是开映射. 若 X 是 Sieve 完备空间,或 X 是单调 p 空间

且 f 是紧映射,则 f 是紧覆盖映射.

由例4.3**和例**4.25**知上述定理中的** Sieve **完备性不可换为** Partition **完备性或单调** p **性质.由例**4.8**知对单调** p **空间的情形上述定理中的开映射不可减弱为三商映射.**

推论 4.29[25] **设** $f: X \to Y$ **为开映射.若** X **是** Čech **完备空间,则** f **是紧覆盖映射.**

问题 4.30 Čech **完备空间上的三商映射是否是紧覆盖映射?**

参考文献

1 Hausdorff F. Über innere Abbildungen. *Fund. Math.*, 1934, 23: 279 - 291.

2 Christensen J P R. Necessary and sufficient conditions for the measurability of certain sets of closed subsets. *Math. Ann.*, 1973, 200: 188 - 193.

3 Michael E. Complete spaces and tri - quotient maps. *Illinois J. Math.*, 1977, 21: 716 - 733.

4 Michael E. Inductively perfect maps and tri - quotient maps. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1981, 82: 115 - 119.

5 Michael E. A note on completely metrizable spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1986, 96: 513 - 522.

6 Michael E. Correction to "A note on completely metrizable spaces". *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1987, 100: 204.

7 Michael E. Some problems. In: *Open Problems in Topology*, North - Holland, 1991, 271 - 278.

8 Michael E. Partition - complete space are preserved by tri - quotient maps. *Top. Appl.*, 1992, 44: 235 - 240.

9 Michael E. A note on bi - quotient and tri - quotient maps. *Bull. Pol. Acad. Sci. Math.*, 1993, 41: 285 - 291.

10 Engelking R. General Topology. Warszawa: PWN, 1977.

11 Telgársky R, Wicke H. Complete exhaustive sieves and games. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1988, 102: 727 - 744.

12 Chaber J, Čoban M M. Nagami K. On monotone generalizations of Moore spaces, Čech - complete spaces and p - spaces. *Fund. Math.*, 1974, 84: 107 - 119.

13 Just W, Wicke H. Preservation properties of tri - quotient maps with sieve - complete fibres. *Top. Proc.*, 1992, 17: 151 - 172.

14 Uspenskii V V. Tri - quotient maps are preserved by infinite products. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1995, 123: 3567 - 3574.

15 Pasynkov B. Open mappings. *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, 1967, 175: 292 - 295 (Russian).

16 Just W, Wicke H. Some conditions under which tri - quotient or compact - covering maps are inductively perfect. *Top. Appl.*, 1994, 55: 289 - 305.

17 Michael E. A theorem on semi - continuous set - valued functions. *Duke Math. J.*, 1959, 26: 647 - 652.

18 Debs G, Raymond J S. Compact covering and game determinacy. *Top. Appl.*, 1996, 68: 153 - 185.

19 Ostrovsky A V. New class of maps connected with compact - covering maps. *Vestnic Moscov Univ. Mat*, 1994, (4): 24 - 28 (Russian).

20 Ostrovsky A V. Tri - quotient and inductively perfect maps. *Top. Appl.*, 1986, 23: 25 - 28.

21 Ostrovsky A V. On k - covering mappings. *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, 1976, 227(6): 1297 - 1300 (Russian).

22 Ostrovsky A V. On compact - covering mappings of separable metrizable spaces. *Dokl. Akad. Nauk. USSR.* ,1972 , 202(6) : 1271 - 1273. (Russian) .

23 Alster K. Remarks on compact - covering mappings. *Bull. Acad. Pol. Sci. Math.* ,1971 , 19 : 141 - 148.

24 Michael E. G_δ sections and compact covering maps. *Duke Math. J.* ,1969 , 36 : 125 - 127.

25 Arhangle'skii A V. Open and near mappings. Connections between spaces. *Trans. Mosc. Math. Soc.* ,1966 , 15 : 204 - 250.

On Tri - quotient Maps

Lin Shou

(Dept. of Math. , Ningde Teachers' College , Ningde , Fujian , 352100 , P. R. China)

Abstract Tri-quotient maps are a common generalization of perfect maps and open maps. In this paper a survey on tri - quotient maps is given , some relations among tri - quitient maps , open maps , compact - covering maps and inductively perfect maps are discussed , and several interesting questions are posed.

Key words tri - quotient map ; open map ; compact - covering map ;inductively perfect map ; Čech - complete space ; sieve - complete space , monotone p - space , partition - complete space