系 统 科 学 与 数 学
J. Sys. Sci. & Math. Scis.
18(1) (1998,1), 23–26

局部凸空间的正规性*

林 寿

(宁德师范专科学校数学系, 福建 352100)

摘要 本文建立局部凸拓扑向量空间的正规性、完全正规性和单调正规性的等价条件. 作为这些结果的应用, 研究了函数空间的单调正规性和可度量性.

关键词 局部凸空间. 函数空间, 正规空间, 单调正规空间.

拓扑空间 X 上的全体连续实值函数赋予点态收敛拓扑的函数空间 $C_p(X)$ 的正规性问题是拓扑学研究的重要方向之一 [1]. $C_p(X)$ 是一个局部凸的拓扑向量空间, 因而研究局部凸的拓扑向量空间的正规性对于函数空间的理论具有指导意义. 本文首先建立局部凸的拓扑向量空间的正规性、完全正规性和单调正规性的等价条件, 进而利用这些结果获得了函数空间的单调正规性、可度量性的充要条件, 部分地回答了 R.W.Heath[2] 的问题.

本文所有空间均满足 T_2 分离性公理, 局部凸的拓扑向量空间简称为局部凸空间. R 和 I 分别是具有欧氏拓扑的实数集和单位闭区间. 未定义的术语参看文 [3, 4, 5].

首先建立局部凸空间的一条简单且重要的引理.

引理 1 设 X 是局部凸空间, 则存在局部凸空间 Y 使 X 同胚于 $Y\times R$.

证 由空间 X 的局部凸性, 让 f 是 X 上非平凡的实值连续线性函数. 记 $Y=\{x\in X: f(x)=0\}$, 则 Y 是局部凸空间. 取定 $a\in f^{-1}(1)$, 定义 $g:Y\times R\to X$ 使 $g(x,r)=x+ra$, 那么 g 是从 $Y\times R$ 到 X 上的同胚映射, 因而 X 同胚于 $Y\times R$.

下面建立局部凸空间的正规性定理.

定理 1 设 X 是局部凸空间, 那么

i) X 是正规空间 $\Longleftrightarrow$ X 的每一 F_σ 子空间是可数仿紧空间.

ii) X 是完全正规空间 $\Longleftrightarrow$ X 是遗传正规空间 $\Longleftrightarrow$ X 是遗传可数仿紧空间.

iii) X 是单调正规空间 $\Longleftrightarrow$ X 是层空间.

证 因为 X 是局部凸空间, 由引理 1, 存在局部凸空间 Y 使 X 同胚于 $Y\times R$.

i) 设 X 是正规空间, 于是 $Y\times R$ 是正规空间, 从而它的闭子空间 $Y\times I$ 是正规空间. 由 Dowker 定理 [6], Y 是正规且可数仿紧空间. 再由 Dowker 定理, $Y\times I^2$ 是正规空间, 所以它的 F_σ 子空间 $Y\times(0,1)\times I$ 是正规空间. 而 $X\times I$ 同胚于 $Y\times(0,1)\times I$, 因而 $X\times I$ 是正规空间. 从 Dowker 定理知 X 是可数仿紧空间. 现在, X 是正规且可数仿紧空间, 所以 X 的每一 F_σ 子空间是可数仿紧空间 [4].

反之, 设空间 X 的每一 F_σ 子空间是可数仿紧空间, 即 $Y\times R$ 的每一 F_σ 子空间是可数仿紧空间. 由文 [4] 命题 5.5.16(b), 或者 Y 是正规空间, 或者 R 的所有可数离散子空间是 R

* 国家自然科学基金、数学天元基金和福建省自然科学基金资助课题.
1994 年 4 月 25 日收到.

的闭子空间，于是只能 Y 是正规空间，从而 Y 是正规且可数仿紧空间．由 Dowker 定理，$Y \times I$ 是正规空间，所以它的 F_σ 子空间 $Y \times (0,1)$ 是正规空间．因为 X 同胚于 $Y \times (0,1)$，因此 X 是正规空间．

ii) 显然完全正规空间是遗传正规空间和遗传可数仿紧空间，因而只需证明局部凸的遗传正规空间或局部凸的遗传可数仿紧空间是完全正规空间．先设 X 是局部凸的遗传正规空间，那么 $Y \times R$ 是遗传正规空间．由 Katetov 定理 [6]，或者 Y 是完全正规空间，或者 R 的所有可数集是 R 的闭子集，于是只能 Y 是完全正规空间，从而 $Y \times R$ 是完全正规空间，故 X 是完全正规空间．现设 X 是局部凸的遗传可数仿紧空间．先证 Y 是遗传正规空间．对于 $Z \subset Y, Z \times R$ 是遗传可数仿紧空间．由 i) 所证知 Z 是正规空间，所以 Y 是局部凸的遗传正规空间．由前所证，Y 是完全正规空间，于是 $Y \times R$ 是完全正规空间，即 X 是完全正规空间．

iii) 由于层空间总是单调正规空间 [5]，只须证明局部凸的单调正规空间是层空间．设 X 是局部凸的单调正规空间，那么 $Y \times R$ 是单调正规空间，于是 $Y \times I$ 是单调正规空间．由文 [5] 定理 5.22 知 Y 是层空间，所以 $Y \times R$ 是层空间，即 X 是层空间．

注 1) 定理 1 中的各空间在一般拓扑空间类中的蕴涵关系是

$$
\begin{tikzcd}
 & & \text{单调正规空间} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[ddr, Rightarrow] & \text{遗传可数仿紧空间} \arrow[r, Rightarrow] & \text{可数仿紧空间} \\
\text{度量空间} \arrow[r, Rightarrow] & \text{层空间} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & & \\
 & & \text{完全正规空间} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[uur, Rightarrow] & \text{遗传正规空间} \arrow[r, Rightarrow] & \text{正规空间}
\end{tikzcd}
$$

并且不再有其它蕴涵关系成立 [5,7]．

2) 正规而非可数仿紧的空间称为 Dowker 空间．寻找 Dowker 空间是一般拓扑学中经历 20 年才解决的问题．定理 1 说明不存在局部凸的 Dowker 空间．

3) R.W. Heath[2] 提出问题：若 X 是单调正规的拓扑群，那么 X^2 是单调正规空间吗？由定理 1 知若 X 是单调正规的局部凸空间，那么 X 是层空间，于是 X^2 是层空间，所以 X^2 是单调正规空间． R.W.Heath[2] 还问：若 X 是单调正规的拓扑群，那么 X^ω 是单调正规空间吗？可以证明若 X^ω 是单调正规空间，那么 X 是层空间．事实上，不妨设 X 不是单点空间，取定 X 的两个不同点 y, z，令 $D = \{y, z\}$，那么 $X \times D^\omega$ 是 X^ω 的闭子空间，于是 $X \times D^\omega$ 是单调正规空间．由于 D^ω 是非离散的第一可数空间，所以 D^ω 存在非平凡的收敛序列 S (含极限点)，从而 $X \times S$ 是单调正规空间，故 X 是层空间 [5]．由此可知，X 是层空间当且仅当 X^ω 是单调正规空间，于是 R.W.Heath 问题可归结为若 X 是单调正规的拓扑群，那么 X 是否是层空间？对于局部凸空间，它的回答是肯定的．

众所周知，第一可数的拓扑群是可度量化空间．寻找使拓扑群可度量化的比第一可数性弱的条件是一个经典问题 [8]．拓扑空间的 biradial 性是比第一可数性弱的拓扑性质 [9]，A.V.Arhangel'skii 曾证明 [9]：

a) biradial 的拓扑群是单调正规空间．

b) biradial 的拓扑群是可度量化空间当且仅当它的每一点是 G_δ 集．

由定理 1 及 A.V.Arhangel'skii 的结论可得到局部凸空间的一个度量化定理.

推论 1 biradial 的局部凸空间是可度量化空间.

空间 X 称为 Fréchet 空间，如果对 $A\subset X$, 若 $x\in\overline{A}$, 那么存在 A 中点组成的序列收敛于 x; X 称为强 Fréchet 空间，如果对 X 中下降的子集列 $\{A_n\}$, 若 $x\in\bigcap_{n\in N}\overline{A}_n$, 那么存在 X 中的收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 使每一 $x_n\in A_n$. 由定义易知：第一可数性 $\Rightarrow$ 强 Fréchet 性 $\Rightarrow$ Fréchet 性，并且这些关系一般是不可逆的 [10]. 但是在局部凸空间情况发生了变化.

定理 2 Fréchet 的局部凸空间是强 Fréchet 空间.

证　设 X 是 Fréchet 的局部凸空间. 由引理知存在局部凸空间 Y 使 X 同胚于 $Y\times R$, 于是 $Y\times R$ 是 Fréchet 空间，从而 $Y\times I$ 是 Fréchet 空间. 由文 [10] 命题 4.D.5, Y 是强 Fréchet 空间. 再由文 [10] 命题 4.D.4 得 $Y\times R$ 是强 Fréchet 空间，从而 X 是强 Fréchet 空间.

度量空间在连续闭映射下的像空间称之为 Lašnev 空间.　关于 Lašnev 空间有如下事实 [10]:

i) Lašnev 空间是 Fréchet 空间.

ii) 强 Fréchet 的 Lašnev 空间是可度量化空间.

结合定理 2 可得到另一个局部凸空间的度量化定理.

推论 2 Lašnev 的局部凸空间是可度量化空间.

本文的第二部分研究局部凸空间正规性在函数空间理论中的应用. 设 X 是 Tychonoff 空间. $C(X)$ 表示 X 上连续实值函数的全体之集. X 的子集族 α 称为 X 的闭遗传的紧网，若 α 满足如下三个条件：

1) α 的元是 X 的紧子集;

2) 若闭子集 $L\subset K\in\alpha$, 则 $L\in\alpha$;

3) 若 U 是 X 的开子集，则存在 α 的子族 α' 使 $U=\cup_{\alpha'}$.

对 X 的闭遗传的紧网 α, $K\in\alpha$ 及 R 的开子集 V, 让

$$[K,V]=\{f\in C(X):f(K)\subset V\}.$$

$C_\alpha(X)$ 表示 $C(X)$ 有由 $\{[K,V]:K\in\alpha, V$ 是 R 的开子集$\}$ 作为子基的拓扑空间. 特别地，若 α 是 X 的单点集的全体，$C_\alpha(X)$ 是赋予点态收敛拓扑的函数空间，记为 $C_p(X)$; 若 α 是 X 的紧子集全体，$C_\alpha(X)$ 是赋予紧开拓扑的函数空间，记为 $C_k(X)$. 我们知道，$C_\alpha(X)$ 总是局部凸空间 [11], 因而在定理 1, 2 及其推论中将局部凸空间 X 换为函数空间 $C_\alpha(X)$ 时结论仍成立. 这样可获得 $C_\alpha(X)$ 正规性、完全正规性、单调正规性及可度量性的一系列等价条件. 特别地，$C_\alpha(X)$ 是 Fréchet 空间当且仅当 $C_\alpha(X)$ 是强 Fréchet 空间. 这分别推广了文 [12] 定理 1 中关于 $C_k(X)$ 和文 [13] 中关于 $C_p(X)$ 的 Fréchet 性与强 Fréchet 性的等价性. 令我们感到意外的是 $C_p(X)$ 的单调正规性有很简单的判别定理.

定理 3 对 Tychonoff 空间 X, 下述条件相互等价：

(i) X 是可数空间.

(ii) $C_p(X)$ 是度量空间.

(iii) $C_p(X)$ 是层空间.

(iv) $C_p(X)$ 是单调正规空间.

证　由于 $C_p(X)$ 是 $R^{|X|}$ 的子空间，若 X 是可数空间，则 $C_p(X)$ 是度量空间. 为完成定理的证明只须证 (iv) $\Rightarrow$ (i). 设 $C_p(X)$ 是单调正规空间，由定理 1, $C_p(X)$ 是层空间，于是

$C_p(X)$ 是仿紧 σ- 空间. 又由于 $C_p(X)$ 满足可数链条件 (即互不相交的开集族至多是可数族), 所以 $C_p(X)$ 具有可数网, 于是 $C_p(X)$ 是可分空间且 X 具有可数网 [11], 从而由文 [14] 定理 4.1 知 $|X| \le nw(X)^{\psi(X)} = 2^{\omega}$. 若 X 不是可数空间, 那么 $\omega_1 \le |X| \le 2^{\omega}$. 让 D 是 $C_p(X)$ 的可数稠子集, 于是 D 是 $R^{|X|}$ 的可数稠子集, 且 $\omega_1 \le |X| \le 2^{\omega}$, 由文 [15], D 不可能是单调正规空间. 这与 $C_p(X)$ 的单调正规性矛盾. 因而 X 是可数空间. 证毕.

参 考 文 献

[1] Arhangel'skii A V. Problemes in C_p-theory, Open Problems in Topology, Amsterdam: North-Holland, 1990, 601–615.
[2] Heath R W. Some nonmetric, first countable, cancellative topological semigroups that are generalized metric spaces, *Top.Appl.*, 1992, **44**: 167–174.
[3] Schaefer H H. Topological Vector Spaces, Berlin: Springer - Verlag, 1971.
[4] Engelking R. General Topology, Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1977.
[5] Gruenhage G. Generalized metric spaces, Handbook of Set-Theoretic Topology, Amsterdam: North-Holland, 1984, 423–501.
[6] 儿玉之宏, 永见启应著. 方嘉琳译. 拓扑空间论. 北京: 科学出版社, 1984.
[7] Rudin M E. Dowker Spaces, Handbook of Set-Theoretic Topology, Amsterdam: North-Holland, 1984, 761–780.
[8] Arhangel'skii A V. Mappings and spaces, *Russian Math. Surveys*, 1966, **21**: 115–162.
[9] Arhangel'skii A V. On biradial topological spaces and groups, *Top.Appl.*, 1990, **36**: 173–180.
[10] Michael E. A quintuple quotient quest. *Gen. Top.Appl.*, 1972, **2**: 91–138.
[11] MoCoy R A and Ntantu I. Topological Properties of Spaces of Continuous Functions (Lecture Notes in Math., No. 1315), Berlin: Springer-Verlag, 1988.
[12] 林寿, 刘川, 滕辉. $C_k(X)$ 的扇密度和强 Fréchet 性质. 数学进展, 1994, **23**: 234–237.
[13] Gerlits D. Some properties of $C(X)$, II, *Top.Appl.*, 1983, **15**: 255–262.
[14] Hodel R. Cardinal functions I, Handbook of Set-Theoretic Topology, Amsterdam: North-Holland, 1984, 1–62.
[15] Heath R W. An easier proof that a certain countable space is not stratifiable. Proc. Washington State Univ. Conf.On General Topology, 1970, 56–59.

NORMALITY OF LOCALLY CONVEX SPACES

Lin Shou

(*Department of Mathematics, Ningde Teachers College , Fujian* 352100)

Abstract In this paper the equivalent conditions of normality, perfect normality and monotonical normality in locally convex topological vector spaces are established. As their applications, we discuss the monotonical normality and metrizability on function spaces.

Key words Locally convex space, function space, normal space, monotonical normal space.