第18卷第4期 淮北煤师院学报 Vol. 18 No.4
1997年 Journal of Huaibei Coal Mining Teachers College 1997

函数空间 $C_P(Y|X)$ 的一些基数函数*

刘川[1)] 林寿[2)] 滕辉[3)]

1) 广西大学数学系，南宁 530004

2) 宁德师专数学系，福建 352100

3) 四川联大数学系，成都 610064

摘要

本文讨论函数空间 $C_P(Y|X)$ 的基数函数，主要结果有

1、$\psi(C_P(Y|X))=\Delta(C_P(Y|X))=d(Y)$

2、$t(C_P(Y|X))=\omega L(Y)$

3、$hd(C_P(Y|X))=hL(Y^\omega)$

关键词 函数空间 基数函数 拓扑性质

设 X 是完全正则空间，R 是赋予欧氏拓扑的实直线。$C_P(X)$ 是 X 上实值连续函数全体赋予点态收敛拓扑下的函数空间。对于 X 的子空间 Y，积空间 R^X 到积空间 R^Y 的投影映射在 $C_P(X)$ 上的限制记为 π_Y。函数空间 $\pi_Y(C_P(X))$ 是函数空间 $C_P(Y)$ 的子空间。其上的每一元可以扩张为 X 上的实值连续函数。$C_P(X)$ 上许多拓扑性质的研究涉及到讨论 $\pi_Y(C_P(X))$ 上的性质。例如，1980年，D.Lutzer 和 R.McCoy[1]证明了 $C_P(X)$ 是 Baire 空间当且仅当对于 X 的任一可数子空间 Y，$\pi_Y(C_P(X))$ 是 Baire 空间；1985年，A.A рхангльский和 B.T качук[2]也证明了 $C_P(X)$ 的正规性与 $\pi_Y(C_P(X))$ 的正规性密切相关；1996年 A.Arhangelskii[3]又证明了 $C_P(X)$ 的 spread 的确定依赖于 $\pi_Y(C_P(X))$。1988年 M.Лахути[4]将 $\pi_Y(C_P(X))$ 记为 $C_P(Y|X)$，称之为相对函数空间。上述结果表明，$C_P(Y|X)$ 是一类重要的函数空间，它对于进一步研究 $C_P(X)$ 以及揭示子空间 Y 对于空间 X 的相对关系方面起积极的作用。本文的目的主要是讨论 $C_P(Y|X)$ 上的基数函数。

本文所论空间均指满足完全正则分离性公理的 T_1 空间。N 表示自然数集。对于空间 X，记 $\mathcal{F}(X)=\{F\subset X:|F|<\omega\}$。对于 $F\subset X$，$V\subset$R，记 $[F,V]=\{f\in C(X):f(F)\subset V\}$，其中 $C(X)$ 为 X 上实值连续函数的全体组成的集合。于是

$$\{[F,V]:F\in\mathcal{F}(X),V\text{是}R\text{的开子集}\}$$

是函数空间 $C_P(X)$ 的一个子基。对于 $C_P(Y|X)$，我们假定 Y 是 X 的子空间。对于 R 的子集 S，

$$C_P(X,S)=\{f\in C_P(X):f(X)\subset S\},$$

$$C_P(Y|X,S)=C_P(Y|X)\cap C_P(Y,S).$$

*国家自然科学基金资助项目，福建省自然科学基金资助项目.

收稿日期：1997－07－25

对于空间 X，$\psi(X)$、$\Delta(X)$、$d(X)$、$t(X)$、$hd(X)$、$hL(X)$分别表示 X 的伪特征、对角线度、稠密度、紧密度、遗传稠密度和遗传 Lindelöf 度. 它们的定义和一些基本性质可参阅 R.Hodel[5] 的综述报告. X 的弱权数 $i\omega(X)$定义为 $i\omega(X)=\omega+\min\{\omega(Y):Y$ 是空间 X 的连续一对一映象$\}$. 从定义易知$\psi(X)\le i\omega(X)$.

定理 1 $\psi(C_P(Y|X))=\Delta(C_P(Y|X))=d(Y)$.

证明 由于拓扑群上的伪特征等于对角线度[6]. 而 $C_P(Y|X)$是一个拓扑群，所以$\psi(C_P(Y|X))=\Delta(C_P(Y|X))$. 由文[4]推论 3 知，$i\omega(C_P(Y|X))=d(Y)$，于是$\psi(C_P(Y|X))\le d(Y)$. 下面证明 $d(Y)\le\psi(C_P(Y|X))$. 设 f 是在 X 上恒等于零的函数，令 $f_0=f|_Y$，则 $f_0\in C_P(Y|X)$，于是

$$\{f_0\}=\bigcap\{[A_\alpha,V_\alpha]\cap C_P(Y|X):\alpha<\tau\},$$

其中$\tau\le\psi(C_P(Y|X))$，$A_\alpha\in\mathcal{F}(Y)$并且 V_α 是 R 的开子集. 令 $Y_1=\bigcup\{A_\alpha:\alpha<\tau\}$，则$|Y_1|\le\tau$. 若 $Y\not\subset cl_X(Y_1)$，取定 $a\in Y\backslash cl_X(Y_1)$，因为 X 是完全正则空间，存在 $g\in C(X)$使得 $g(a)=1,g(cl_X(Y_1))=\{0\}$，令 $g_1=g|_Y$，则 $g_1\ne f_0$ 且 $g_1\in\bigcap\{[A_\alpha,V_\alpha]\cap C_P(Y|X):\alpha<\tau\}$，矛盾. 因而 $Y\subset cl_X(Y_1)$，从而 $Y=cl_Y(Y_1)$，因此 $d(Y)\le\tau\le\psi(C_P(Y|X))$.

空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为 X 的ω 覆盖，如果 $\mathcal{F}(X)$加细 $\mathcal{P}$. X 的ω–Lindelöf 度定义为 $\omega L(X)=\omega+\min\{\tau.X$ 的每一开ω 覆盖都有一个基数不超过τ的ω 子覆盖$\}$.

定理 2 $t(C_P(Y|X))=\omega L(Y)$.

证明 设$\tau=t(C_P(Y|X))$，$\mathcal{U}$ 是 Y 的一个开ω 覆盖. 任给 $A\in\mathcal{F}(Y)$，存在 $U_A\in\mathcal{U}$ 使 $A\subset U_A$. 取 X 的开子集 V_A 使 $U_A=V_A\cap Y$. 因为 $A\subset V_A$，存在 $f_A\in C(X)$使 $f_A(A)=\{0\}$，$f_A(X\backslash V_A)=\{1\}$。令 $g_A=f_{A|Y}$，则 $g_A\in C_P(Y|X)$。置 $F=\{g_A:A\in\mathcal{F}(Y)\}$，则 Y 上的零函数 $g_0=Cl_{C_p(Y|X)}(F_1)$，因而存在 $F_1\subset F$ 使$|F_1|\le\tau$ 且 $g_0\in cl_{C_p(Y|X)}(F_1)$。让$\mathcal{V}=\{U_A:g_A\in F_1\}$，那么$|\mathcal{V}|\le\tau$. 对于任给的 $A\in\mathcal{F}(Y)$，定义 $W=[A,(-1,1)]$，则 W 是 g_0 在 $C_P(Y|X)$中的开邻域，于是存在 $B\in\mathcal{F}(Y)$使 $g_B\in F_1\cap W$，而 $g_{B|_A}<1,g_{B|Y\backslash U_B}\equiv1$，故 $A\subset U_B$，所以$\omega L(Y)\le t(C_P(Y|X))$.

反之，因为 $C_P(Y|X)\subset C_P(Y)$，所以 $t(C_P(Y|X))\le t(C_P(Y))$. 又因为 $t(C_P(Y))=\omega L(Y)$，（见文[6] 定理 4.7.1 ），所以 $t(C_P(Y|X))\le\omega L(Y)$.

本文的最后一个结果是关于 $C_P(Y|X)$的遗传稠密度. 先建立几个引理.

引理 1[7] 对空间 Y，$hd(C_P(Y))=hL(Y^\omega)$.

设 $A\subset Y$，$\mathcal{F}\subset C_P(Y)$，称 $\mathcal{F}$ 分离 A 中的点与闭集，若对 $x\in A$，$F\subset A$ 且 $x\notin cl_Y(F)$，存在 $f\in\mathcal{F}$ 使 $f(x)\notin cl(f(F))$.

引理 2[8] 若 $A\subset Y$，$\mathcal{F}\subset C_P(Y)$分离 A 中的点与闭集，则 $hL(A)\le hd(\mathcal{F})$.

对于空间 X，$n\in$N 和 $i,j\le n$，定义 $\Delta^n_{i,j}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n\}\in X^n:x_i=x_j\}$.

引理 3 对于 $Y\subset X$，$n\in$N，若 Y^n 的子集 A 满足对 $i<j\le n$ 有 $(cl_{Y^n}(A))\cap\Delta^n_{i,j}=\Phi$，则存在连续映射$\varphi:C_P(Y|X)\to C_P(Y^n)$使$\varphi(C_P(Y|X))$分离 A 中的点和闭集.

证明 定义$\varphi:C_P(Y|X)\to C_P(Y^n)$使

$$\varphi(f)(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-i|,$$

其中 $f\in C_P(Y|X)$，$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in Y^n$. 显然$\varphi$ 是连续映射. 设 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A$，$F\subset A$ 且 $a\notin cl_{Y^n}(F)$. 置 $Z=\{a_i:i\le n\}^n\cap(U\{\Delta^n_{i,j}:i<j\le n\}\cup\{a\})$，由题设可知 $Z\cap(cl_{Y^n}(F))=\Phi$，从而

$Z\cap(cl_{X^n}(F))=\Phi$．对于 $i\le n$，可选取 a_i 在 X 中的邻域 V_i 满足:

(1) $\{V_i:i\in\mathrm{N}\}$是两两互不相交的.

(2) 对于 $\{a_{i_k}\}\in Z$ 有 $(\prod_{k\le n}(V_{i_k}\cap Y))\cap F=\Phi$.

由完全正则性，取 $g_i\in C(X,[0,i])$使得 $g_i(a_i)=i$，$g_i(X\setminus V_i)=\{0\}$，令 $f=\sum_{i\le n}g_i$，则 f 满足:

(3) $f(a_i)=i$，$f(V_i)\subset[0,1]$，$i\le n$，

(4) 令 $f(X\setminus\bigcup_{i\le n}V_i)\subset\{0\}$，$f_0=f|_Y$，则 $f_0\in C_P(Y|X)$. 对于$(y_1,y_2,\cdots y_n)\in F$，若$\varphi(f_0)(y_1,y_2,\cdots y_n)<1$，则$|f_0(y_i)-i|<1$，从而必有 $y_i\in\bigcup\{V_j\cap Y:i\le j\le n\}$，选取 $k_i\le n$ 使得 $y_i\in V_{k_i}$，这时 $\{a_{k_i}\}\in Z$，于是$(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in(\prod_{i\le n}(V_{k_i}\cap Y))\cap F=\Phi$，矛盾. 于是$\varphi(f_0)(y_1,y_2,\cdots,y_n)\ge1$，而$\varphi(f_0)(a_1,a_2,\cdots,a_n)=0$，因此$\varphi(f_0)(a)\notin cl(\varphi(f_0)(F))$，所以$\varphi(C_P(Y|X))$分离 A 中的点与闭集.

引理 4　$hL(Y^\omega)\le hd(C_P(Y|X))\cdot\Delta(Y)$.

证明　因为 $hL(Y^\omega)=\sup\{hL(Y^n):n\in N\}$[9]，所以只须证明对于任给$n\in\mathrm{N}$，$hL(Y^n)\le hd(C_P(Y|X))\cdot\Delta(Y)$. 当 $n=1$ 时，因为 $C_P(Y|X)$ 分离 Y 中的点和闭集，由引理 2 有 $hL(Y)\le hd(C_P(Y|X))\le hd(C_P(Y|X))\cdot\Delta(Y)$. 设 $n\le k$ 时命题成立，当 $n=k+1$ 时，由于 $\Delta^n_{i,j}$ 是 Y 的对角线在从 Y^n 到 Y^2 的投影映射的逆象，于是 $\Delta^n_{i,j}$ 是 Y^n 中不超过$\Delta(Y)$个开集的交，从而 $\bigcup_{i<j\le n}\Delta^n_{i,j}$ 是 Y^n 中不超过$\Delta(Y)$个开集的交，因此 $Y^n\setminus\bigcup_{i<j\le n}\Delta^n_{i,j}=\bigcup_{\alpha<\Delta(Y)}A_\alpha$，其中 A_α是 Y^n 中的闭集，于是 $A_\alpha\cap\Delta^n_{i,j}=\Phi$，$i<j\le n$．由引理 3 和引理 2，$hL(A_\alpha)\le hd(C_P(Y|X))$. 再由归纳假设有 $hL(Y^n)=hL((\bigcup_{i<j\le n}\Delta^n_{i,j})\cup(\bigcup_{\alpha<\Delta(Y)}A_\alpha))\le\sum_{i<j\le n}hL(\Delta^n_{i,j})+\sum_{\alpha<\Delta(Y)}hL(A_\alpha)\le hd(C_P(Y|X))\cdot\Delta(Y)$.

引理 5　$\Delta(Y)\le d(C_P(Y|X))$.

证明　因 $C_P(Y|X)$分离 Y 中的点与闭集，由[6]定理 2.1.2，Y 可以嵌入 $C_P(C_P(Y|X))$，于是$\Delta(Y)\le\Delta(C_P(C_P(Y|X)))$. 又因为对任意空间 Z，$\Delta(C_P(Z))=d(Z)$(见[6]定理 4.3.1)，所以有 $\Delta(Y)\le d(C_P(Y|X))$.

定理 3　$hd(C_P(Y|X))=hL(Y^\omega)$，$hd(C_P(Y))\le hd(C_P(Y|X))$. 由引理 1，$hd(C_P(Y))\le hL(Y^\omega)$，再由引理 4、5 有 $hL(Y^\omega)\le hd(C_P(Y|X))$，所以 $hd(C_P(Y|X))=hL(Y^\omega)$.

证明　显然。

参　考　文　献

1　Lutzer D J,McCoy R A.Category　in function spaces.I.Pacific J Math,1980;90:145 — 168

2　Arhangel'skii A V,Tkacuk V V.Function spaces and topological invariant.Moscow:Moscow University Press,1985(Russian)

3　Arhangel'skii A V.On spread and condensations.Proc Amer Math Soc,1996;124:3519 — 3527

4　Lasyth M D.On relative function spaces.Vestnic Moskov Univ Mat,1988;6:29 — 31

5　Hodel R.Cardinal functions I.Handbook of set–theoretic topology.North–Holland,1984:1 — 61

6　McCoy R A,Ntantu I.topological Properties of spaces of continuous functions.Lecture Notes Math.No 1315,springer,1988

7 Velicko N V.Weak topology of spaces of continuous functions.Mat Zametki,1981;30:703 — 712

8 Coutant B.Some cardinal function relationships between $C_P(X)$ and finite powers of a space X.Top Appl,1991;39:245 — 259

9 Zenor P.Hereditary m — separability and hereditary m — lindelöf property in product spaces and function spaces.Fund Math,1980;106:175 — 180

Some Cardinal Function on Function Spaces $C_P(Y|X)$

Liu Chuan Lin Shou Teng Hui

(Guangxi University,Nanning 530004)(Ningde Teachers' College,Ningde 352100)(Sichuan University,Chengdu 610064)

Abstract

In this paper some cardinal functions on function spaces $C_P(Y|X)$ are discussed,the main results are that

1 $\psi(C_P(Y|X))=\Delta(C_P(Y|X))=d(Y)$

2 $t(C_P(Y|X))=\omega L(Y)$

3 $hd(C_P(Y|X))=hL(Y^\omega)$

Key words function spaces cardinal functions topological properties