第8卷第2期 宁德师专学报(自然科学版) Vol. 8 No. 2
1996年10月 Journal of Ningde Teachers College (Natural Science) Oct. 1996

Miwa 问题的注记*

林 寿

(宁德师范高等专科学校数学系 宁德 352100)

摘要 本文给一反例说明 Miwa 问题的解答中的两个条件是相互独立的.

关键词 度量空间,局部紧空间,闭映射

中图分类号 O 189.11

本文所论空间都是满足正则且 T_1 分离性公理的拓扑空间,映射指连续的满函数.

度量空间的闭映象称为 Lašnev 空间. Miwa 曾提出问题[1]:设 Y 是度量空间,如果 B 是 Y 的闭子集,那么 Lašnev 空间 Y/B 是否由度量空间族控制? 近来,我们获得了该问题的解.

定理1 设 Y 是度量空间,如果 B 是 Y 的闭子集,那么 Y/B 由度量空间族控制当且仅当 B 在 Y 中的边界是 Y 的局部紧的子空间.

更进一步,我们获得了 Lašnev 空间是由度量空间族控制的充要条件.

定理2 设 $f:Z\to X$ 是闭映射,其中 Z 是度量空间,那么 X 由度量空间族控制当且仅当 f 满足

(a) $\forall\ x\in X$, $f^{-1}(x)$ 在 Z 中的边界是 Z 的局部紧的子空间.

(b) $\{x\in X: f^{-1}(x)$ 在 Z 中的边界不是 Z 的紧子集$\}$ 在 X 中离散.

本文的主要目的在于说明定理2中的两条件是相互独立的. 设 Q 是实数空间 R 的由有理点全体组成的子空间,那么自然商映射 $f:Q^2\to Q^2/Q\times\{0\}$ 满足条件(b),但它不满足条件(a).

另一方面,设 $Z=\{(x,y)\in R^2: 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y<x\}\cup\{(0,0)\}$. 赋于 Z 通常的欧氏拓扑,则 Z 是度量空间. 记 $I=\{1/n: n\in N\}\cup\{0\}$,并且令

$$X=\{(x,y)\in R^2: 0<x<1, x\notin I, 0\leqslant y<x\}\cup\{(x,0): x\in I\}$$

定义 $f:Z\to X$ 使得 $f((x,y))=\begin{cases}(x,0), & x\in I\\ (x,y), & x\in(0,1)\setminus I\end{cases}$

赋予 X 是由 f 诱导的商拓扑,那么 X 是 T_2 空间并且 f 是闭映射. 易验证,对 $(x,y)\in X$, $f^{-1}((x,y))$ 在 Z 中的边界就是 $f^{-1}((x,y))$,所以它是 Z 的局部紧的子空间. 然而

$$\{x\in X: f^{-1}(x)\text{在 }Z\text{ 中的边界不是 }Z\text{ 的紧子集}\}=\{1/n: n\in N\}\times\{0\}$$

它不是 X 的离散子集. 故 f 满足条件(a),但它不满足条件(b).

由于度量空间的任一闭映象未必由度量空间族控制,我们感兴趣下述问题:对度量空间 Z, Z 的任一闭映象由度量空间族控制的充要条件是什么?该问题与正规度量空间[2]相关,因为它可刻画为任一闭映象是度量空间的空间[3].

---

* 收稿日期:1996—06—28

林 寿,男,1960年3月出生,教授

国家自然科学基金资助项目

定理 3 设 Z 是度量空间,下述条件等价:(1) Z 的任一闭映象由度量空间族控制;(2) 若 F 是 Z 的闭子集,那么 F 的边界是 Z 的局部紧的子空间;(3) Z 是局部的正规度量空间.

证 (1)→(2). 由于自然商映射 $f:Z\to Z/F$ 是闭映射,由定理 1 知 F 的边界是 Z 的局部紧的子空间.

(2)→(3). 由条件(2),先证明 Z 的非孤立点集是 Z 的局部紧子集. 设 Z' 是 Z 的非孤立点集. 如果 Z' 不是局部紧,那么存在 $a\in Z'$ 及 a 在 Z' 中的下降的可数局部基 $\{V_n:n\in N\}$ 使每一 $\overline{V}_n$ 不是 Z' 的紧子集. 由归纳法可选取子集列 $\{V_{n_i}:i\in N\}$ 以及每一 $\overline{V}_{n_i}$ 的可数闭离散子集 D_i 使 $(\bigcup_{j<i}D_j)\cap\overline{V}_{n_i}=\varnothing$. 令 $D=\{a\}\cup(\bigcup_{i\in N}D_i)$,则 D 是 Z' 的闭子集,于是 D 是 Z 的闭子集. 对 $d\in D\setminus\{a\}$,由 $\{D_i\}$ 的构造知存在 d 在 Z 中的开邻域 V 使得 $V\cap D=\{d\}$. 若 U 是 d 在 Z 中的开邻域,因为 $d\in Z'$,所以 $U\cap V$ 是无限集,从而 $U\cap V$ 中有 $Z\setminus D$ 中的点,故 d 是 D 的边界点. 因此,$\bigcup_{i\in N}D_i$ 含于 D 的边界集之中. 又因为 $a\in\overline{\bigcup_{i\in N}D_i}$,所以 D 就是 D 的边界集. 但是,D 不是 Z 的局部紧子集,这与条件(2)矛盾,故 Z 的非孤立点集是 Z 的局部紧子集.

对 $a\in Z$,若 a 是 Z 的孤立点,那么 $\{a\}$ 是 a 在 Z 中的可正规度量的邻域;若 a 不是 Z 的孤立点,则存在 a 在 Z 中的开邻域 V 使 $\overline{V\cap Z'}$ 是紧子集,令 $U=\overline{V\cap Z'}\cup(V\setminus Z')$,那么 U 是 a 在 Z 中的可正规度量的邻域. 故 Z 是局部的正规度量空间.

(3)→(1). 利用 Z 是仿紧的局部的正规度量空间知 Z 的任一闭映象由度量空间族控制.

谨以本文悼念恩师黄子卿副教授.

参 考 文 献

1 Tanaka Y, Zhou Haoxuan. Spaces determined by metric spaces and their character. Questions Answers in Ganeral Topology, 1985/86, 3: 145~160

2 Mrowka S G. Normal metrics. Amer Math Monthly, 1965, 72: 998~1001

3 Jayanthan A, Kannay V. Spaces every quotient of which is metrizable. Proc Amer Math Soc, 1988, 103: 294~298

A Note on Miwa's Questions

Lin Shou

(Department of Mathematics, Ningde Teachers College Ningde 352100)

Abstract In this paper an counterexample is given which showes that two conditions in the answer to Miwa's question are mutually independent.

Keywords metric space, locally compact space, closed map