第 12 卷第 2 期　　黄 淮 学 刊　　Vol. 12 No. 2
1996 年 6 月　　HUANGHUAI JOURNAL　　June, 1996

拓扑空间及其运算*

林 寿

（宁德师专数学系，福建宁德，352100）

摘 要 讨论拓扑空间的可积性、遗传性、可和性和局部性质，通过例子说明一些拓扑性质不满足这些运算，并提出几个问题.

关键词 拓扑空间 可积性 遗传性 可和性 局部性质 反例

中图分类号 O189.1

1 空间的运算

本文所论空间均指满足 T_2 分离性公理的拓扑空间. 拓扑空间论研究的主要问题之一是拓扑性质在各类运算下的行为，我们曾介绍了 110 个拓扑性质的映射性质[1]，本文讨论这 110 个拓扑性质的可积性、遗传性、可和性和局部性质，限于篇幅，我们重点描述不保持运算的性质.

积拓扑是 Tychonoff[2]定义的，但是 Fréchet[3]最先讨论了有限积拓扑，与可积性相关的运算有逆系的极限[4]、σ 积[5]、$\sum$ 积[5]和箱积[6]等. 关于空间遗传性的讨论起始于 Hausdorff[7]的工作，可知性所讨论的内容是被加项的哪些拓扑性质能转移到和空间上? 它的最原始叙述是问题[8]：如果紧空间 X 是两具有可数基空间之并，那么 X 是否具有可数基? 现代和定理的发展趋势是讨论一般性的和定理[9]，主要形式有点有限开和定理[10,11]、局部有限闭和定理[9,12]、遗传闭包保持闭和定理[13]、控制和定理[14,15]、可数闭和定理[16,17]等. 局部性质主要讨论在什么条件下局部性质能转移到整个空间上，对拓扑性质 τ，局部 τ 有两种定义方式. Ⅰ 局部 τ：对于 $x\in X$ 存在 x 在 X 中的开邻域 V 使 V 有 τ；Ⅱ 局部 τ：对于 $x\in X$ 存在 x 在 X 中的开邻域 V 使 $\overline{V}$ 有 τ. 它们一般不等价，对广义度量性质多采用 Ⅰ 局部 τ，对覆盖性质多采用 Ⅱ 局部 τ 来定义局部性质，研究局部性质转化为整体性质的条件主要是覆盖性质，如仿紧性[18]、次仿紧性[19]、θ 可加细性[20]，高国士[21]讨论了局部性质的一般性定理.

2 一些反例

例 2.1 下述性质不是可积性：阿列夫，阿列夫零** BCO，cosmic，可数型，$\delta\theta$ 基，可展，第一可数，r，G_δ 对角线，K 半层，可度量，M_1，M_3，Nagata，p，点可数基，点可数型，Primitive 基，拟可展，拟可度量，r，半可度量，半层，σ 互不相交基，σ 局部可数基，σ 点有限基，σQ 基，σ，严格 p，次可度量，Ⓗ，θ，一致基.

证 取 $X=N^{\omega_1}$，则 N 具有例 2.1 中的任一性质，但是 X 既不是 q 空间[22]，也不具有点 G_δ 性质，所以 X 不具有例 2.1 中的任一性质.

例 2.2 下述两组性质不是开遗传性质.

Ⅰ：β，紧，可数紧，可数中紧，可数亚紧，可数仿紧，可数次仿紧，hemi 紧，Lindelöf，M，M^*，$M^\#$，

---

* 国家自然科学基金资助课题　收稿日期：1996－02－10

** 阿列夫、阿列夫零分别表示具有 σ 局部有限 k 网、具有可数 k 网的正则空间.

中紧,亚紧,ortho 紧,p,仿紧,伪紧,Σ,Σ^*,$\Sigma^\#$,严格 p,强仿紧,强 Σ,强 $\Sigma^\#$,次仿紧,$\omega\triangle$,ωM,ωN,$\omega\sigma$.

Ⅱ:$\delta\theta$ 可加细,等紧,并 Lindelöf,仿 Lindelöf,实紧,可遮,σ 亚紧,σ 仿 Lindelöf,θ 可加细.

证 让 Γ 是文[23]中的非可数 ortho 紧的局部紧空间,则 Γ 是其单点紧化的开子空间,且 Γ 不具有Ⅰ中的任一性质,让 ω_1 是可数序数空间,则 ω_1 是其单点紧化的开子空间,且 ω_1 不具有Ⅱ中的任一性质.

例 2.3 下述性质不满足点有限开和定理:阿列夫,可数中紧,可数仿紧,可膨胀,g 可度量,遗传正规,K 半层,Lašnev,M,M^*,$M^\#$,中紧,可度量,M_1,M_3,单调正规,Nagata,正规,仿紧,仿 Lindelöf,完全正规,序列式中紧,σMK,ωM,ωN.

证 让 X 是文[24]例 2.5 所示的非正规、非可数仿紧、非仿 Lindelöf 的正则 Moore 空间,则 X 是两开度量子空间的并,所以例 2.3 中的性质不满足点有限开和定理.

例 2.4 下述性质不满足点可数且遗传闭包保持闭和定理[25]:Baire,BCO,Čech 完备,可数型,$\delta\theta$ 基,可展,第一可数,γ,g 可度量,局部紧,M^*,$M^\#$,可度量,Nagata,ortho 基,p,点可数基,点可数型,Primitive 基,q,拟完备,拟可展,拟可度量,r,半可度量,σ 互不相交基,σ 局部可数基,σ 点有限基,σQ 基,严格 p,强 Fréchet,对称度量,Ⓗ,θ,一致基,$\omega\triangle$,ωr,ωM,ωN,ωⒽ,$\omega\theta$.

证 让 X 是序列扇 S_ω[26],则 X 存在由可数个收敛序列组成的遗传闭包保持的闭覆盖,但是 X 不具有例 2.4 中的任一性质.

例 2.5 下述性质不满足控制和定理:Fréchet,k',Lašnev.

证 让 X 是 Arens 空间 S_2[26],则 X 由度量空间的可数族所控制,但 X 不具有例 2.5 中的任一性质.

例 2.6 下述性质不满足可数闭和定理:BCO,Čech 完备,紧,连通,可数型,$\delta\theta$ 基,可展,第一可数,Fréchet,r,$K\omega$,k',Lašnv,局部紧,M^*,$M^\#$,可度量,Nagata,ortho 基,p,点可数基,点可数型,Primitive 基,伪紧,q,拟完备,拟可展,拟可度量,r,半可度量,序列紧,σ 互不相交基,σ 局部可数基,σ 点有限基,σQ 基,严格 p,强 Fréchet,对称度量,Ⓗ,θ,一致基,$\omega\triangle$,ωr,ωM,ωN,ωⒽ,$\omega\theta$.

证 让 X 是文[27]例 1.8.8 所示的 Michael 空间 $N\cup\{P\}$,其中 $P\in\beta N\backslash N$,则 X 既不是一个 k 空间,也不是一个连通空间,于是 X 不具有例 2.6 中的任一性质.

注 hemi 紧也不满足可数闭和定理,这只须考虑空间 Q^2/Q,其中 Q 是有理数空间.

例 2.7 下述性质不满足局部可数闭和定理[17]:$\delta\theta$ 可加细,等紧,完全,半层,σ,强Σ,强$\Sigma^\#$,次仿紧,θ 可加强,弱 θ 可加细,弱 $\delta\theta$ 可加细.

证 让 X 是可数序数空间 ω_1,则 X 满足例 2.7 的要求[28].

注 由例 2.7 及文[23]知我们所述的 110 个性质[1]均不满足局部可数闭和定理.

例 2.8 下述性质 τ 不满足“仿紧局部 τ 空间是 τ 空间”:阿列夫零,CCC,紧,连通,cosmic,可数紧,hemi 紧,$K\omega$,Lindelöf,伪紧,可分,序列紧.

证 让 X 是 ω_1 个单位区间的拓扑和,则 X 满足例 2.8 的要求.

例 2.9 下述性质 τ 不满足“局部 τ 空间是 τ 空间”:$\delta\theta$ 基,$\delta\theta$ 可加细,可展,G_δ 对角线,等紧,完全,拟可展,半可度量,半层,σ,严格 p,强 $\Sigma^\#$,对称度量,Ⓗ,θ 可加细,弱 θ 可加细,弱 $\delta\theta$ 可加细.

证 让 X 是可数序数空间 ω_1,则 X 满足例 2.9 的要求.

注　(1)　例 2.3 中的空间 X 说明例 2.3 所述的性质 τ 不满足“次仿紧局部 τ 空间是 τ 空间”.

(2)　例 2.2 中的空间 Γ 说明可数亚紧、P 性质不满足“局部 τ 空间是 τ 空间”.

3　一些问题

问题 3.1　下述性质是否具有限可积的：β,P，$\sum$，$\sum^*$，$\sum^\#$？

问题 3.2　下述性质是否满足局部有限闭和定理：Baire，完全正则，$\delta\theta$ 可加细，亚 Lindelöf，ortho 基，p，拟完备，σ 互不相交基，σ 亚紧，Ⓗ，θ，弱 $\delta\theta$ 可加细，$\omega\triangle$？

问题 3.3　下述性质是否满足可数闭和定理：β,P,$\omega\sigma$？

问题 3.4　下述性质 τ 是否满足“θ 可加细局部 τ 空间是 τ 空间：G_σ 对角线，P，拟可展，Ⓗ，θ，$\omega\sigma$？

参 考 文 献

[1]　林寿. 关于空间和映射. 苏州大学学报(自然科学版)，1989，(5)：313～326

[2]　Tychonoff A. Uber die topologische Erweiterung von Raumen. Math Ann，1930，(102)：544～561

[3]　Frechet M. Les dimensions d'un ensemble abstrait. Math Aun，1910，(68)：145～168

[4]　Lefschetz S. Algebraic Topology. New York：AMS Colloquium Publications，No. 27，1942

[5]　Corson H. Normality in subsets of product spaces. Amer J Math. 1959，(81)：785～796

[6]　Rudin M. The box topology. Proc Univ Houston Point Set Top Conf，1971. 191～199

[7]　Hausdorff F. Grundzuge der Mengenlehre. Leipzig，1914

[8]　Alexandroff P，Urysohn P. Sur les espaces topologiques compacts. Bull intern Acad Pol Sci A，1923. 5～8

[9]　Hodel R. Sum theorems for topological spaces. Pacific J Math，1969，(30)：59～65

[10]　Tanaka Y. On open finite-to-one maps. Bull Tokyo Gakugei Univ Ser Ⅳ，1973，(25)：1～13

[11]　Gittings G. Open mappimg theory. Set-Theoretic Topology，Academic Press，1977，141～191

[12]　Nagata J. On a necessary and sufficient condition of metrizability. J Inst Polytech Osaka City Univ A，1950，(1)：93～100

[13]　Singal M，Arya S. On the closure-preserving sum theorem. Proc AMS，1975，(53)：518～522

[14]　Morita K. On spaces having the weak topology with respect to closed coverings. Proc Japan Acad，1953，(29)：537～543

[15]　Singal M，Ayra S. Weak topology sum theorems. Colloq Math Soc Janos Bolyai，1978，(23)：1059～1109

[16]　Okuyama A. Some generalizations of metric spaces，their metrization theorems and product spaces. Sc Rep TKD Sec A，1967，(9)：236～254

[17]　Arya S，Singal M. On the locally countable sum theorem. Pacific J Math，1980，(90)：1～10

[18]　Smirnov Yu. On metrization of topological spaces. Uspchi Mat Nauk，1951，(6)：100～111

[19]　Burke D. On subparacompact spaces. Proc AMS，1969，23：655～663

[20]　Tanaka Y. On local properties of topological spaces. Sc Rep TKD Sec A，1972(11)：106～116

[21]　高国士. 关于局部性质的一般性定理. 数学进展，1985，(14)：273～274

[22]　House V. Countable products of generalized countably compact spaces. Pacific J Math，1975(57)：183～197

[23]　Van Douwen E，Wicke H. A real，weird topology of the reals. Houston J Math，1977，(3)：141～152

[24]　Fleissner W，Reed G. Paralindelof spaces and spaces with a σ-locally countable base. Top Proc，1977，(2)：89～11

[25] 高国士.关于闭包保持和定理.数学学报,1986,(29):58~62

[26] Tanaka Y. Metrization Ⅱ. In:Morita K,Nagata J,Topics in General Topology,Amsterdam,North-Holland,1989,275~314

[27] 林寿.广义度量空间与映射.北京:科学出版社,1995

[28] Steen L,Seebach J. Counterexamples in Topology(Second Edition). New York:Springer-Verlag,1978

TOPOLOGICAL SPACES AND ITS OPERATIONS

Lin Shou

(Dept. of Math. Ningde Teachers College,Fujian 352100)

Abstract In this paper a survey is given on some operations of more than one hundred topological space classes which play a certain role in study of theory of topological spaces,which includes Tychonoff product property,hereditary property,sum property and local property.

Key words topological space;tychonoff product property;hereditary property;sum property;local property;counterexample.

·学术动态·

中国高校自然科学学报研究会高专分会第三次代表大会在南京召开

中国高校自然科学学报研究会高专分会第三次代表大会于 1996 年 4 月 14 日至 18 日在南京召开,来自全国 20 个省、市、自治区的 69 名代表出席了会议。会议的承办单位海军医专校长赵增荣教授到会致贺;中国高校自然科学学报研究会副理事长曹振中、钟学恒、钱文霖等领导同志到会指导,并作了重要讲话。曹振中教授对高专学报近年来取得的成绩给予了充分的肯定和较高的评价,并向与会代表介绍了高专学报的优秀代表、全国高校优秀学报一等奖获得者《黄淮学刊·自然科学版》的办刊经验。

高专分会第一届副主任黄义强主持开幕式,周少明副主任致开幕词,何济华主任代表首届理事会作工作报告,总结了理事会的工作情况,分析了当前高专学报存在的困难与问题,提出了这次会议的目标和任务。钱文霖编审就提高学报质量、编排规范化和标准化等问题作了专题讲座,受到与会代表的欢迎与好评。

会议期间,在国家教委组织的全国高校优秀学报评比中荣获一等奖的专科学报代表介绍了办刊经验,并进行了高专学报的展示交流。会议还以学会的名义进行了优秀专科学报和优秀编辑学论文的评比,有 6 家高专学报获优秀学报奖,18 家学报获学报质量进步奖,34 篇论文分获优秀论文一、二等奖。通过交流与评比,既使与会代表看到了高专学报取得的成绩,也发现了在办刊条件、学术质量,编印质量等方面存在的问题,找到了今后努力的方向。

会议在充分酝酿、民主推荐的基础上,选举产生了高专分会第二届理事会,理事会由 31 人组成,何济华同志再次当选为理事长。本刊编辑徐明忠同志当选为新一届理事会理事。会议期间,还召开了二届一次理事工作会议,研究了工作计划,拟于 1997 年在上海纺专召开二届二次理事工作会议。大会还拟于 1996 年出版全国高专优秀编辑学论文集。

大会对会议承办单位海军医专及到会服务的同志表示衷心的感谢!