第 25 卷第 6 期　　数　学　进　展　　Vol.25, No.6
1996 年 12 月　　ADVANCES IN MATHEMATICS　　Dec., 1996

关于序列覆盖 s 映射

林　寿

(宁德，师专数学系，宁德，福建， 352100)

摘要　本文定义了两类序列覆盖映射，讨论了度量空间的序列覆盖 s 映象．特别地，我们证明了空间 X 具有点可数弱基当且仅当 X 是度量空间的 1 序列覆盖的商 s 映象，这回答了 1970 年 T.Hoshina 提出的一个问题．

关键词　弱基；序列邻域；序列开集；序列覆盖映射；商映射； s 映射

1 定义及定理

Ponomarev 曾证明具有点可数基的空间可刻画为度量空间的开 s 映象 [1]. Hoshina 曾试图解决问题 [2]: 具有点可数弱基的空间可刻画为度量空间在怎样的映射下的象？本文通过定义一类序列覆盖映射回答了 Hoshina 的问题．我们约定：所讨论空间均满足 T_2 分离性公理， N 表示自然数集，映射指连续的满函数．

定义 1.1　设 $f:X\to Y$,

(1) f 称为子序列覆盖映射 [3], 若 K 是 Y 中含极限点的收敛序列，那么存在 X 的紧子集 L 使得 $f(L)$ 是 K 的子序列．

(2) f 称为 1 序列覆盖映射，若对 $y\in Y$ 存在 $x\in f^{-1}(y)$ 满足条件：如果在 Y 中 $y_n\to y$, 那么存在 $x_n\in f^{-1}(y_n)$ 使得在 X 中 $x_n\to x$.

(3) f 称为 2 序列覆盖映射，若对 $y\in Y$ 及 $x\in f^{-1}(y)$, 如果在 Y 中 $y_n\to y$, 那么存在 $x_n\in f^{-1}(y_n)$ 使得在 X 中 $x_n\to x$.

定义 1.2[4]　对空间 X, 设 $P\subset X$. P 称为点 x 在 X 中的序列邻域，若在 X 中 $x_n\to x$, 那么存在 $k\in N$ 使得 $\{x\}\cup\{x_n:n\geq k\}\subset P$; P 称为 X 的序列开集，若 P 是 P 中每一点的序列邻域． X 称为序列空间，若 X 的每一序列开集是 X 的开集．

定义 1.3　设 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_x:x\in X\}$ 是空间 X 的子集族，它满足：对 $x\in X$,

(1) $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的网，即 $x\in\cap\mathcal{P}_x$ 且对 X 中含 x 的开集 G, 存在 $P\in\mathcal{P}_x$ 使得 $P\subset G$.

(2) 如果 U 、 $V\in\mathcal{P}_x$, 那么存在 $W\in\mathcal{P}_x$ 使得 $W\subset U\cap V$.

$\mathcal{P}$ 称为 X 的弱基 [1], 若 $G\subset X$ 使得对 $x\in G$ 存在 $P\in\mathcal{P}_x$ 有 $P\subset G$, 那么 G 是 X 的开集； $\mathcal{P}$ 称为 X 的序列邻域网，若 $\mathcal{P}_x$ 的每一元是 x 在 X 中的序列邻域； $\mathcal{P}$ 称为 X 的序列开网，若 $\mathcal{P}_x$ 的每一元是 X 的序列开集．上述 $\mathcal{P}_x$ 分别称为 x 在 X 中的弱基、序列邻域网和序列开网．

收稿日期： 1994-10-27.

国家自然科学基金委数学天元基金合作访问项目．

本文的主要结果是：

定理 1.4　(1) 空间 X 具有点可数弱基当且仅当 X 是度量空间的 1 序列覆盖的商 s 映象.

(2) 空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是度量空间的 2 序列覆盖的商 s 映象.

2 具有点可数弱基的空间

我们先证明几条引理以建立度量空间与具有点可数序列邻域网的空间的联系. 由定义 1.3 易验证：

引理 2.1　(1) 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的弱基，则 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列邻域网.

(2) 若 $\mathcal{P}$ 是序列空间 X 的序列邻域网，则 $\mathcal{P}$ 是 X 的弱基.

引理 2.2　设 $f: X \to Y$. 如果 $\{B_n : n \in N\}$ 是 X 中某点 x 的下降的网且每一 $f(B_n)$ 是 $f(x)$ 在 Y 中的序列邻域，若在 Y 中 $y_n \to f(x)$, 那么存在 $x_n \in f^{-1}(y_n)$ 使得在 X 中 $x_n \to x$.

证　对 $n \in N$, 由于 $f(B_n)$ 是 $f(x)$ 的序列邻域，存在 $i(n) \in N$ 使得当 $i \geq i(n)$ 时有 $y_i \in f(B_n)$, 那么 $f^{-1}(y_i) \cap B_n \neq \phi$. 不妨设 $1 < i(n) < i(n+1)$. 对 $j \in N$, 置

$$x_j \in \begin{cases} f^{-1}(y_j), & j < i(1), \\ f^{-1}(y_j) \cap B_n, & i(n) \leq j < i(n+1), n \in N, \end{cases}$$

那么 $x_j \in f^{-1}(y_j)$, 且在 X 中 $x_j \to x$.

命题 2.3　空间 X 具有点可数的序列邻域网当且仅当 X 是度量空间的 1 序列覆盖的 s 映象.

证　设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点可数的序列邻域网. 记 $\mathcal{P} = \{P_\alpha : \alpha \in A\}$, 置

$$M = \{\beta = (\alpha_i) \in A^\omega : \{P_{\alpha_i} : i \in N\}\text{是}X\text{中某点}x(\beta)\text{的网}\},$$

并且赋予 M 是离散空间 A 的可数积 A^ω 的子空间拓扑，那么 M 是度量空间. 通过 $f(\beta) = x(\beta)$ 所定义的函数 $f: M \to X$ 是从 M 到 X 上的 s 映射 [5. 命题 2.7.1], 往证 f 是 1 序列覆盖映射. 对 $x \in X$, 让 $\{P_{\alpha_i} : i \in N\} \subset \mathcal{P}$ 是点 x 在 X 中的序列邻域网，记 $\beta = (\alpha_i) \in A^\omega$, 那么 $\beta \in f^{-1}(x)$. 对 $n \in N$, 置

$$B_n = \{(\gamma_i) \in M : \text{对 } i \leq n \text{ 有 } \gamma_i = \alpha_i\},$$

那么 $\{B_n : n \in N\}$ 是 β 在 M 中下降的邻域基，且对 $n \in N$ 有 $f(B_n) = \cap_{i \leq n} P_{\alpha_i}$. 事实上，设 $\gamma = (\gamma_i) \in B_n$, 那么 $f(\gamma) = \cap_{i \in N} P_{\gamma_i} \subset \cap_{i \leq n} P_{\alpha_i}$. 所以 $f(B_n) \subset \cap_{i \leq n} P_{\alpha_i}$. 再设 $z \in \cap_{i \leq n} P_{\alpha_i}$, 选取 $\mathcal{P}$ 的子族 $\{P_{\delta_i} : i \in N\}$, 使当 $i \leq n$ 时有 $\delta_i = \alpha_i$, 且 $\{P_{\delta_i} : i \in N\}$ 是点 z 在 X 中的网，令 $\delta = (\delta_i) \in A^\omega$, 那么 $z = f(\delta) \in f(B_n)$, 于是 $\cap_{i \leq n} P_{\alpha_i} \subset f(B_n)$, 故 $f(B_n) = \cap i \leq n P_{\alpha_i}$. 现在，设在 X 中 $x_j \to x$, 由于 $f(B_n)$ 是 x 的序列邻域，再由引理 2.2 知存在 $\beta_j \in f^{-1}(x_j)$, 且在 M 中 $\beta_j \to \beta$, 故 f 是 1 序列覆盖映射.

反之，设 M 是度量空间且 $f: M \to X$ 是 1 序列覆盖的 s 映射，而 $\mathcal{B}$ 是 M 的 σ 局部有限基. 对 $x \in X$, 存在 $\beta_x \in f^{-1}(x)$ 满足定义 1.1(2). 置

$$\mathcal{P}_x = \{f(B) : \beta_x \in B \in \mathcal{B}\}, \qquad \mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_x : x \in X\},$$

则可直接验证 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数的序列邻域网.

引理 2.4[3] 设 $f: X \to Y$ 是子序列覆盖映射，如果 Y 是序列空间，那么 f 是商映射.

定理 2.5 空间 X 具有点可数弱基当且仅当 X 是度量空间的 1 序列覆盖的商 s 映象.

证 设 X 具有点可数弱基，则 X 是序列空间 [1], 由引理 2.1, 命题 2.3 和引理 2.4, X 是度量空间的 1 序列覆盖的商 s 映象. 若 X 是度量空间的 1 序列覆盖的商 s 映象，由命题 2.3 和引理 2.1,X 具有点可数弱基.

3 具有点可数基的空间

本节用 2 序列覆盖映射刻画具有点可数基的空间，同时举几个例子说明几种序列覆盖映射类的一些不蕴含关系. 由定义 1.1 和 1.2 易直接验证

引理 3.1 设 $f: X \to Y$, 考虑下述条件：

(1) f 是 2 序列覆盖映射；

(2) 对 $x \in P \subset X$, 若 P 是 x 的序列邻域，那么 $f(P)$ 是 $f(x)$ 的序列邻域；

(3) 若 P 是 X 的序列开集，那么 $f(P)$ 是 Y 的序列开集；

则 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3), 若 X 是第一可数空间，则 (3) $\Rightarrow$ (1).

推论 3.2 设 $f: X \to Y$, 若 X 是第一可数空间，那么 f 是开映射当且仅当 f 是 2 序列覆盖的商映射.

沿用命题 2.3 的证明方法及引理 3.1, 有：

命题 3.3 空间 X 具有点可数序列开网当且仅当 X 是度量空间的 2 序列覆盖 s 映象.

由推论 3.2 或命题 3.3, 有：

定理 3.4 空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是度量空间的 2 序列覆盖的商 s 映象.

在文献中关于序列覆盖映射有其他的一些论述. 如 Siwiec[6] 称 $f: X \to Y$ 是序列覆盖映射；若 Y 中的序列 $y_n \to y$, 那么存在 $x_n \in f^{-1}(y_n)$ 使得在 X 中 $x_n \to x \in f^{-1}(y)$; Boone 和 Siwiec[7] 称 $f: X \to Y$ 是序列商映射，若 Y 中的序列 $y_n \to y$, 那么存在子序列 $\{y_{n_i}\}$ 及 $x_i \in f^{-1}(y_{n_i})$ 使得在 X 中 $x_i \to x \in f^{-1}(y)$. 显然， 2 序列覆盖映射 $\Rightarrow$1 序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 序列商映射 $\Rightarrow$ 子序列覆盖映射.

例 3.5 子序列覆盖映射 $\not\Rightarrow$ 序列商映射.

设 $X = \beta N, Y = \{0\} \cup \{1/n : n \in N\}$. 定义 $f: X \to Y$ 使得 $f(\beta N \setminus N) = \{0\}$ 且 $f(n) = 1/n$, 那么 f 是子序列覆盖映射，但 f 不是序列商映射.

例 3.6 序列商映射 $\not\Rightarrow$ 序列覆盖映射.

设 X 是 Gillman-Jerison 空间 $\psi(N)$ [5, 例 1.8.4], $Y = \{0\} \cup \{1/n : n \in N\}$, 定义 $f: X \to Y$ 使得 $f(\psi(N) \setminus N) = \{0\}$ 且 $f(n) = 1/n$, 则 f 满足例 3.6 的要求.

例 3.7 序列覆盖映射 $\not\Rightarrow$ 1 序列覆盖映射.

设 Y 是序列扇 S_w[5,例1.8.7], 记 T_n 为 S_w 的前 n 个收敛数列组成的子空间，取 $X = \bigoplus_{n \in N} T_n$, 定义 $f: X \to Y$ 是自然映射，则 f 满足例 3.7 的要求.

例 3.8 1 序列覆盖映射 $\not\Rightarrow$ 2 序列覆盖映射.

设 Y 是 Arens 空间 S_2[5,例1.8.6], 由定理 2.5, 存在度量空间 X 和 1 序列覆盖的商 s 映射 $f: X \to Y$. 由定理 3.4, f 不是 2 序列覆盖映射.

例 3.9 2 序列覆盖映射 $\not\Rightarrow$ 商映射.

设 $Y = \beta N, X$ 是集 βN 赋予离散拓扑， $f: X \to Y$ 是恒等映射，则 f 满足例 3.9 的要求.

例 3.10 开映射 $\not\Rightarrow$ 子序列覆盖映射.

设 $X = \{0\} \cup N^2$, 对 $n, i \in N$, 令 $V(n,i) = \{(n,k) \in N^2 : k \geq i\}$. 集合 X 赋予拓扑： N^2 中的点是 X 的孤立点， 0 点的开邻域基中的元形如 $\{0\} \cup (\cup_{n \geq m} V(n, i_n))$, 其中 $m, i_n \in N$. 让 $Y = \{0\} \cup \{1/n : n \in N\}$, 定义 $f: X \to Y$ 使得 $f(0) = 0$ 且 $f((n,i)) = 1/n$, 则 f 是满足例 3.10 的映射.

本文是作者参加数学天元基金合作访问项目期间完成的，感谢刘应明教授的帮助.

参考文献

1 Arhangel'skii A. Mappings and spaces. *Russian Math. Surveys*, 1966, 21(4): 115–162.

2 Hoshina T. On the quotient s-images of metric spaces. *Sci. Dep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sec. A*, 1970, 10: 265–268.

3 Lin Shou, Liu Chuan, Dai Mumin. Images on locally separable metric spaces. *Acta Math. Sinica.*

4 Franklin S P. Spaces in which sequences suffice. *Fund. Math.*, 1965, 57: 107–115.

5 林寿. 广义度量空间与映射. 北京：科学出版社， 1995.

6 Siwiec F. Sequence-covering and countably-bi-quotient mappings. *General Topology Appl.*, 1971, 1: 143–154.

7 Boone J R, Siwiec F. Sequentially quotient mappings. *Czech. Math. J.*, 1976, 26: 174–182.

On Sequence-covering s-mappings

Lin Shou

(*Ningde Teachers' College, Ningde, Fujian, 352100*)

Abstract In this paper two sequence-covering mappings are introduced, and sequence-covering s-images of metric spaces are discussed. Particularly, we show that a space has a point-countable weak base if and only if it is an l-sequence-covering quotient s-image of a metric space, which answers a problem posed by T. Hoshina in 1970.

Key words weak base; sequential neighborhood; sequential open set; sequence-covering map; quotient map; s-map