第4卷第3期 苏州大学学报 Vol.4 No.3
1988年7月 JOURNAL OF SUZHOU UNIVERSITY Jul. 1988

k-半分层空间的注记

林 寿*

（福建省宁德师范专科学校）

摘 要 本文讨论k-半分层空间与一些其它广义度量空间之间的关系，我们证明了下列定理：

(1) k-半分层空间是σ-空间.

(2) *Frèchet*的k-半分层空间是分层空间.

(3) *ortho*-紧的k-半分层空间具有σ-闭包保持k-网.

(1)和(2)分别地改进了*Heath*、*Hodel*和*Lutzer*，*Foged*的结果.(3)部份地回答了高国士的一个问题.

关键词：k-半分层空间，σ-空间，k-网，*Frèchet*空间，分层空间，*ortho*-紧空间.

§1 引 言

k-半分层空间是*Lutzer*（[1]）为回答："在什么条件下，一个半度量空间是分层空间？"而引进的. *Lutzer*证明了"一个半度量空间是分层空间当且仅当它是一个k—半分层空间."k-半分层空间具有很多良好的性质，它是分层空间的一种推广. *Heath*（[2]）证明了"每一个分层空间是σ-空间."于是产生了下述问题：

问题 1 k-半分层空间是否是σ-空间？

高国士（[3]）证明了"一个空间是k-半分层空间当且仅当它具有σ-胶垫对k-网"和"在正则r-空间类中，一个空间具有σ-胶垫对k-网当且仅当它具有σ-闭包保持k-网."考虑到*E. A. Michael*关于仿紧性的几个刻划及*J. Ceder*的M_i—空间（$i=1, 2, 3$）问题. 在[3]中，高国士提出了下述问题：

问题 2 一个空间是k-半分层空间是否等价于它具有σ-闭包保持k-网？

---

* 数学系84级研究生.

本文于1987年10月3日收到.

在§2中，我们先给出k-半分层空间的一个特征（命题2.2），然后利用这个特征立刻得出k-半分层空间是σ-空间（定理2.3）。肯定地回答了第一个问题。在§3中，我们先证明了$Frechet$的k-半分层空间是分层空间（定理3.2）。它一方面改进了$Lutzer$（[1]，定理3.2），$Foged$（[4]，定理11.4）的结果；另一方面说明了在$Frechet$空间类中，问题2的回答是肯定的（推论3.3）。这后一结果改进了高国士的结果（[3]，定理2），最后，我们证明了在$ortho$-紧空间类中，问题2的回答也是肯定的。（定理3.4）。

在本文中，所有空间至少是T_1正则的。N表示正整数集。(x_n)表示一个序列，它的第n项是x_n。

§2 k—半分层空间是σ—空间

定义2.1 （$Lutzer$[1]）拓扑空间X称为k-半分层空间（k-semistratifiable space），如果对于X的每一个开子集U，存在X的一个闭子集的序列$\{F(n,U)\}_{n\in N}$使得

a) $\bigcup_{n\in N}F(n,U)=U$；

b) $F(n,U)\subset F(n+1,U)$，$n\in N$；

c) 如果K是X的紧子集且$K\subset U$，那么存在$n\in N$使得$K\subset F(n,U)$；

d) 如果V是X的另一开子集且$U\subset V$，那么

$$F(n,U)\subset F)(n,V),\ n\in N.$$

对应$U\to\{F(n,U)\}_{n\in N}$称为X的k-半分层对应（k-semistratification）。

命题2.2 对于拓扑空间$(X,\mathscr{T})$，下列条件等价：

a) X是一个k-半分层空间。

b) 存在函数g：$N\times X\to\mathscr{T}$使得

1) 对于每一$n\in N$和$x\in X$，$x\in g(n+1,x)\subset g(n,x)$；

2) 如果$x_n\in g(n,y_n)$且$x_n\to p$，那么$y_n\to p$。

证 a)→b) 设$U\to\{F(n,U)\}_{n\in N}$是正则空间$(X,\mathscr{T})$的k-半分层对应。对于每一$n\in N$和$x\in X$，置

$$g(n,x)=X\backslash F(n,X\backslash\{x\}).$$

那么1)是显然成立的。假设$x_n\in g(n,y_n)$且$x_n\to p$。让U是点p的一个开邻域。那么存在$k\in N$使得$\{p\}\cup\{x_n|n\geqslant k\}\subset U$，因为$\{p\}\cup\{x_n|n\geqslant k\}$是$X$的紧子集，所以存在$m\geqslant k$使得$\{p\}\cup\{x_n|n\geqslant k\}\subset F(m,U)$。于是对于每一$n\geqslant m$，$y_n\in U$。从而$y_n\to p$。故2)也成立。

b)→a) 对于每一$n\in N$和X的开子集U，置

$$F(n,U)=X\backslash\bigcup\{g(n,x)|x\in X\backslash U\}.$$

为了证明$U\to\{F(n,U)\}_{n\in N}$是空间X的一个k-半分层对应，只需证明定义2.1的c）成立。设K是X的紧子集，U是X的开子集且$K\subset U$，如果对于所有的$n\in N$，$K\not\subset F$

(n, U)，那么存在K的子集$\{x_n \mid n \in N\}$使得

$$x_n \in K \setminus F(n, U) = K \cap (\cup \{g(n, x) \mid x \in X \setminus U\}).$$

一方面，存在$y_n \in X \setminus U$使得$x_n \in g(n, y_n)$；另一方面，从$b)$知X是一个半分层空间(*semistratifiable space*)([5])，于是X的任何子集都具有G_δ-对角线，从而X的紧子集K是紧可度量化子空间，因而K是一个序列紧空间(*sequential compact space*)。不失一般性，可以假设$x_n \to x_0 \in K \subset U$。这与条件2)相矛盾。所以$X$是一个$k$-半分层空间。

定理2.3 k-半分层空间是σ-空间。

证 在[6]中，*Heath*，*Hodel*证明了一个空间$(X, \mathscr{T})$是一个σ-空间当且仅当存在函数$g: N \times X \to \mathscr{T}$满足：

1)对于每一$n \in N$和$x \in X$，$x \in g(n+1, x) \subset g(n, x)$；

2)如果$p \in g(n, x_n)$且$x_n \in g(n, y_n)$，那么$y_n \to p$。

从命题2.2和上述*Heath*，*Hodel*的定理，立刻得出每一个k-半分层空间是σ-空间。

§3 半分层空间与具有σ—闭包保持k—网的空间

在这一节里，先证明：*Frechet*的k-半分层空间的分层空间，从而得到问题2的一个部份解答：在*Frechet*空间，问题2有肯定的答案。此外，又证明了：在*ortho*-紧空间，问题2也有肯定的答案。

空间X的有序集对(F_1, F_2)组成的集族$\mathscr{F}$称为对k-网(*pair k-network*)，这里$F_1 \subset F_2$，F_1是闭集，如果对X的每一开子集U和紧子集$K \subset U$，存在$\mathscr{F}$中的有限个元：$(F_1^{(i)}, F_2^{(i)})(i \leqslant n)$使得$K \subset \cup_{i \leqslant n} F^{(i)} \subset \cup_{i \leqslant n} F_2^{(i)} \subset U$。此外，$\mathscr{F}$称为胶垫的(*cushioned*)，如果对任何$\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$，

$$(\cup \{F_1 \mid (F_1, F_2) \in \mathscr{F}'\})^- \subset \cup \{F_2 \mid (F_1, F_2) \in \mathscr{F}'\}.$$

引理3.1 (高国士[3]) 空间X是k-半分层的当且仅当X具有σ-胶垫对k-网。

拓扑空间X称为*Frechet*空间，如果对于X的任一子集A及点$x \in \overline{A}$，存在由A的点组成的序列(x_n)使得$x_n \to x$。空间X称为单调正规空间(*monotonically normal space*)([6])，如果对于X的任一互不相交的闭子集对(H, K)，存在X的开子集$D(H, K)$使得

$a)$ 如果$H \subset H'$且$K \supset K'$，那么$D(H, K) \subset D(H', K')$；

$b)$ $H \subset D(H, K) \subset \overline{D(H, K)} \subset X \setminus K$。

函数D被称为X的单调正规算子(*monotonically normal operator*)。

定理3.2 *Frechet*的k-半分层空间是分层空间(*stratifiable space*)。

证 因为一个空间是分层空间当且仅当它是单调正规的半分层空间([7])。从定义知，k-半分层空间是半分层空间。于是只须证明*Frechet*的k-半分层空间，是单调正规空间，设X是一个*Frechet*的k一半分层空间，由引理3.1，让$\cup_{n \in N} \mathscr{F}_n$是$X$的$\sigma$-胶垫对$k$-网。如果$(H, K)$是$X$的一对互不相交的闭子集，

令

$$U_n=\bigcup\{F_1\mid(F_1,\ F_2)\in\bigcup_{i<n}\mathscr{F}_i,\ F_2\cap K=\phi\}\setminus$$
$$\bigcup\{F_1\mid(F_1,\ F_2)\in\bigcup_{i<n}\mathscr{F}_i,\ F_2\cap H=\phi\},\ n\in N;$$

$$D(H,\ K)=(\bigcup_{n\in N}U_n)^{\circ}.$$

下面验证D是X的单调正规算子，

显然，如果$H\subset H'$，$K\supset K'$，那么$D(H,\ K)\subset D(H',\ K')$。如果$H\not\subset D(H,\ K)$，那么存在$x\in H\setminus(D(H,\ K)\cup K)=H\setminus((\bigcup_{i\in N}U_i)^{\circ}\cup K)\subset$ $\overline{(X\setminus K)\cap(X\setminus\bigcup_{i\in N}U_i)}\cap H$。由于$X$是$Frechet$空间，存在$X$的子集$\{x_n\mid n\in N\}\subset X\setminus(K\cup\bigcup_{i\in N}U_i)$使$x_n\to x$。故$X$的紧子集$\{x\}\cup\{x_n\mid n\in N\}\subset X\setminus K$(开集)。所以存在$\mathscr{F}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$中的有限个元：$(F_1^{(i)},\ F_2^{(i)})(i\leqslant m)$使得

$$\{x\}\cup\{x_n\mid n\in N\}\subset\bigcup_{i\leqslant m}F_1^{(i)}\subset\bigcup_{i\leqslant m}F_2^{(i)}\subset X\setminus K.$$

于是存在$i_0\leqslant m$及(x_n)的子序列(x_{n_j})使得

$$\{x_{n_j}\mid j\in N\}\subset F_1^{(i_0)}\subset F_2^{(i_0)}\subset X\setminus K.$$

从而$F_2^{(i_0)}\cap K=\phi$。另一方面，存在$k\in N$使$(F_1^{(i_0)},\ F_2^{(i_0)})\in\mathscr{F}_k$。因为$x\in H$，所以 $x\in X\setminus\bigcup\{F_2\mid(F_1,\ F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,\ F_2\cap H=\phi\}$

$$\subset X\setminus\overline{\bigcup\{F_1\mid(F_1,\ F_2\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,\ F_2\cap H=\phi\}}.$$

因而存在$n_0\in N$，当$j\geqslant n_0$时，

$$x_{n_j}\in X\setminus\overline{\bigcup\{F_1\mid(F_1,\ F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,\ F_2\cap H=\phi\}}.$$
$$\subset X\setminus\bigcup\{F_1\mid(F_1,\ F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,\ F_2\cap H=\phi\}.$$

这时，$x_{n_j}\in F_1^{(i_0)}\setminus\bigcup\{F_1\mid(F_1,\ F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,\ F_2\cap H=\phi\}\subset U_k$。于是$U_k$含有无限项的$x_n$，这与$(x_n)$的取法矛盾。故$H\subset D(H,\ K)$。

最后，证明$\overline{D(H,\ K)}\subset X\setminus K$。若$\overline{D(H,\ K)}\not\subset X\setminus K$，则存在$x\in\overline{D(H,\ K)}\cap K\cap(X\setminus H)\subset\overline{D(H,K)\setminus H}\cap K$。所以有$X$的子集$\{x_n\mid n\in N\}\subset(\bigcup_{i\in N}U_i)^{\circ}\setminus H$使得$x_n\to x$。于是存在$(x_n)$的子序列$(x_{n_j})$及$(F_1',\ F_2')\in\mathscr{F}_m$使得

$$x_{n_j}\in F_1',\ F_2'\cap H=\phi,\ j\in N.$$

因而$U_k\subset X\setminus F_1'(k\geqslant m)$。所以当$k\geqslant m$时，$x_{n_j}\notin U_k$。故 $x_{n_j}\in\bigcup_{i<m}U_i$，于是 $x\in\overline{\bigcup_{i<m}U_i}=\bigcup_{i<m}\overline{U_i}$，从而存在$i_0<m$使$x\in\overline{U}_{i_0}\subset\bigcup\{F_2\mid(F_1,F_2)\in\bigcup_{i<i_0}\mathscr{F}_i,$ $F_2\cap K=\phi\}\subset X\setminus K$。

这与$x\in K$相矛盾。因此$\overline{D(H,\ K)}\subset X\setminus K$。$X$是单调正规空间。

注记　$Lutzer$([1])证明了第一可数的k-半分层空间是分层空间。$Foged$(见[4]，定理11.4)证明了$Frechet$的$\aleph$-空间是分层空间。因为第一可数空间是$Frechet$空间，$\aleph$-空间是k-半分层空间([1])。所以定理3.2改进了$Lutzer$和$Foged$的结果。另一方面，$Foged$构造了一个k-$\aleph$-空间，它不是正规空间([8]，例3.3)，而分层空间是正规空间，从而说明了一个k-半分层空间，即使它是一个k-空间，也未必是分层空间。

因为分层空间是M_2-空间([9])，而M_2空间具有σ-闭包保持k-网，所以从定理3.2和引理3.1得到了下述推论，它说明了在$Frechet$空间类中，问题2有肯定的答案。

推论3.3 设X是一个$Frechet$空间，则X具有σ-闭包保持k-网当且仅当X是一个k-半分层空间。

由于在具有点G_δ的正则空间中，r-性质等价于第一可数性([1]，命题3.3)，而第一可数空间是$Frechet$空间，k-半分层空间具有点G_δ性质，于是推论3.3改进了高国士[3]中的定理2.

拓扑空间X称为ortho-紧的(orthocompact)，如果X的任一开复盖存在内核保持(interior-preserving)的开加细。

定理3.4 设X是ortho-紧的k-半分层空间，那么X具有σ-闭包保持k-网。

证 因为X是k-半分层空间，由命题2.2知存在函数g：$N\times X\to\mathscr{T}$使得

1) 对于每一$n\in N$和$x\in X$，$x\in g(n+1,x)\subset g(n,x)$；

2) 如果$x_n\in g(n,y_n)$ 且$x_n\to p$，那么$y_n\to p$.

置$g^2(n,x)=\cup\{g(n,y)\mid y\in g(n,x)\}$，$g^3(n,x)=\cup\{g(n,y)\mid y\in g^2(n,x)\}$.
那么g^3：$N\times X\to\mathscr{T}$满足：如果$x_n\in g^3(n,y_n)$，$x_n\to p$，则$y_n\to p$.
证明如下. 设$x_n\in g^3(n,y_n)$，$x_n\to p$，那么存在X的序列(z_n)和(l_n)使得$x_n\to p$，$x_n\in g(n,z_n)$，$z_n\in g(n,l_n)$，和$l_n\in g(n,y_n)$. 由于g满足2)，所以$y_n\to p$. 现在，对于每一$n\in N$，记

$$\mathscr{U}_n=\cup\{g(n,x)\times\{x\}\mid x\in X\},$$

$\mathscr{U}_n$是Junnila[9]意义下的neighbornet. 因为k-半分层空间是半分层空间且X是ortho-紧的，由Junnila[9]推论4.13知存在X的内核保持的开复盖$\mathscr{V}_n$使得对于每一$x\in X$有 $\cap\{V\in\mathscr{V}_n\mid x\in V\}\subset g^3(n,x)$. 令$h(n,x)=\cap\{V\in\mathscr{V}_n\mid x\in V\}$，那么$h$：$N\times X\to\mathscr{T}$且满足：

a) $x\in h(n,x)$；

b) 若$x_n\in h(n,y_n)$，$x_n\to p$，那么$y_n\to p$；

c) 若存在$n\in N$使$y\in h(n,x)$，那么$h(n,y)\subset h(n,x)$.

因为$x\in h(n,x)\subset g^3(n,x)$，所以a)，b)是显然的. 还需证明$h$有性质c). 设存在$n\in N$使$y\in h(n,x)$，如果$h(n,y)\not\subset h(n,x)$，那么存在$z\in\cap\{V\in\mathscr{V}_n\mid y\in V\}\setminus h(n,x)$. 由于$z\notin h(n,x)$，存在$V_0\in\mathscr{V}_n$使$x\in V_0\subset X\setminus\{z\}$，又由于$y\in h(n,x)$，所以$y\in V_0$，故$z\in V_0$. 矛盾. 因而$h$确实有性质a)—c). 最后，我们通过$h$来构造$X$的$\sigma$-闭包保持$k$-网. 对于每一$n\in N$，置

$$\mathscr{H}_n=\{h(n,x)\mid x\in X\},$$

$$\mathscr{F}_n=\{X\setminus\cup\mathscr{H}_n'\mid\mathscr{H}_n'\subset\mathscr{H}_n\}.$$

对于X的紧子集K和开子集$U\supset K$. 如果对于每一个$n\in N$，$K\cap(\cup\{h(n,x)\mid x\in X\setminus U\})\neq\phi$，那么存在序列$(x_n)$，$(y_n)$使得$x_n\in K\cap h(n,y_n)$，$y_n\in X\setminus U$. 因为$(x_n)$是$k$-半分层空间$X$的紧子集$K$的一个序列，$k$-半分层空间具有$G_\delta$-对角线，从而其紧子空间是可度量化空间，从而是序列紧的. 于是(x_n)存在收敛的子序列. 不妨设$x_n\to p$. 由于h具有性质b)，所以$y_n\to p\in K\subset U$. 这与所有的$y_n\in X\setminus U$且U是X的开子集相矛盾. 故存在$n_0\in N$使$K\cap(\cup\{h(n_0,x)\mid x\in X\setminus U\})=\phi$. 置

$$\mathscr{H}_{n_0}=\{h(n_0,\ x)\mid x\in X\setminus U\}.$$

那么$K\subset X\setminus\bigcup\mathscr{H}'_{n_0}\subset U$。从而$\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$是$X$的$k$-网。对于任意的$\mathscr{H}_n'\subset\mathscr{H}_n$，若$y\in\mathscr{H}_n'$，由于$h$具有性质$c$)知$h(n,\ y)\subset\bigcap\mathscr{H}_n'$，所以$\bigcap\mathscr{H}_n'$是$X$的开子集。故$\{\bigcap\mathscr{H}_n'\mid\mathscr{H}_n'\subset\mathscr{H}_n\}$是$X$的内核保持集族，从而$\mathscr{F}_n$是$X$的闭包保持集族。综上所述知$\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$是$X$的$\sigma$-闭包保持$k$-网。

在本文的写作过程中，高国士教授给予作者许多的帮助，陈必胜副教授也提出了有价值的建议，在此表示感谢。

参　考　文　献

[1] D. J. Lutzer, *Semimetrizable and stratifiable spaces*, Gen. Top. Appl., 1(1971), 43—48.

[2] R.W.Heath, *Stratifiable spaces are σ-spaces*, Notices Amer. Math. Soc., 17(1969), 761.

[3] 高国士，关于k-网和基，苏州大学学报，2(1986)，107—111.

[4] G. Gruenhage, *Generalized metric spaces*, Handbook of Set-Theoretic Topology, Elserier Science Publishers B.V., 1984, 432—501.

[5] G. Greede, *Concerning semi-stratifiable spaces*, Pacific J. Math., 22(1970), 47—54.

[6] R.W.Heath and R.E.Hodel, *Characterizations of σ-spaces*, Fund. Math., 77(1973), 271—275.

[7] R. W. Heath, D. J. Lutzer and P. L. Zenor, *Monotonically normal spaces*, Trans. Amer. Math.Soc., 178(1973), 481—493.

[8] L. Foged, *Normality in k-and-ℵ-spaces*, Top. Appl., 22(1986), 223—240.

[9] H. J. K. Junnila, *Neighbornets*, Pacific J. Math., 76(1978), 83—108.

A Note on k-Semistratifiable Spaces

Lin Shou

(Ningde Teachers' College, Fujian)

Abstract: *In this paper, we disscuss the relationships between K-semistratifiable spaces and some generalized metric spaces. The following theorems are obtained*:

(1) *every k-semistratifiable space is a σ-space.*

(2) *every Frechet-and-k-semistratifiable space is a stratifiable space.*

(3) *every orthocompact k-semistratifiable space is the space with σ-closure-preserving k-network.*

(1) *and* (2) *improve Heath, Hodel and Lutzer, Foged's results, respectively.* (3) *partially answers Kuo-shin Kao's problem.*

Keywords: *k-semistratifiable space, σ-space, k-network, Frechet space, stratifiable space, orthocompact space.*