第 11 卷第 2 期 黄 淮 学 刊 Vol. 11 No. 2
1995 年 6 月 HUANGHUAI JOURNAL June, 1995

具有确定局部可数覆盖的空间*

林 寿

（宁德师专数学系，福建宁德，352100）

摘 要 本文讨论具有确定局部可数覆盖空间的性质，获得了具有局部可数(modL)-基空间的特征，建立了局部可数 k-网络空间的完备逆映象定理.

关键词 局部可数集族 (modL)-基 k-网络 cs-网络.

中图分类号 O189.1

1966 年苏联数学家 Fedorcük[1] 对于具有 σ—局部可数基空间的度量化问题开创性的探索揭开了利用局部可数集族研究一般拓扑学的序幕. 1976 年 Charlesworth[2] 用局部可数基刻划了局部可分的度量空间，以及 1977 年 Fleissner 和 Reed[3] 用局部可数开加细定义了仿 Lindelöf 空间等都进一步说明了局部可数覆盖是研究一般拓扑学的有力工具.

近年来，对于由局部可数覆盖确定的广义度量空间，如局部可数 k-网络的空间[4]、局部可数网络的空间[5]、局部可数(modK)-基的空间[6]、局部可数 k 系的空间[7]以及局部可数弱基的空间[8]，已广义研究. 本文将继续致力于这方面的工作，首先讨论局部可数(modL)-基空间的特征，而后在第二部分建立局部可数 k-网络空间的完备逆映象定理.

本文所论空间均满足正则且 T_1 分离性公理，映射指连续的满函数，N 表示自然数集.

1 具有局部可数(modL)-基的空间

定义 1.1[9] 设 X 是一个拓扑空间，$\mathscr{B}$ 是 X 的开子集族. $\mathscr{B}$ 称为 X 的(modL)-基，若对于每一 $x\in X$，存在 X 中含点 x 的闭 Lindelöf 子集 L_x 使得 $\{B\in\mathscr{B}:L_x\subset B\}$ 是 L_x 在 X 中的邻域基.

引理 1.2[10] 设 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的星可数集族，那么 $\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{B}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 满足每一 $\mathscr{B}_\alpha$ 是可数的且对于任意 $\alpha,\beta\in\Lambda$，$(\bigcup\mathscr{B}_\alpha)\cap(\bigcup\mathscr{B}_\beta)\neq\psi$ 当且仅当 $\alpha=\beta$.

为了下文叙述方便起见，对于空间 X 的星可数集族 $\mathscr{B}$，将满足引理 1.2 所述的分解记为 $\mathscr{B}=\sum\{\mathscr{B}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$，并且对于每一 $\alpha\in\Lambda$，令 $B_\alpha=\bigcup\mathscr{B}_\alpha$，那么 $\{B_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 X 的互不相交集族. 若再设 $\mathscr{B}$ 是 X 的开覆盖或局部有限的闭覆盖，则 $\{B_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 X 的既开且闭的互不相交的覆盖.

定理 1.3 对于空间 X，下述条件等价

(1) X 具有局部有限(modL)-基.

(2) X 具有局部可数(modL)-基.

(3) X 是仿紧局部 Lindelöf 空间.

---

* 福建省自然科学基金资助课题 收稿日期 1995－02－18

(4) X 是离散空间的闭 Lindelöf 逆映象.

证明 (1)⇒(2)是显然的.

(2)⇒(3). 设 X 具有局部可数(modL)-基$\mathscr{P}$. 对于每一 $x\in X$,存在 X 中含点 Lindeöf 子集 L_x 使得$\{B\in\mathscr{P}:L_x\subset B\}$是 L_x 在 X 中的邻域基. 由于$\mathscr{P}$ 的局部可数性及 L_x 的 Lindelöf 性,存在 X 的开子集 G_x 使得 $L_x\subset G_x$ 且$\{B\in\mathscr{P}:B\cap G_x\neq\psi\}$是可数的,于是有 $B_x\in\mathscr{P}$ 使得 $L_x\subset B_x\subset G_x$. 置$\mathscr{B}=B\in$ p :存在 $x\in X$ 使得 $B\subset B_x\}$. 易验证$\mathscr{B}$ 是 X 的星可数的(modL)-基. 由引理 1.2 知$\mathscr{B}=\sum\{\mathscr{B}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$且$\{B_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是 X 的既开且闭的互不相交覆盖,从而 $X=\oplus\{B_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 往证每一 B_α 是 X 的 Lindeöf 子空间. 设$\mathscr{U}_x$ 是 B_α 的任一开覆盖,则对于每一 $x\in B_\alpha$,因为 $L_x\subset B_x\in\mathscr{B}_\alpha$,所以 $L_x\subset B_\alpha$,于是存在$\mathscr{U}$ 的可数子族$\mathscr{U}^x$ 使得 $L_x\subset\bigcup\mathscr{U}_x$,从而存在 $C_x\in\mathscr{B}_\alpha$ 使得 $L_x\subset C_x\subset\bigcup\mathscr{U}_x$. 由于$\mathscr{B}_\alpha$ 的可数性,存在 B_α 的可数子集$\{x_i:i\in N\}$使得 $B_\alpha=\bigcup\{\bigcup u_{x_i}:i\in N\}$,因此$\mathscr{U}$ 存在可数子族覆盖 B_α,即 B_α 是 X 的 Lindelöf 子空间. 综上所述 Lindeöf 空间族的拓扑和,故 X 是仿紧局部 Lindelöf 空间.

(3)⇒(4). 设 X 是仿紧局部 Lindelöf 空间,则 X 有由 Lindelöf 子空间组成的局部有限的闭覆盖$\mathscr{F}$. 这时$\mathscr{F}$ 是 X 的星可数集族,由引理 1.2,$\mathscr{F}=\sum\{\mathscr{F}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$,并且$\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是 X 的既开且闭的互不相交覆盖. 现在赋于集合 Λ 离散拓扑,定义 $f:x\to\Lambda$ 使得每一 $f(F_\alpha)=\{\alpha\}$,则 f 是闭 Lindelöf 映射,所以 X 是离散空间的闭 Lindelöf 逆映象.

(4)⇒(1). 设 X 是离散空间的闭 Lindelöf 逆映象,则存在离散空间 Y 和闭 Lindelöf 映射 $f:X\to Y$. 置$\mathscr{B}=\{f^{-1}(y):y\in Y\}$,则$\mathscr{B}$ 是 X 的局部有限的既开且闭的覆盖且每一 $f^{-1}(y)$是 X 的 Lindelöf 子空间,所以$\mathscr{B}$ 是 X 的局部有限(modL)-基.

定理 1.3 表明研究具有局部可数(modL)-基的空间只须讨论仿紧局部 Lindelöf 空间,另一方面定理 1.3 也阐述了具有局部可数(modL)-基的空间、离散空间与闭 Lindelöf 映射的联系,它部分地回答了文[9]提出的问题:具有 σ-局部有限(modL)-基的空间是否是度量空间的闭 Lindelöf 逆映象?

2 具有局部可数 k-网络的空间

定义 2.1 设 X 是一个拓扑空间,$\mathscr{P}$ 称为 X 的 k-网络[11],若对于 X 的每一紧子集 K 及 K 在 X 中的任一邻域 U,存在$\mathscr{P}$ 的有限子族$\mathscr{P}'$使得 $k\subset\bigcup\mathscr{P}'\subset U$. $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs-网络[12],若对于 X 的每一收敛序列$\{x_n\}$,如果$\{x_n\}$收敛于 x 且 U 是 x 在 X 中的任一邻域,则存在 $m\to N$ 和 $P\in\mathscr{P}$ 使得$\{x\}\cup\{x_n:n\geqslant m\}\subset P\subset U$.

Foged[13]已证明了具有 σ-局部有限 k-网络的空间等价于具有 σ-局部有限 cs-网络的空间. 对于局部可数集族有平行的结果. 首先叙述一个概念. 空间 X 的子集 A 称为 X 的序列开集,若 X 中的序列$\{x_n\}$收敛于 $x\in A$,则存在 $m\in N$ 使得$\{x\}\cup\{x_n:n\leqslant m\}\subset A$.

定理 2.2 对于空间 X,下述条件等价

(1) X 具有局部可数 k-网络.

(2) X 具有由可数个 cs-网络的子空间组成的局部可数(且互不相交)的序列开覆盖.

(3) X 具有局部可数 cs-网络.

证明 (1)⇒(2). 设空间 X 具有局部可数 k-网络$\mathscr{P}$. 由 X 的正则性,不妨设$\mathscr{P}$ 的元是 X 的闭子集. 对于每一 $x\in X$,存在 x 在 X 中的邻域 V_x 使得$\{P\in\mathscr{P}:P\cap V_x\neq\psi\}$是可数的. 置$\mathscr{B}$

$=\{P\in\mathscr{P}:$存在$x\in X$使得$P\subset V_x\}$，则$\mathscr{B}$是X的星可数的k-网络. 由引理1.2，$\mathscr{B}=\sum\{\mathscr{B}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 对于每一$\alpha\in\Lambda$，令$\mathscr{F}_\alpha=\{\bigcup\mathscr{B}':\mathscr{B}'$是$\mathscr{B}_\alpha$的有限子集$\}$，$F_\alpha=\bigcup\mathscr{F}_\alpha$，则$\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是$X$的局部可数且互不相交的覆盖. 对于每一$x\in X$及$X$中任一收敛于$x$的序列$x_n\}$，存在唯一的$\alpha\in\Lambda$使得$x\in F_\alpha$. 设$U$是$x$在$X$中的邻域，由于$\mathscr{B}$是$X$的k-网络，存在$m\in N$和$\mathscr{B}$的有限子集$\mathscr{F}'$使得$\{x\}\cup\{x_n:n\geqslant m\}\subset\bigcup\mathscr{F}'\subset U$. 让$\mathscr{F}''=\{F\in\mathscr{F}':x\in F\}$，则存在$i\geqslant m$使得$\{x\}\cup\{x_n:n\geqslant i\}\subset X\setminus\bigcup(\mathscr{F}'\setminus\mathscr{F}'')$，于是$\{x\}\cup\{x_n:n\geqslant i\}\subset\bigcup\mathscr{F}''\subset U$. 因为$x\in\mathscr{F}''$，所以$\bigcup\mathscr{F}''\in\mathscr{F}_\alpha$且$\{x\}\cup\{x_n:n\geqslant i\}\subset\bigcup\mathscr{F}''\subset U\cap F_\alpha$，故$\mathscr{F}_\alpha$是$F_\alpha$的可数cs-网络且$F_\alpha$是$X$的序列开集，因此$X$具有由可数$cs$-网络的子空间组成的局部可数且互不相交的序列开覆盖.

(2)⇒(3). 设空间X具有局部可数的序列开覆盖$\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$使得每一$F_\alpha$具有可数的cs-网络$\mathscr{F}_\alpha$. 令$\mathscr{F}=\bigcup\{\mathscr{F}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 易直接验证$\mathscr{F}$是$X$的局部可数cs-网络.

(3)⇒(1). 设$\mathscr{P}$是空间X的局部可数cs-网络. 对于X的每一紧子集K及K在X中的任一邻域U，置$\mathscr{P}'=\{P\in\mathscr{P}:P\subset U$且$P\cap K\neq\psi\}$，则$\mathscr{P}'$是$K$的可数覆盖. 记$\mathscr{P}'=\{P_n:n\in N\}$，住证存在$i\in$N使得$K\subset\bigcup_{n\leqslant i}P_n$. 否则，存在序列$\{x_i\}$使得每一$x_i\in K\setminus\bigcup_{n\leqslant i}P_n$. 由于$K$是紧度量空间[14]，所以序列$\{x_i\}$存在收敛的子序列$\{x_{i_k}\}$. 设$\{x_{i_k}\}$收敛于$x$，那么$x\in K$，于是存在$k_0\in$N和$P\in\mathscr{P}$使得$\{x\}\cup\{x_{i_k}:k\geqslant k_0\}\subset P\subset U$. 这时存在$m\in N$使得$P=P_m$. 取$j=\max\{k_0,m\}$，那么$x_{i_j}\in P\setminus\bigcup_{n\leqslant i_j}P_n=\psi$，矛盾. 故存在$i\in$N使得$K\subset\bigcup_{n\leqslant i_j}P_n\subset U$，所以$\mathscr{P}$是$X$的k-网络，即$X$具有局部可数的$k$-网络.

注. (1)定理2.2(2)要求"序列开"是必不可少的. 如可数序数空间ω_1虽然具有局部可数且互不相交的覆盖$\mathscr{F}=\{\{\alpha\}:\alpha<\omega_1\}$使得$\mathscr{F}$的每一元存在可数cs-网络，但是$\omega_1$甚至没有点可数的k-网络[14].

(2)定理2.2(2)要求"序列开覆盖"一般不可加强为"开覆盖"，因为具有局部可数cs-网络的空间一般不是仿紧空间[4]，而且易验证空间X具有由可数cs-网络子空间组成的局部可数(且互不相交)的开覆盖当且仅当X是具有局部可数cs-网络的仿紧空间.

下面利用定理2.2建立的具有局部可数k-网络的空间的特征给出这类空间的一个完备逆映象定理.

定理2.3　设$f:X\to Y$是完备映射，其中Y具有局部可数k-网络，那么X具有局部可数k-网络当且仅当X具有局部G_δ-对角线.

证明　显然，具有局部可数k-网络的空间具有局部G_δ-对角线. 反之，设空间X具有局部G_δ-对角线. 由定理2.2，Y具有局部可数且互不相交的序列开覆盖$\{y_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$使得每一$Y_\alpha$具有可数cs-网络. 对于$\alpha\in\Lambda$，令$X_\alpha=f^{-1}(Y_\alpha)$，那么$\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$是$X$的局部可数且互不相交的序列开覆盖. 由定理2.2，为证明X具有局部可数k-网络，只须证明每一X_α具有可数cs-网络. 令$f_\alpha=f|_{X_\alpha}:X_\alpha\to Y_\alpha$，则$f_\alpha$是完备映射[15]. 因为$Y_\alpha$是仿紧空间，所以$X_\alpha$也是仿紧空间. 又因为$X_\alpha$具有局部$G_\delta$-对角线，所以$X_\alpha$具有由$G_\delta$-对角线的子空间组成的点有限开覆盖. 由于$G_\delta$-对角线性质满足点有限开和定理[16]，于是$X_\alpha$具有$G_\delta$-对角线. 又由于具有可数cs-网络的空间的完备逆映象是具有可数cs-网络的空间当且仅当它具有G_δ-对角线[17]，因此X_α具有可数cs-网络，故X具有局部可数的k-网络.

许多广义度量空间类的完备逆映象定理都是附加G_δ-对角线条件，我们有问题：具有局部可数k-网络的空间是否具有G_δ-对角线？

利用定理2.3类似的证法有

定理2.4　设$f:X\to Y$是完备映射，其中Y具有局部可数网络，那么X具有局部可数网

络当且仅当 X 具有局部 G_δ-对角线.

可数序数空间 ω_1 具有局部可数网络,但 ω_1 不具有 G_δ-对角线.

参 考 文 献

〔1〕 V V Fedorcŭk. Ordered sets and the product of topological spaces (Russian). Vestnik Moskov Vniv. Mat. Meh; 1966,21(4):66~71

〔2〕 A Charlesworth. A note on Uryshon's metrization theorem, Amer. Math. Monthly, 1976,(83):718~720

〔3〕 W G Fleissner G M Reed. Paralindelöf spaces and spaces with a σ-locally countable base, Topology Proc, 1977,(2):89~110

〔4〕 Lin Shou. Spaces with a locally countable k-network, Northeastern Math. J 1990,(6):39~44

〔5〕 刘川. σ局部可数网络和局部可数网络. 广西优秀数学论文集, 桂林:广西科学技术出版社, 1991. 76~79

〔6〕 林寿. 具有局部可数(modK)-基的空间, 吉首大学学报, 1992, 13(6):10~14

〔7〕 林寿. 仿紧局部紧空间的ㄨㄨ. 数学杂志. 1992,(12):281~286

〔8〕 Liu Chuan; Dai Mumin. Spaces with a locally countable weak base, Math. Japonica, 1995, 40

〔9〕 林寿. 度量空间的闭 Lindelöf 逆象. 黄淮学刊, 1993, 9(1):1~3

〔10〕 D. Burke. Covering properties. Handbook of Set-Theoretic Topology (North-Holland, 1984), 347~422

〔11〕 P O'Meara. On paracompactness in function spaces with the compact-open topology. Proc. Amer. Math. Soc, 1971(29):183~189

〔12〕 J Guthrie. A characterization of o-spaces. General Topology Appl, 1971,(1):105~110

〔13〕 L Foged. Characterizations of o-spaces. Pacific J Math, 1984, 110:59~63

〔14〕 G Gruenhage, E. Michael, Y. Tanaka. Spaces determined by point-countable covers. Pacific J. Math. 1984, 113:303~332

〔15〕 R Engelking. General Topology, Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1977

〔16〕 R Gittings. Open mapping theorem, Set-Theoretic Topology (Academic Press, 1977), 141~191

〔17〕 V J Mancuso. Inverse images and first countability. General Topology Appl, 1972,(2):29~44