关于局部 Lindelöf 的仿紧空间*

关长铭 林 寿
(河南教育学院,郑州 450003) (福建省宁德师专,352100)

摘要 建立弱形式的局部 Lindelöf 空间的开映射定理和完备逆映射定理,阐明了局部 Lindelöf 的仿紧空间与局部可分度量空间的内在联系。

关键词 局部 Lindelöf 空间 仿紧空间 度量空间 开映射 弱完备映射

近来,Dissanayake 和 Sastry[1]研究了局部 Lindelöf 空间的一些性质,包括如下一些映射性质:

(1) 开映射或弱完备映射保持局部 Lindelöf 空间。

(2) 一个空间是局部 Lindelöf 空间的商空间当且仅当它是一个 L-空间。

由于局部 Lindelöf 空间缺乏适当的覆盖性质,一般很难得到较好的更进一步的性质。鉴于此,本文的目的首先是建立局部 Lindelöf 空间与仿紧局部 Lindelöf 空间的联系,然后讨论仿紧局部 Lindelöf 空间的映射性质。

本文所论空间均指满足正则且 T_1 分离性公理的拓扑空间。映射指连续的满函数。空间 X 称为局部 Lindelöf 空间,如果对于 $x\in X$,存在点 x 在 X 中的开邻域 V,使 $\mathrm{cl}(V)$是 X 的 Lindelöf 子空间。映射 $f:X\to Y$ 称为双商中映射[2],如果对于 $y\in Y$,若 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖,那么存在 $\mathscr{U}$ 的有限子族 $\mathscr{V}$ 使 $y\in\mathrm{int}(f(\bigcup\mathscr{V}))$。

显然,开映射是双商映射。

定理 1 下述条件相互等价:

(1) X 是局部 Lindelöf 空间;

(2) X 是仿紧局部 Lindeö 空间的开映像;

(3) X 是仿紧局部 Lindelöf 空间的双商映像;

(4) X 是局部 Lindelöf 空间的双商映像。

证明 (1)⇒(2) 设 X 是局部 Lindelöf 空间。利用 Lindelöf 空间是完全正则空间,易验证 X 是完全正则空间。对于 $x\in X$,存在 X 的开子集 V 使 $x\in V$ 且 $\mathrm{cl}(V)$是 X 的 Lindelöf 子空间。由 X 的完全正则性,存在 $f:X\to[0,1]$使 $f(x)=1$ 且 $f(X\backslash V)=\{0\}$。置

$$U_x=\{y\in X:f(y)>0\}$$

那么 $x\in U_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{y\in X:f(y)\geqslant\frac{1}{n}\}$。由于每一$\{y\in X:f(y)\geqslant 1/n\}$是 $\mathrm{cl}(V)$的闭子集,于是它是 X 的 Lindelöf 子空间,从而 U_x 是 X 的 Lindelöf 子空间。故$\{U_x:x\in X\}$是 X 的由 Lindelöf 子空间组成的开覆盖。令 T 是这些 U_x 的互不相交拓扑和,即 $T=\bigoplus\{U_x:x\in X\}$,让

* 国家自然科学基金资助项目 收到日期 1993 05 19

$q:T\to X$ 是显然映射，则 q 是从仿紧局部 Lindelöf 空间 T 到 X 上的开映射，所以，X 是仿紧局部 Lindelöf 空间的开映像。

(2)⇒(3)⇒(4)　显然.

(4)⇒(1)　设存在局部 Lindelöf 空间 T 和双商映射 $f:T\to X$。由(1)所证，存在 T 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 使 $\mathscr{U}$ 中每一元是 T 的 Lindelöf 子空间，对于 $x\in X$，因为 f 是双商映射，存在 $\mathscr{U}$ 的有限子族 $\mathscr{V}$ 使 $x\in \mathrm{int}(f(\bigcup\mathscr{V}))$. 由 X 的正则性，存在 X 的开子集 V 使 $x\in V\subset \mathrm{cl}(V)\subset \mathrm{int}(f(\bigcup\mathscr{V}))$。因为 $f(\bigcup\mathscr{V})$ 是 X 的 Lindelöf 子空间，故 $\mathrm{cl}(V)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间。从而 X 是局部 Lindelöf 空间。

映射 $f:X\to Y$ 称为弱完备映射[1]，如果 f 是闭映射，并且满足对于 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间。

定理 2　设 f 是从仿紧空间 X 到空间 Y 上的闭映射，则 Y 是局部 Lindelöf 空间当且仅当存在 X 的局部 Lindelöf 的闭子空间 Z 使 $f|_Z:Z\to Y$ 是弱完备映射。

证明　由于弱完备映射保持局部 Lindelöf 性质[1]，充分性是显然的。往证必要性。分两步完成。

(1)对于 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 在 X 中的边界 $\partial f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间。

若不然，则存在 $\partial f^{-1}(y)$ 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 使 $\mathscr{U}$ 的任何可数子族不能覆盖 $\partial f^{-1}(y)$。由 $\partial f^{-1}(y)$ 的仿紧性，$\mathscr{U}$ 存在关于 $\partial f^{-1}(y)$ 的 σ-离散闭加细 $\bigcup\{\mathscr{F}_i:i\in N\}$，其中 N 是自然数集且每 $\mathscr{F}_i$ 是 $\partial f^{-1}(y)$ 的离散闭子集族。于是有某个 $\mathscr{F}_i$ 是不可数的，因而存在 $\partial f^{-1}(y)$ 的不可数的离散子集，设其为 $\{x_\alpha:\alpha<\omega_1\}$，其中 ω_1 是第一个不可数序数。它也是 X 的离散子集。再由 X 的仿紧性，存在 X 的离散开子集族 $\{U_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 使每一 $x_\alpha\in U_\alpha$。因为 Y 是局部 Lindelöf 空间，存在 Y 的开子集 V 使 $y\in Y$ 且 $\mathrm{cl}(V)$ 是 Y 的 Lindelöf 子空间。对 $\alpha<\omega_1$，置

$$V_\alpha = U_\alpha \cap f^{-1}(V)$$

对 $\alpha=0$，因为 $x_0\in\partial f^{-1}(y)$，存在 $x_0'\in V_0\cap(X\setminus f^{-1}(y))$. 设对于 $\alpha<\delta<\omega_1$，存在 Y 的离散子集 $F_\alpha=\{f(x_\beta'):\beta\leqslant\alpha\}\subset \mathrm{cl}(V)$ 满足当 $\beta\leqslant\alpha$ 时有 $x_\beta'\in V_\beta\cap(X'(y)$ 且所有的 $f(x_\beta')$ 互不相同。置

$$F=\bigcup\{F_\alpha:\alpha<\delta\},$$

那么 F 是 Y 的闭子集且 $y\overline{\in}F$，于是有 y 在 Y 中的开邻域 G 使 $G\cap F=\varnothing$，从而存在 $x_\delta'\in V_\delta\cap f^{-1}(G)\cap(X\setminus f^{-1}(y))$，因此 $x_\delta'\in V_\delta\cap(X\setminus f^{(-1)}(y))$ 且 $f(x_\delta')\overline{\in}F$。令 $F_\delta=\{f(x_\delta':\beta\leqslant\delta\}$。因为 $\{V_\beta:\beta\leqslant\delta\}$ 是 X 的离散开子集族且 f 是闭映射，所以 F_δ 是 Y 的离散子集。由超限归纳原理，存在 $cl(V)$ 的不可数离散闭子集 $\{f(x_\alpha^1):\alpha\leqslant\omega_1\}$，这与 $cl(V)$ 的 Lindelöf 性质相矛盾。(1)得证。

(2) 存在 X 的局部 Lindelöf 闭子空间 Z 使限制 $f|_Z:Z\to Y$ 是弱完备映射。

对于 $y\in Y$，取定点 $p_y\in f^{-1}(y)$，令

$$X(y)=\begin{cases}\partial f^{-1}(y),\text{当 } \partial f^{-1}(y)\neq\varnothing\\ \{p_y\},\text{当 } \partial f^{-1}(y)=\varnothing\end{cases}$$

$$Z=\bigcup\{X(y):y\in Y\}.$$

由于　$$X\setminus Z=\bigcup\{\mathrm{int}(f^{-1}(y))\setminus\{(p_y\}:\partial f^{-1}(y)=\varphi,y\in Y\})\cup$$

$$(\bigcup\{int(f^{-1}(y)):\partial f^{-1}(y)\neq\varnothing,y\in Y\}),$$

Z 是 X 的闭子空间。从定义知 $f(Z)=Y$，于是 $f|_Z:Z\to Y$ 是闭映射。对于 $y\in Y$，$(f|_Z)^{-1}(y)=X(y)$ 是 Z 的 Lindelöf 子空间，因而 $f|_Z$ 是弱完备映射。又因为 Y 是局部 Lindelöf 空间，由文[3]定理 3.8.8 知 Z 是局部 Lindelöf 空间，证毕。

本文的后一部分讨论局部 Lindelöf 空间的弱完备逆像问题，主要目的是建立局部 Lindelöf 仿紧空间与度量空间的关系。先介绍一个概念。空间 X 的开子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的(mod$L$)基，若存在由 X 的某些闭 Lindelöf 子集组成的覆盖 L 使对于每一 L$\in\mathscr{L}$ 和 X 的开子集 $U\supset L$，有 $P\in\mathscr{P}$ 使得 L$\subset$P$\subset$U。我们也称 $\mathscr{P}$ 是 X 的关于 $\mathscr{L}$ 的(modL)-基。

定理3　下述条件相互等价：

(1) X 是局部 Lindelöf 的仿紧空间；

(2) X 是离散空间的弱完备逆映像；

(3) X 是局部可分度量空间的弱完备逆映像；

(4) X 是具有 σ-局部有限($modL$)-基的局部 Lindelöf 空间；

(5) X 具有局部可数($modL$)-基；

(6) X 是 Lindelöf 空间族的拓扑和。

证明　(1)⇒(2)　设 X 是局部 Lindelöf 的仿紧空间，则 X 存在局部有限的闭覆盖 $\mathscr{F}$ 使 $\mathscr{F}$ 中的每一元为 X 的 Lindelöf 闭子空间。由于 Lindelöf 空间的局部有集限族是可数族，所以 $\mathscr{F}$ 中的每一元仅与 $\mathscr{F}$ 中的可数个元相交。由文[4]引理 3.10 知 $\mathscr{F}$ 可分解为集族 $\{\mathscr{F}_\beta:\beta\in\Gamma\}$ 之并，其中每一 $\mathscr{F}_\beta$ 是可数族并且对于 $\beta,\beta'\in\Gamma$，$(\bigcup\mathscr{F}_\beta)\cap(\bigcup\mathscr{F}_{\beta'})\neq\varnothing$ 当且仅当 $\beta=\beta'$. 置

$$F_\beta=\bigcup\mathscr{F}_\beta$$

那么 $\{F_\beta:\beta\in\Gamma\}$ 是 X 的由 Lindelöf 子空间组成的两两互不相交的闭覆盖。由于 $\mathscr{F}$ 的局部有限性，每一 F_β 也是 X 的开子集，从而 $\{F_\beta:\beta\in\Gamma\}$ 是 X 的互不相交的既开且闭的覆盖，因此 $X=\bigoplus\{F_\beta:\beta\in\Gamma\}$. 赋指标集 Γ 予离散拓扑，并且定义函数 $f:X\to\Gamma$ 使每一 $f(F_\beta)=\{\beta\}$，则 f 是从 X 到离散空间 Γ 的弱完备映射。

(2)⇒(3)　由于离散空间是局部可分的度量空间，所以这是显然的。

(3)⇒(4)　设存在局部可分的度量空间 Y 和弱完备映射 $f:X\to Y$。对于 $x\in X$，存在 Y 的开子集 V 使 $f(x)\in V$ 且 cl(V) 是 Y 的 Lindelöf 子空间。因为 f 是弱完备映射，由文[3]定理 3.8.8 知：$f^{-1}(cl(V))$ 是 X 的 Lindelöf 空间，从而 $f^{-1}(V)$ 是点 x 在 X 中的开邻域且 cl$(f^{(-1)}(V))$ 是 X 的 Lindelöf 子空间。故 X 是局部 Lindelöf 空间。另方面，由 Y 的可度量性，设 $\mathscr{B}$ 是空间 Y 的 σ-局部有限基，易验证，$\{f^{-1}(B):B\in\mathscr{B}\}$ 是 X 的关于 $\{f^{-1}(y):y\in Y\}$ 的 σ-局部有限的($modL$)-基。

(4)⇒(5)　由于 Lindelöf 空间的局部有限集族是可数族，所以 Lindelöf 空间的 σ-局部有限集族仍是可数族，从而局部 Lindelöf 空间的 σ-局部有限($modL$)-基也是局部可数的($modL$)-基。

(5)⇒(6)　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 关于 $\mathscr{L}$ 的局部可数的($modL$)-基，其中 $\mathscr{L}$ 是由 X 的某些闭 Lindelöf 子集组成的 X 的覆盖。记 $\mathscr{L}=\{L_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$. 对于 $\alpha\in\Lambda$，由 L_α 的 Lindelöf 性质及 $\mathscr{P}$ 的局部可数性，存在 X 的开集子 G_α 使 $L_\alpha\subset G_\alpha$ 且 $\{P\in\mathscr{P}:p\cap G_\alpha\neq\varnothing\}$ 是可数的。因为 $\mathscr{P}$

是 X 的关于 $\mathscr{L}$ 的$(modL)$-基，存在 $P_\alpha \in \mathscr{P}$ 使 $L_\alpha \subset P_\alpha \subset G_\alpha$. 令

$$\mathscr{P}' = \{P \in \mathscr{P}: \text{存在 } \alpha \in \Lambda, \text{使 } P \subset P_\alpha\},$$

则 $\mathscr{P}'$ 是 X 的关于 $\mathscr{L}$ 的星可数的$(modL)$-基。事实上，对 $P' \in \mathscr{P}'$，存在 $\alpha \in \Lambda$ 使 $P' \subset P_\alpha$，由于

$$\{P \in \mathscr{P}': P \cap P' \neq \varnothing\} \subset \{P \in \mathscr{P}: P \cap P_\alpha \neq \varnothing\}$$
$$\subset \{P \in \mathscr{P}: P \cap G_\alpha \neq \varnothing\}$$

所以$\{P \in \mathscr{P}': P \cap P' \neq \varnothing\}$是可数的，因而 $\mathscr{P}'$ 是 X 的星可数族。对于 $\alpha \in \Lambda$，设 U 是 X 的含 L_α 的开子集，那么 $L_\alpha \subset U \cap P_\alpha$，于是存在 $P \in \mathscr{P}$ 使 $L_\alpha \subset P \subset U \cap P_\alpha$。这时 $P \in \mathscr{P}'$，故 $\mathscr{P}'$ 是 X 的关于 $\mathscr{L}$ 的星可数的$(modL)$-基。由 $\mathscr{P}'$ 的星可数性及文[4]引理 3.10 知 $\mathscr{P}'$ 可分解为集族$\{\mathscr{P}_\beta: \beta \in \Gamma\}$之并使每一 $\mathscr{P}_\beta$ 是可数子族且对于 $\beta, \beta' \in \Gamma$，$(\bigcup \mathscr{P}_\beta) \cap (\bigcup \mathscr{P}_{\beta'}) \neq \varnothing$ 当且仅当 $\beta = \beta'$. 置 $X_\beta = \bigcup \mathscr{P}_\beta$，则$\{X_\beta: \beta \in \Gamma\}$是 X 的两两互不相交的开覆盖，于是每一 X_β 也是 X 的闭子集，从而 $X = \bigoplus\{X_\beta: \beta \in \Gamma\}$. 对 $\beta \in \Gamma$，置

$$\mathscr{L}_\beta = \{L \in \mathscr{L}: L \subset X_\beta\},$$

则 $\mathscr{P}_\beta$ 是 X_β 的关于 $\mathscr{L}_\beta$ 的可数$(modL)$-基。先证明 $\mathscr{L}_\beta$ 是 X_β 的覆盖。对于 $x \in X_\beta$，存在 $L \in \mathscr{L}$ 使 $x \in L$. 因为 $\mathscr{P}'$ 是 X 的关于 $\mathscr{L}$ 的$(mldL)$-基，有 $P \in \mathscr{P}'$ 使 $L \subset P$. 这时 $P \in \mathscr{P}_\beta$，于是 $x \in L \subset X_\beta$. 故 $L \in \mathscr{L}_\beta$，所以 $\mathscr{L}_\beta$ 是 X_β 的覆盖。另方面，若 $L \in \mathscr{L}_\beta$ 且 U 是 X_β 的含 L 的开子集，那么存在 $P \in \mathscr{P}'$ 使 $L \subset P \subset U$，这时 $P \in \mathscr{P}_\beta$，故 $\mathscr{P}_\beta$ 是 X_β 关于 $\mathscr{L}_\beta$ 的可数$(modL)$-基。下面证明每一 X_β 是 X 的 Lindelöf 子空间。对于 X_β 的开覆盖 $\mathscr{U}$，任给 $x \in X_\beta$，存在 $L(x) \in \mathscr{L}_\beta$ 使 $x \in L(x)$。因为 $L(x)$是 X_β 的 Lindelöf 子空间，存在 $\mathscr{U}$ 的可数子族 $\mathscr{U}(x)$使 $L(x) \subset \bigcup \mathscr{U}(x)$; 而 $\mathscr{P}_\beta$ 是 X_β 的$(modL)$-基，存在 $P(x) \in \mathscr{P}_\beta$ 使 $L(x) \subset P(x) \subset \bigcup \mathscr{U}(x)$. 由 $\mathscr{P}_\beta$ 的可数性知存在 X_β 的可数子集$\{x_i: i \in N\}$使 $X_\beta = \bigcup\{\bigcup \mathscr{U}(x_i): i \in N\}$，故 $\bigcup\{\mathscr{U}(x_i): i \in N\}$是 $\mathscr{U}$ 的可数子覆盖。因此，X_β 是 Lindelöf 空间。

综上所述，X 是 Lindelöf 空间族的拓扑和。

(6)⇒(1)　Lindelöf 空间是仿紧空间，而仿紧性关于拓扑和保持[3]。

参考文献

1 Dissanayake, U, Sastry, K. Locally *Lindelöf* spaces. Indian J. Pure. Appl. Math. 1987; 18:876—881

2 Michael, E, Aquintuple quotient quest, General Topology Appl. 1972; 2:91—138

3 Engelking, R. General Topology. Warszawa: PWN, 1977.

4 Burke, D. Coverying properties, Handbook of set—theoretic Topology, 1984; 347—422

ON LOCALLY LINDELÖF PARACOMPACT SPACES

Guan Changming
(Henan college of Education, Zhengzhou 450003)
Lin Shou
(Ningde Teachers' College, Fujian 352100)

ABSTRACT

In this paper Some mapping properties of locally Lindelöf paracompact spaces are discussed. The main results are ,for a regular space X.

(1) X is a locally Lindelöf space if and only if X is a bi—quotient image of a locally Lindelöf paracompact space.

(2) If f is a closed mapping from a paracompact space X onto a regulay space Y, then Y is a locally Lindelöf space if and only if there exists a locally Lindelöf closed subspace Z of X such that $f|_Z:Z\rightarrow Y$ is a weakly perfect mapping.

(3) X is a locally Lindelöf paracompact space if and only if X is a weakly perfect pre—image of a locally separable metric space.

Key words *Locally Lindelöf space Paracompact space Metric space Open mapping Weakly perfect mapping*