中国青年科学技术论文精选

主　编　周衡孟　严余松　曾光明
副主编　金　磊　王维平　吴唤群

主　　办
上海交通大学
西安交通大学
西南交通大学
国防科学技术大学
湖南大学
湖南省科学技术协会

中国科学技术出版社
·北京·

具有紧k—网的空间

林　寿　李进金

（宁德师专，福建 352100）（漳州师院，363000）

【提　要】本文主要讨论在点可数族或σ—遗传闭包保持族中闭 k—网和紧 k—网之间的关系，然后用紧 k—网系统地描述局部紧度量空间在各类商映射下的特征。

【关键词】紧 k—网　局部紧度量空间　$K(\aleph_0)$—空间　商映射

1 引　言

探究度量空间的各类连续映象的特征是最近 30 年来一般拓扑学研究的重要课题之一。国内外许多学者讨论了度量空间的各类商映象的特征。它们大都与具有特定性质的 k—网的空间紧密相关。作为度量空间加强形式的局部紧度量空间和各类商映象可以用具有怎样特定性质的集族来刻划？*Michael*[1]曾总结了局部紧度量空间在开映射，双商映射，可数双商映射，伪开映射和商映射下象空间的特征，从中可看出具有特定性质的紧子集族对于这些空间的描述是至关重要的。上述两种思想的结合导致了作者用紧 k—网的概念刻划局部紧度量空间的商 ss—映象[2]。这触发了我们对具有紧 k—网空间的兴趣。本文主要讨论在点可数族或σ—遗传闭包保持族中闭 k—网和紧 k—网之间的关系，然后用紧 k—网系统地描述局部紧度量空间在商 s—映射，商紧映射，伪开 s—映射，闭映射和闭 s—映射下象空间的特征。这些结论与 *Michall*[1]的结果相结合形成了对局部紧度量空间在各类商映射下的象空间的完整分类。

本文所论空间均指满足 T_2 分离性公理的拓扑空间。映射指连续的满函数。设 X 是一个空间，X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 k—网[3]，如果对于 X 的紧子集 K 及 K 在 X 中的开邻域 U，存在 $\mathscr{P}$ 的有限子集 $\mathscr{P}'$ 使 $K\subset\cup\mathscr{P}'\subset V$。若空间 X 的 k—网 $\mathscr{P}$ 中的元都是 X 的紧子集（闭子集），那么称 $\mathscr{P}$ 是 X 的紧（闭）k—网。我们关心的问题之一是在怎样的条件下具有闭 k—网的空间具有特定性质的紧 k—网。在此起重要作用的是在研究积空间 k—空间性质时由 *Tanaka*[4]定义的性质 $K(\aleph_0)$。

空间 X 的递减的闭集列 $\{A_n\}$ 称为 X 的 k—序列[1]，如果 $\{A_n\}$ 是 X 的某个非空紧子集在 X 中的网。称空间 X 满足条件 $K(\aleph_0)$*，如果对 X 中的任一 k—序列 $\{A_n\}$，某个 A_n 是 X 的可数紧子集。为了叙述方便起见，我们称满足条件 $K(\aleph_0)$ 的空间是 $K(\aleph_0)$—空间。

*国家自然科学基金资助项目

作者简介　林寿，男，1960 年 3 月出生。1987 年 7 月毕业于苏州大学数学系，获理学硕士学位，现为福建省宁德师范专科学校数学系主任，副教授。发表拓扑学研究论文 50 篇。

引理 1.1[4] 空间 X 是 $K(\aleph_0)$—空间当且仅当 X 的每一闭的仿紧 M—子空间是局部紧空间。局部紧仿紧空间的闭映象是 $K(\aleph_0)$—空间。

2 关于点可数覆盖

本节研究具有点可数紧 k—网空间的性质。

定理 2.1 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的关于有限交封闭的点可数的闭集族。那么 X 是一个以 $\mathscr{P}$ 为 k—网的 $K(\aleph_0)$—空间当且仅当 $\mathfrak{L}=\{P\in P:\mathscr{P}$ 是 X 的可数紧子集$\}$ 是 X 的 k—网。

证 必要性。设 $\mathscr{P}$ 是 $K(\aleph_0)$—空间 X 的 k—网。对 X 的非空紧子集 K 及 K 在 X 中的开邻域 $\mathcal{U}$，令 $\mathscr{P}'=\{P\in P:\mathscr{P}\subset U\}$，则 $\mathscr{P}'$ 是 K 的点可数覆盖。由 *Miscenko* 引理，$\mathscr{P}'$ 的元组成 K 的极小的有限覆盖族是可数的，记它为 $\{\mathscr{P}_i:i\in N\}$。对于 $n\in N$，置：$\mathscr{R}_n=\bigwedge_{i\leq n}\mathscr{P}_i$，$A_n=U\mathscr{R}_n$，则 $\{A_n\}$ 是 X 的递减的闭集列。若 V 是 X 的含 K 的开子集，那么存在 P 的有限子集 $\mathfrak{L}$ 使 $K\subset\mathfrak{L}\subset U\cap V$，于是有 $n\in N$ 使 $P_n\subset\mathfrak{L}$，从而 $K\subset A_n\subset U\mathfrak{L}\subset V$。故 $\{A_n\}$ 是 X 的非空紧子集 K 在 X 中的网，所以 $\{A_n\}$ 是 k—序列。因此存在 $n\in N$ 使 A_n 是 X 的可数紧子集。这时 R_n 是 $\mathfrak{L}$ 的有限子集且 $K\subset UR_n\subset V$。所以 $\mathfrak{L}$ 是 X 的 k—网。

充分性。设 $\mathfrak{L}$ 是 X 的 k—网。让 A 是 X 的闭的仿紧 M—子空间。由于具有点可数 k—网的仿紧 M—空间是可度量化空间[5]，所以 A 是 X 的可度量化的子空间。对于 $x\in A$，由[5]命题 3.2，存在 $\mathfrak{L}$ 的有限子集 $\mathfrak{L}'$ 使

$$x\in int_A(U\{F\cap A:F\in\mathfrak{L}'\})\subset cl_A(U\{F\cap A:F\in\mathfrak{L}'\})\subset(U\mathfrak{L}')\cap A。$$

因为 A 是仿紧空间，所以 $(U\mathfrak{L}')\cap A$ 是 A 的紧子集，于是 A 是 X 的局部紧子空间。由引理 1.1，X 是 $K(\aleph_0)$—空间。

空间 X 称为等紧空间，若 X 的每一闭的可数紧的子空间是紧空间。

推论 2.2 设 X 是等紧空间，则 X 是具有点可数闭 k—网的 $K(\aleph_0)$—空间当且仅当 X 具有点可数的紧 k—网。

应当注意的是具有点可数的紧 k—网的空间未必是等紧空间（见参考文献[5]例 9.1）。由参考文献[6]定理 4.14 知具有点柯数 k—网的空间 X 是等紧空间当且当 X 的每一闭的可数紧子集是 k—空间。

问题 2.3 具有点可数闭 k—网的 $K(\aleph_0)$—空间是否具有点可数的紧 k—网？

推论 2.4 下述条件相互等价：

(1) X 是有 σ—离散的紧 k—网；(2) X 具有 σ—局部有限的紧 k—网。；(3) X 是具有 σ—离散的闭 k—网的 $K(\aleph_0)$—空间；(4) X 是具有 σ—局部有限的闭 k—网的 $K(\aleph_0)$—空间。

证 具有 σ—局部有限的闭 k—网的空间是次仿紧空间，而次仿紧空间是等紧空间。由定理 2.1 知条件(1)⇔(3)且条件(2)⇔(4)。另一方面，*Foged*[7]证明了具有 σ—离散的闭 k—网的空间等价于具有 σ—局部有限的闭 k—网的空间，故(3)⇔(4)。(*Tanaka*[8]证明了(4)⇒(2))

3 关于 σ—遗传闭包保持覆盖

空间 X 的子集族 P 称为 X 的遗传闭包保持集族[9]，如果对于 $H(P)\subset P\in P$ 有 $U\{\overline{H(P)}:P\in P\}=\overline{U\{H(P):P\in P\}}$。为了叙述的简洁起见，遗传闭包保持集族简记为 HCP 集族。本节讨论具有 σ—HCP 的紧 k—网的空间的等价条件。先叙述一条引理。

引理 3.1 设 P 是空间 X 的 HCP 集族。对于 $n\in N$，置 $Pn=\{\bigcap_{i\leq n}P_i:P_i\in P\}$，则 P_n 也

是 X 的 HCP 集族。

定理 3.2 空间 X 具有 $\sigma-HCP$ 的紧 k—网当且仅当 X 是具有 $\sigma-HCP$ 闭 k—网的 $K(\aleph_0)$—空间。

证 必要性。设 X 具有 $\sigma-HCP$ 的紧 k—网。让 A 是 X 的闭的仿紧 M—子空间，则 A 是 X 的可度量化的子空间[6]。设 P 是 A 的 $\sigma-HCP$ 的紧 k—网，由于 A 是 k—空间，所以 A 的子集 F 是 A 的闭子集当且仅当对于 $P\in P$，$P\cap F$ 是 P 的闭子集。由参考文献[11]定理 2，存在仿紧局部紧空间 Z 以及闭映射 $f:Z\to A$。由 Z 的仿紧性及 A 的第一可数性，对于 $x\in A$，$\partial f-1(x)$ 是 Z 的紧子集[12]。不妨设 f 是完备映射，则 A 是局部紧空间。由引理 1.1，X 是 $K(\aleph_0)$—空间。

充分性。设 X 是具有 $\sigma-HCP$ 闭 k—网的 $K(\aleph_0)$—空间。让 $P=\bigcup_{n\in N}P_n$ 是 X 的闭 k—网，其中每一 P_n 是 X 的 HCP 集族。由引理 3.1，可以设 P 关于有限交封闭。不妨认为 $X\in P_n\subset P_{n+1}$。对于 $n\in N$，置：$D_n=\{x\in X:P_n$ 在 x 不是点有限的$\}$，那么 $D_n\subset D_{n+1}$ 并且

Ⅰ 对于 X 的紧子集 K，$K\cap D_n$ 是有限集。

事实上，若 $K\cap D_n$ 是无限集，设 $\{x_n:n\in N\}$ 是它的一个无限子集，则可归纳地选取 P_n 的无限子集 $\{P_{n,i}:i\in N\}$ 使每一 $x_i\in P_{n,i}$，于是 $\{x_i:i\in N\}$ 是紧子集 K 的一个无限的闭离散子集，矛盾。

Ⅱ D_n 是 X 的 σ—闭离散子集。

事实上，对于 $m\in N$，令 $Ym=\{x\in X:\bigcap\{P\in P_m:x\in P\}=\{x\}\}$，由文[13]引理 2.5，$Y_m$ 是 X 的闭离散子空间。再由参考文献[14]定理 2 中 Ⅱ 的证明，对于 $x\in X/\bigcup_{m\in N}Y_m$，每一个 P_m 在 x 是点有限的，于是 $x\in X/\bigcup_{m\in N}D_m$，所以 $D_n\subset\bigcup_{m\in N}Y_m$，故 D_n 是 X 的 σ—闭离散子集。

置 $R=\{P/D_n:P\in P_n,n\in N\}\cup\{\{x\}:x\in D_n,n\in N\}$，$\mathscr{L}=\{R\in R:\overline{R}$ 是 X 的紧子集$\}$，$\mathscr{L}=\{\overline{H}:H\in\mathscr{L}\}$，则 $\mathscr{L}$ 是 X 的 $\sigma-HCP$ 的紧子集族。往证 $\mathscr{L}$ 是 X 的 k—网。

Ⅲ 对于 R 的有限子集 $\mathscr{L}$，存在 $m\in N$、$P\in P_m$ 和 $D\subset D_m$ 使 $\bigcap\mathscr{L}=(P/D_m)\cup D$。

事实上，让 $\mathscr{L}=\{F_i:i\leqslant k\}\subset R$。对于 $i\leqslant k$，不妨设 $F_i=P_i/D_{n_i}$，其中 $P_i\in P_{n_i}$ 且 $n_i\leqslant n_{i+1}$，于是 $\bigcap\mathscr{L}=\bigcap_{i\leqslant k}P_i/D_{n_k}$。从而存在 $m\geqslant n_k$ 和 $P\in P_m$ 使 $P=\bigcap_{i\leqslant k}P_i$。令 $D=P\cap(D_m/D_{n_k})$，那么 $D\subset D_m$ 且 $\bigcap\mathscr{L}=(P/D_m)\cup D$。

Ⅳ $\mathscr{L}$ 是 X 的 k—网。

事实上，对于 X 的非空紧子集 K 和 K 在 X 中的开邻域 V，由 Ⅱ 及 R 的构造，R 是 K 的点可数覆盖。由 *Miscenko* 引理，R 的元组成 K 的极小的有限覆盖族是可数的，记它为 $\{R_i:i\in N\}$。对于 $n\in N$，定义 $A_n=\bigcup(\bigwedge_{i\leqslant n}R_i)$，那么 $\{\overline{A}_n\}$ 是 X 的递减的闭集列。若 V 是 X 中含 K 的开子集，则存在 $i\in N$ 和 P_i 的有限子集 P' 使 $K\subset\bigcup P'\subset V$。从而 $K\subset(\bigcup\{P/D_i:P\in P'\})\cup(K\cap D_i)\subset(\bigcup\{\overline{P/D_i}:P\in P'\})\cup(K\cap D_i)\subset V$。由 Ⅰ，$K\cap D_i$ 是有限集，于是存在 $n\in N$ 使 $R_n\subset\{P/D_i:P\in P'\}\cup\{\{x\}:x\in K\cap D_i\}$，因此 $K\subset\overline{A}_n\subset V$，所以 $\{\overline{A}_n\}$ 是 K 在 X 中的网，即 $\{\overline{A}_n\}$ 是一个 k—序列。故存在 $n\in N$ 使 $\overline{A}_n\subset V$ 且 $\overline{A}_n$ 是 X 的可数紧的子集。由于 X 是次仿紧空间，于是 X 是等紧空间，因而 $\overline{A}_n$ 是 X 的紧子集。因为 A_n 是 R 中元的有限交的有限并，由 Ⅲ，存在 R 的有限子集 R' 和某个 D_m 的子集 D 使 $A_n=(\bigcup R')\cup D$。置：$\mathscr{L}'=R'\cup\{\{x\}:x\in K\cap D\}$，则 $\mathscr{L}$ 是 $\mathscr{L}$ 的有限子集且 $K\subset\bigcup\{\overline{H}:H\in\mathscr{L}'\}\subset V$。故 $\mathscr{L}$ 是 X 的 k—网。

综上所述，X 具有 $\sigma-HCP$ 的紧 $k-$网。

4 局部紧度量空间的映象

本节利用紧 $k-$网描述局部紧度量空间的商 $s-$映象和闭映象和特征。

映射 $f: X\to Y$ 称为紧覆盖映射，若 Y 的任一紧子集是 X 中某紧子集在 f 下的象。

引理 4.1 空间 X 是局部紧度量空间的紧覆盖 $s-$映象当且仅当 X 具有点可数的紧 $k-$网。

证 必要性。设 f 是从局部紧度量空间 M 到 X 上的紧覆盖 $s-$映射。由 $Nagata-Smirnov$ 度量化定理，M 具有 $\sigma-$局部有限的紧 $k-$网 R。因为 f 是 $s-$映射，$f(R)$是 X 的点可数的紧子集族。又因为 f 是紧覆盖映射，$f(R)$是 X 的 $k-$网。故 X 具有点可数的紧 $k-$网。

充分性。设 P 是空间 X 的点可数的紧 $k-$网。令 $M=\oplus P$，让 $f: M\to X$ 是显然映射。因为具有点可数 $k-$网的紧空间是度量空间[5]，所以 P 的元是紧可度量化空间，从而 M 是局部紧的度量空间。又因为 P 是 X 的点可数 $k-$网，所以 f 是紧覆盖的 $s-$映射。

引理 4.2 设 f 是从 $k-$空间 X 到 Y 上的商映射。若 X 有 $k-$网 R 使 $f(R)$是 Y 的点可数集族，则 $f(R)$是 Y 的 $k-$网。

证 对 Y 的非空紧子集 K 及 K 在 Y 中的开邻域 V，令 $P=\{P\in f(R): K\cap P\neq\phi$ 且 $P\subset V\}$。为证 $f(R)$是 Y 的 $k-$网，只须证存在 P 的有限子集覆盖 K。若不然，对于 $y\in K$，记可数集族$\{P\in P: y\in p\}$为$\{P_i(y): i\in N\}$，则可归纳地选取 K 的无限子集 $A=\{x_n: n\in N\}$使当 $i,j<n$ 时 $y_n\notin P_i(y_j)$。这时 P 中的任一元仅含 A 中的有限个点。设 α 是 A 在 K 中的聚点，让 $B=A/\{\alpha\}$，那么 B 不是 Y 的闭子集，于是 $f^{-1}(B)$不是 X 的闭子集，从而存在 X 的紧子集 C 使 $f^{-1}(B)\cap C$ 不是 X 的闭子集，所以 $f^{-1}(B)\cap C$ 是 X 的无限子集，因此 $A\cap f(C)$是 Y 的无限子集。令 $L=f^{-1}(K)\cap C$，则存在 R 的有限子集 R' 使 $L\subset\bigcup R'\subset f^{-1}(V)$，于是 $f(L)\subset\bigcup f(R')\subset V$。由于 $f(L)\cap A=f(C)\cap A$，所以$(\bigcup f(R'))\cap A$ 是 Y 的无限子集，于是存在 P 中的元含有 A 中的无限子集，矛盾。故 $f(R)$是 Y 的 $k-$网。

定理 4.3 下述条件相互等价：

(1) X 是局部紧度量空间的紧覆盖、商 $s-$映象；(2) X 是局部紧度量空间的商 $s-$映象；(3) X 是具有点可数紧 $k-$网的 $k-$空间。

证 (1) $\Rightarrow$(2) 显然。

(2) $\Rightarrow$(3) 设 X 是局部紧度量空间 M 在商 $s-$映射 f 下的象。让 R 是 M 的 $\sigma-$局部有限的紧 $k-$网，则 $f(R)$是 X 的点可数的紧子集族。由引理 4.2，$f(R)$是 X 的点可数的紧 $k-$网。又因为商映射保持 $k-$空间性质不变，所以 X 是 $k-$空间。

(3) $\Rightarrow$(1) 设 X 是具有点可数紧 $k-$网的 $k-$空间。由引理 4.1，存在局部紧的度量空间 M 和紧覆盖的 $s-$映射 $f: M\to X$。因为 X 是 $k-$空间，所以 f 是商映射(见[12]引理 45.8)。

定理 4.4 空间 X 是局部紧度量空间的闭映象当且仅当 X 是具有 $\sigma-$遗传闭包保持的紧 $k-$网的 $Frechet$ 空间。

证 $Foged$[15]证明了一个空间是度量空间的闭映象当且仅当它是具有 $\sigma-HCP$ 闭 $k-$网的 $Frechet$ 空间。

必要性。设 X 是局部紧度量空间的闭映象。由 $Foged$ 的定理，X 是具有 $\sigma-HCP$ 闭 $k-$网的 $Frechet$ 空间。再由引理 1.1 和定理 3.2，X 是具有 $\sigma-HCP$ 紧 $k-$网的 $Frechet$ 空间。

充分性。设 X 是具有 $\sigma-HCP$ 紧 $k-$网的 $Frechet$ 空间。让$\mathscr{K}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{K}n$ 是 X 的紧 $k-$网，

其中每一$\mathscr{F}n$是X的HCP集族且$\mathscr{F}n \subset \mathscr{F}_{n+1}$。定义$\mathscr{F}0=\phi$。对于$n \in N$,置

$P_n=\{\overline{F/\bigcup \mathscr{F}_{n-1}}: F \in \mathscr{F}_n\}$,

由[11]定理2,$\bigcup_{n \in N} P_n$是X的HCP的覆盖。定义$M=\oplus(\bigcup_{n \in N} P_n)$,让$f: M \rightarrow X$是显然映射,则$f$是闭映射。因为$X$的紧子集是可度量的子空间,所以$\bigcup_{n \in N} P_n$的元是$X$的紧可度量的子空间,于是$M$是局部紧的度量空间。故$X$是局部紧度量空间的闭映象。

为了便于对照,我们将局部紧度量空间的商紧映象、商ss一映象、伪开s一映象和闭s一映象的特征总结如下[2][16]:

(1) 空间X是局部紧度量空间的商紧映象当且仅当X具有点有限的可度量k一系。

(2) 空间X是局部紧度量空间的商ss一映象当且仅当X是具有局部可数的紧k一网的k一空间。

(3) 下述条件相互等价:

(i) X是局部紧度量空间的伪开s一映象;(ii) X是局部紧度量空间的闭s一映象;(iii) X是具有点可数的紧k一网的$Frechet$空间。

由(3)可知具有点可数的紧k一网的强$Frechet$空间是局部紧的度量空间,于是伪开紧映射或可数双商s一映射保持局部紧的度量空间。综上所述,我们得到了局部紧度量空间在纤维附加可分性或紧性条件下各类商映象的特征。

参 考 文 献

[1] Michael E. A quintuple quothent quest. General Topology Appl. 2(1972)

[2] 林寿. 关于R一商,SS一映射. 数学学报,34(1991)

[3] O'Meara P. On paracompactness in function spaces with the compact—open topology. Proc. AMS,29(1971)

[4] Tanaka Y. Some necessary conditions for products of k—spaces Bull. Tokyo Gakugei Univ. 30(1978)

[5] Gruenhage G. Michael E. Tanaka Y. Spaces determined by point—countable covers. Pacific J. Math. 113(1984)

[6] Tanaka Y. Metrization II, Topics in General Topology(North—Holland,1989)

[7] Foged L. Characterizations of $\aleph$—spaces. Pacific J. Math. 110(1984)

[8] Tanaka Y. A characterization for the products of k—and $\aleph_0$—spaces and related results, Proc. AMS,59(1976)

[9] Lasnev N. Closed images of metric spaces, Dokl. Akad. Nauk. SSSR,170(1966)

[10] Tanaka Y. Yajima Y. Decompositions for closed maps, Topology Proceedings,10(1985)

[11] 林寿. 仿紧局部紧空间的映象. 数学杂志,12(1992)

[12] (日)儿玉之宏. 永见启应著. 方嘉琳译. 拓扑空间论. 科学出版社,1984

[13] Okuyama A. On a generalization of Σ—spaces, Pacific J. Math. 42(1972)

[14] Lin Shou(林寿), Spaces with σ—hereditarily closure—pyeserving pseudobases, No10 theastern Math. J. 6(1990)

[15] Foged L. A characterization of closed images of metricspaces, Proc. AMS,95(1985)

[16] 林寿. 度量空间商映象的若干研究方向. 烟台:一般拓扑学学术研讨会,1992