第23卷第3期
1994年6月
数 学 进 展
ADVANCES IN MATHEMATICS
Vol.23, No.3
June, 1994

$C_k(X)$的扇密度和强Frechet性质*

林 寿** 刘 川** 滕 辉
(宁德师专，福建，352100) (广西大学，南宁，广西，530004) (四川大学，成都，四川，610064)

摘要 本文证明了如下两个定理：(1) $C_k(X)$为强Fréchet空间(或者Fréchet空间)的充分必要条件是X中的每一开K-覆盖序列$\{\mathscr{U}_n:n\in N\}$，存在$U_n\in\mathscr{U}_n$，使$\{U_n:n\in N\}$为X的K-序列. (2) $C_k(X)$有可数扇密度的充分必要条件是X中的每一开K-覆盖序列$\{\mathscr{U}_n:n\in N\}$存在$\mathscr{U}_n$的有限子族$\mathscr{U}'_n$，使$\cup\{\mathscr{U}'_n:n\in N\}$是$X$的开$K$-覆盖.

关键词 函数空间；强Fréchet空间；扇密度；K-覆盖；K-序列

连续函数空间$C(X,Y)$上的拓扑性质的研究是近年来一般拓扑学研究的重要课题之一。设X,Y是拓扑空间，$C(X,Y)$是从X到Y内的连续函数全体，它赋予点态收敛拓扑$C_p(X,Y)$或紧开拓扑$C_k(X,Y)$，其基本问题是[1]：寻求拓扑不变量(P,Q)使X具有性质P当且仅当$C(X,Y)$具有性质Q。1982年Pytkeev和1983年Gerlits用X的拓扑性质刻画了$C_p(X,\mathbb{R})$的Fréchet性质，1986年A.Arhangel'skii用X的拓扑性质刻画了$C_p(X,\mathbb{R})$的可数扇密度。本文主要讨论$C_k(X,\mathbb{R})$的Fréchet性质和$C_k(X,\mathbb{R})$的可数扇密度。

本文所讨论的空间都是Tychonoff空间，$\mathbb{R}$表示实直线赋予通常拓扑。

设X,Y为拓扑空间，对于$A\subset X$, $V\subset Y$，记$[A,V]=\{f\in C(X,Y):f(A)\subset V\}$，记$\mathscr{K}(X)$为$X$中所有非空紧子集的族。由$\{[K,V]:K\in\mathscr{K}(X)$，$V$是$Y$的开集$\}$作为$C(X,Y)$的子基产生的拓扑称为$C(X,Y)$上的紧开拓扑，记为$C_k(X,Y)$. X的子集族α称为X的一个K-覆盖[2]，如果$\mathscr{K}(X)$中的任一元素均含于α的某些元素内. X的子集族$\{G_n:n\in N\}$称为X的K-序列[2]，如果对$K\in\mathscr{K}(X)$，则存在$m\in N$，当$n\geqslant m$时，$K\subset G_n$。我们简记$C_k(X,\mathbb{R})$为$C_k(X)$。

引理1[2] 下列命题相互等价

(i) $C_k(X)$是一个k-空间；

(ii) $C_k(X)$是一个Fréchet空间；

(iii) X的每一开K-覆盖含有一K-序列.

引理2[2] $C_k^*(X,\mathbb{R})$同胚于$C_k(X,\mathbb{R}^*)$。

引理3 对于空间X，设$K\subset U$，其中$K\in\mathscr{K}(X)$，U是X的开集. 若f是K上的连续

收稿日期：1991-10-28。
* 国家自然科学基金资助课题。
** 四川大学数学系访问学者。

函数，则存在X上的连续函数g，满足$g|_K=f$且$g(X\setminus U)\subset\{0\}$。

证 设βX为X的极大紧化，存在βX的开子集W使$U=W\cap X$，则$K\subset W$，定义f_1，使$f_1|_K=f, f_1(\beta X\setminus W)\subset\{0\}$，则$f_1$是$\beta X$中的闭子集$K\cup(\beta X\setminus W)$上的连续函数，故存在$\beta X$上的连续函数$g_1$使$g_1|_{K\cup(\beta X\setminus W)}=f_1$，令$g=g_1|_X$，则$g$满足要求。

空间X称为强 Fréchet 空间[3]，如果$x\in\cap\{\bar{A}_n:n\in N\}$，其中$A_n\subset X$，则存在$x_n\in A_n$，使$x_n\to x$。

定理1 下列条件相互等价

(i) $C_k(X)$是强 Fréchet 空间；

(ii) $C_k(X)$是 Fréchet 空间；

(iii) 对X中的每一开K-覆盖序列$\{\mathscr{U}_n:n\in N\}$，存在$U_n\in\mathscr{U}_n(n\in N)$使$\{U_n:n\in N\}$为$X$的$K$-序列；

(iv) $C_k^{\omega}(X)$是强 Fréchet 空间。

证 (i)→(ii)显然。

(ii)→(iii)。设$\{\mathscr{U}_n:n\in N\}$为X的开K-覆盖序列，不妨设$\mathscr{U}_{n+1}<\mathscr{U}_n(n\in N)$。若$X\in\mathscr{K}(X)$，对$n\in N$，存在$U_n\in\mathscr{U}_n$，使$X\subset U_n$，这时$\{U_n:n\in N\}$构成$X$的$K$-序列。若$X\bar{\in}\mathscr{K}(X)$，则$\{X\setminus\{x\}:x\in X\}$为$X$的开$K$-覆盖，由引理1存在$X$的子集$\{x_n:n\in N\}$使$\{X\setminus\{x_n\}:n\in N\}$是$X$的$K$-序列。令$\mathscr{B}_n=\{U\setminus\{x_n\}:U\in\mathscr{U}_n\}$，则$\mathscr{B}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$为$X$的开$K$-覆盖。事实上，对$K\in\mathscr{K}(X)$，存在$n\in N, U\in\mathscr{U}_n$，使$K\subset X\setminus\{x_n\}, K\subset U$，则$K\subset U\setminus\{x_n\}$。由引理1，$\mathscr{B}$含有$K$-序列$\{G_k:k\in N\}$。对$k\in N$，存在$n_k$使$G_k\in\mathscr{B}_{n_k}$，即有$U_{n_k}\in\mathscr{U}_{n_k}$使$G_k=U_{n_k}\setminus\{x_{n_k}\}$。对于$n\in N$，因为$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\in\mathscr{K}(X)$，所以存在$k\in N$，使$\{x_i:i\leqslant n\}\subset G_k$。如果$n_k\leqslant n$，那么$x_{n_k}\in G_k=U_{n_k}\setminus\{x_{n_k}\}$，矛盾。于是$n_k>n$，即$\{n_k:k\in N\}$为无限，故存在单调上升子列$\{n_{k_i}:i\in N\}\subset\{n_k:k\in N\}$。对$n_{k_i}<n\leqslant n_{k_{i+1}}$，因为$\mathscr{U}_{n_{k_{i+1}}}<\mathscr{U}_n$，存在$U_n\in\mathscr{U}_n$使$U_{n_{k_{i+1}}}\subset U_n$，令

$$W_n=\begin{cases}U_{n_{k_i}}, & n=n_{k_i},\\ U_n, & n\neq n_{k_i}, i\in N,\end{cases}$$

则$W_n\in\mathscr{U}_n$。对$K\in\mathscr{K}(X)$，存在i_0，当$i\geqslant i_0$，$K\subset U_{n_{k_i}}$，于是当$n\geqslant n_{k_{i_0}}$，$K\subset W_n$，从而$\{W_n:n\in N\}$是X的K-序列。

(iii)→(iv)。由引理2，$C_k^{\omega}(X,\mathbb{R})$同胚于$C_k(X,\mathbb{R}^{\omega})$。我们只须证$C_k(X,\mathbb{R}^{\omega})$是强 Fréchet 空间。因为$C_k(X,\mathbb{R}^{\omega})$是拓扑群，我们只须证明$C_k(X,\mathbb{R}^{\omega})$在点$f_0:X\to\{0\}$具有强 Fréchet 性质。如果$f_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n$，其中$A_n\subset C_k(X,\mathbb{R}^{\omega})$，对$n\in N$，置$\mathscr{U}_n=\{f^{-1}(O_n):f\in A_n\}$，其中$\{O_n:n\in N\}$是$\mathbb{R}^{\omega}$中点$O=(0,0,\cdots)$的可数局部基，且$O_{n+1}\subset O_n(n\in N)$。那么$\mathscr{U}_n$是$X$的开$K$-覆盖。事实上，对$K\in\mathscr{K}(X)$，$f_0\in[K,O_n]$，于是存在$f\in[K,O_n]\cap A_n$，从而$K\subset f^{-1}(O_n)$。由条件可知存在$U_n\in\mathscr{U}_n$，使$\{U_n:n\in N\}$是$X$的$K$-序列。取$f_n\in A_n$使$U_n=f_n^{-1}(O_n)$。下证在$C_k(X,\mathbb{R}^{\omega})$中$f_n\to f_0$。对于$f_0$在$C_k(X,\mathbb{R}^{\omega})$中的任意邻域$[K,V]$，其中$K\in\mathscr{K}(X)$，$V$是$O$在$\mathbb{R}^{\omega}$中的开邻域，存在$m\in N$，使$O_m\subset V$，并且当$n\geqslant m$时$K\subset U_n$，于是当$n\geqslant m$时，$f_n(K)\subset O_n\subset V$，即$f_n\in[K,V]$，所以$f_n\to f_0$，故$C_k(X,\mathbb{R}^{\omega})$是一个强 Fréchet 空间。(iv)→(i)显然。

注 在 $C_p(X)$ 上，k-性质，Fréchet 性质，强 Frechet 性质相互等价[4]。定理 1 和引理 1 说明了相应的性质在 $C_k(X)$ 上成立。

空间 X 称为有可数扇密度[5]，如果对 $x\in X, x\in \bigcap_{n\in N}\bar{A}_n$，其中 A_n 是 X 的子集，存在 A_n 的有限子集 B_n，使 $x\in \overline{\bigcup\{B_n:n\in N\}}$。

定理2 $C_k(X)$ 有可数扇密度的充分必要条件是 X 的每一开 K-覆盖列 $\{\mathscr{U}_n:n\in N\}$，存在有限的 $\mathscr{U}'_n\subset\mathscr{U}_n(n\in N)$，使 $\bigcup\{\mathscr{U}'_n:n\in N\}$ 是 X 的 K-覆盖。

证 必要性。设 $\{\mathscr{U}_n:n\in N\}$ 为 X 的开 K-覆盖序列，置 $A_n=\{f\in C_k(X):f[X\backslash U]\subset\{0\}, U\in\mathscr{U}_n\}$，则 $\bar{A}_n=C_k(X)$。事实上，对于 $C_k(X)$ 的任一非空开子集 $\bigcap_{i<m}[K_i,V_i]$，取 $f_0\in \bigcap_{i<m}[K_i,V_i]$，因为 $\mathscr{U}_n$ 为 K-覆盖，存在 $U\in\mathscr{U}_n$，使 $\bigcup_{i<m}K_i\subset U$。由引理3，存在 $g\in C_k(X)$，$g\Big|_{\bigcup_{i<m}K_i}=f_0\Big|_{\bigcup_{i<m}K_i}$，并且 $g(X\backslash U)\subset\{0\}$。则 $g\in A_n\bigcap\left(\bigcap_{i<m}[K_i,V_i]\right)$。取 $f_1\in C_k(X)$ 使 $f_1(X)=\{1\}$，则 $f_1\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n$，由 $C_k(X)$ 有可数扇密度，对 $n\in N$，存在 A_n 的有限子集 $\{f_{n,j}:j\leqslant i(n)\}$ 使 $f_1\in\overline{\{f_{n,j}:n\in N,j\leqslant i(n)\}}$。由 A_n 的构造，存在 $U_{n,j}\in\mathscr{U}_n$，$f_{n,j}[X\backslash U_{n,j}]=\{0\}$，$j\leqslant i(n)$。记 $\mathscr{U}'_n=\{U_{n,j}:j\leqslant i(n)\}$。再证 $\bigcup\{\mathscr{U}'_n:n\in N\}$ 是一个 K-覆盖。对 $K\in\mathscr{K}(X)$，因为 $f_1\in[K,(0,2)]$，存在 $n\in N, j\leqslant i(n)$ 使 $f_{n,j}\in[K,(0,2)]$，则 $K\subset U_{n,j}$，所以 $\{U_{n,j}:n\in N,j\leqslant i(n)\}$ 是一个 K-覆盖。

充分性。因为 $C_k(X)$ 是拓扑群，因此我们只须证明 $C_k(X)$ 在点 $f_0:X\to\{0\}$ 具有可数扇密度。设 $f_0\in\bigcap_{n\in N}\bar{A}_n$，其中 $A_n\subset C_k(X)$。令 $\mathscr{U}_n=\left\{g^{-1}\left(\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right): g\in A_n\right\}$，则 $\mathscr{U}_n$ 是 X 的开 K-覆盖（参考定理 1 中 (iii)→(iv) 的证明）。置 $M=\{n\in N:X\in\mathscr{U}_n\}$。若 $|M|=\aleph_0$，则对 $m\in M$，存在 $g_m\in A_m$，使 $X=g_m^{-1}\left(\left(-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)\right)$，于是在 $C_k(X)$ 中 $g_m\to f_0(m\in M)$。故命题成立。若 M 为有限，则存在 $n_0\in N$，当 $m\geqslant n_0$ 时，对 $g\in A_m, g^{-1}\left(\left(-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)\right)\neq X$。$\{\mathscr{U}_m:m\geqslant n_0\}$ 为 X 的开 K-覆盖列，由假设存在 $\mathscr{U}_m$ 中的有限子族 $\mathscr{U}'_m$ 使 $\bigcup\{\mathscr{U}'_m:m\geqslant n_0\}$ 是 X 的 K-覆盖。记 $\mathscr{U}'_m=\{U_{m,j}:j\leqslant i(m)\}$，那么存在 $f_{m,j}\in A_m$ 使 $U_{m,j}=f_{m,j}^{-1}\left(\left(-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)\right)$。下面证 $f_0\in\overline{\{f_{m,j}:m\geqslant n_0, j\leqslant i(m)\}}$。对 f_0 的任一邻域 $[K,(-\varepsilon,\varepsilon)]$，让 $M'=\{(m,j):m\geqslant n_0, j\leqslant i(m)$，使 $K\subset U_{m,j}\}$。显然 M' 是不空的，若 M' 为有限，对 $(m,j)\in M'$，因为 $U_{m,j}\neq X$，取 $x_{m,j}\in X\backslash U_{m,j}$，置 $K_1=K\bigcup\{x_{m,j}:(m,j)\in M'\}$，则 $K_1\in\mathscr{K}(X)$，那么 $\bigcup\{\mathscr{U}'_m:m\geqslant n_0\}$ 中不存在元素含有 K_1。矛盾。于是 M' 是无限集。因而存在 $m_0\geqslant n_0, j\leqslant i(m_0)$，使 $\frac{1}{m_0}<\varepsilon$ 且 $K\subset U_{m_0,j}$，$f_{m_0,j}(K)\subset(-\varepsilon,\varepsilon)$，即 $f_{m_0,j}\in[K,(-\varepsilon,\varepsilon)]$。证毕。

作者感谢蒋继光教授的热情帮助和悉心指导。

参考文献

1 Arhangel'skii A V. A Survey of C_p-theory, *Questions and Answers in General Topology*. 1987, 5:1—109.

2 McCoy R A, Ntantu I. Topological properties of spaces of continuous functions. *Lecture. Notes in Math.*, 1315, Springer, Berlin, 1988.

3 Michael E. A quintuple quotient quest. *General Top. Appl.*, 1972, 2:91—138.

4 Gerlits D. Some properties of $C(X)$, Ⅱ. *Top. Appl.*, 1983, 15:255—262.

5 Arhangel'skii A V. Hurewicz spaces, analytic sets, and fan tightness of function spaces. *Soviet Math. Dokl.*, 1986, 33:396—399.

On Fan Tightness and Strong Fréchet Property for $C_k(X)$

Lin Shou (*Ningde Teacher's College, Ningde, Fujian*, 352100)

Liu Chuan (*Guangxi University, Nanning, Guangxi*, 530004)

Teng Hui (*Sichuan University, Chengdu, Sichuan*, 610064)

Absract In this paper, we show that (1) $C_k(X)$ is strong Frechet if and only if for each sequence $\{\mathscr{U}_n : n\in N\}$ of open K-covers of X, there exists $U_n\in\mathscr{U}_n$ for $n\in N$ such that $\{U_n : n\in N\}$ is a K-sequence of X; (2) $C_k(X)$ has countable fan tightness if and only if for each sequence $\{\mathscr{U}_n : n\in N\}$ of open K-covers of X, there exists finite subfamily $\mathscr{U}'_n\subset\mathscr{U}_n$ such that $\bigcup\{\mathscr{U}'_n : n\in N\}$ is an open K-cover of X.

Key words function space; strong Fréchet space; fan tightness; K-cover; K-sequence