Vol. 13(1993)
No. 4

数 学 杂 志
J. of Math. (PRC)

关于(mod K)可度量空间*

林 寿

(福建省宁德师范专科学校)

摘要 本文的主要结果是证明在 T_1 空间类中下列条件相互等价：

(1)空间具有 σ 局部有限(mod K)基.

(2)空间具有 σ 遗传闭包保持(mod K)基.

(3)空间具有 σ 紧有限(mod K)基.

关键词 (mod K)基 拟(mod K)基 局部有限集族 遗传闭包保持集族 紧有限集族

具有 σ 局部有限(mod K)基的正则空间称为(mod K)度量空间[1]. 它刻划了度量空间的完备逆象[1]. 在[2]中，我们证明了拓扑空间 X 是一个(mod K)度量空间当且仅当 X 是一个具有 σ 遗传闭包保持(mod K)基的正则的 k 空间. 由此产生的问题是该结果中 k 空间的条件是否可以省去. 本文引进了比(mod K)度量空间更广泛的拟(mod K)度量空间的概念，并且给出了拟(mod K)度量空间的一个刻划. 由此说明(mod K)度量空间等价于具有 σ 遗传闭包保持(mod K)基的正则空间. 最后，利用紧有限集族给出(mod K)度量空间的另一刻划.

本文所论空间均指满足 T_1 分离性公理的拓扑空间.

定义 1 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的开子集族. $\mathscr{P}$ 称为 X 的(mod K)基[1]，如果存在由 X 的某些闭紧子集组成的 X 的覆盖 $\mathscr{K}$ 满足：若 $K\subset U$，其中 $K\in\mathscr{K}$ 且 U 是 X 的开子集，则对某个 $P\in\mathscr{P}$ 有 $K\subset P\subset U$ 成立. 上述 $\mathscr{P}$ 有时也称为关于 $\mathscr{K}$ 的(mod K)基. 具有 σ 局部有限(mod K)基的正则空间称为(mod K)度量空间.

本文将建立比(mod K)度量空间更广泛的一类空间的特征. 这类空间及其特征依赖于如下拟(mod K)基的概念和遗传闭包保持集族的概念.

定义 2 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的开子集族. $\mathscr{P}$ 称为 X 的拟(mod K)基(quasi-(mod K)-base)，如果存在由 X 的某些闭可数紧子集组成的 X 的覆盖 $\mathscr{K}$ 满足定义 1 中的条件. 具有 σ 局部有限拟(mod K)基的正则空间称为拟(mod K)度量空间(quasi-(mod K)-metric space).

定义 3 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族. $\mathscr{P}$ 称为遗传闭包保持的[3]，如果对于任意的 $H(P)\subset P\in\mathscr{P}$ 有 $\bigcup\{\overline{H(P)}:P\in\mathscr{P}\}=\overline{\bigcup\{H(P):P\in\mathscr{P}\}}$ 成立. 遗传闭包保持集族有时简记为

* 收稿日期：1991-05-17。国家自然科学基金资助项目

HCP 集族。

显然，空间 X 的局部有限集族是 HCP 集族，并且如果 $\mathscr{P}$ 是 X 的 HCP 集族，那么对于任意的点 $x(P)\in P\in\mathscr{P}$，集合 $\{x(P):P\in\mathscr{P}\}$ 是 X 的闭离散子空间。为了完成 HCP 集族向局部有限集族的过渡，我们还需要 q 空间的概念。

定义 4　设 X 是一个拓扑空间。X 中的点 x 称为 X 的 q 点[4]，如果点 x 在 X 中存在 q 序列，即存在点 x 在 X 中的邻域序列 $\{U_n\}$ 使得若序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\in U_n(n\in N)$，那么 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点。若空间 X 的每一点都是 X 的 q 点，则称 X 是一个 q 空间。

引理 1　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的 HCP 集族且 $x\in X$。若 x 是 X 的 q 点，则 $\{P\in\mathscr{P}:x\in\overline{P\setminus\{x\}}\}$ 是有限的。

证　如果存在 $\{P_n:n\in N\}\subset\mathscr{P}$ 使 $x\in\overline{P_n\setminus\{x\}}(n\in N)$。因为点 x 是 X 的 q 点，让 $\{U_n\}$ 是点 x 在 X 中的 q 序列。由于 X 是 T_1 空间，对于 $n\in N$，$(P_n\setminus\{x\})\cap U_n$ 是无限集，于是可以选取 $x_n\in(P_n\setminus\{x\})\cap U_n$ 使得所有的 x_n 是互不相同的。由于 $x_n\in U_n(n\in N)$，从而序列 $\{x_n\}$ 在 X 中有聚点，因此 $\{x_n:n\in N\}$ 不是 X 的闭离散子集，这与 $x_n\in P_n\in\mathscr{P}(n\in N)$ 并且 $\mathscr{P}$ 是 HCP 的相矛盾。故 $\{P\in\mathscr{P}:x\in\overline{P\setminus\{x\}}\}$ 是有限的。

引理 2　设 $\mathscr{P}$ 是 X 的 HCP 的开子集族且点 x 是 X 的聚点。若 x 是 X 的 q 点，则 $\mathscr{P}$ 在点 x 是局部有限的。

证　置　$V=X\setminus\bigcup\{\overline{P}:x\overline{\in}\overline{P}\}$，
那么 V 是点 x 在 X 中的开邻域，并且

$$\{P\in\mathscr{P}:P\cap V\neq\phi\}\subset\{P\in\mathscr{P}:x\in\overline{P}\}.$$

对于 $P\in\mathscr{P}$，因为 P 是 X 的开子集并且 x 是 X 的聚点，所以 $x\in\overline{P}$ 当且仅当 $x\in\overline{P\setminus\{x\}}$。由引理 1 知，$\{P\in\mathscr{P}:x\in\overline{P}\}$ 是有限的，所以 $\{P\in\mathscr{P}:P\cap V\neq\phi\}$ 是有限的，因而 $\mathscr{P}$ 在点 x 是局部有限的。

定理 1　具有 σ HCP 拟(mod K)基的空间具有 σ 局部有限拟(mod K)基。

证　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的关于 $\mathscr{K}$ 的 σ HCP 拟(mod K)基，其中 $\mathscr{K}$ 是由 X 的某些闭可数紧子集组成的 X 的覆盖。记 $\mathscr{I}=\bigcup\{\mathscr{I}_n:n\in N\}$，其中每一 $\mathscr{I}_n$ 是 X 的 HCP 的开子集族。因为有限个 HCP 集族的并仍然是 HCP 集族，不妨设 $X\in\mathscr{P}_n\subset\mathscr{I}_{n+1}(n\in N)$。

先证明 X 是一个 q 空间。对于任意的 $x\in X$，存在 $K\in\mathscr{K}$ 使 $x\in K$。不妨认为 K 不是 X 的开子集，否则 $\{K_n\}$ 就是点 x 在 X 中的一个 q 序列，其中 $K_n=K(n\in N)$。置

$$\mathscr{P}'=\{P\in\mathscr{P}:K\subset P\},$$

那么 $\mathscr{P}'$ 是 K 在 X 中的邻域基。设 f 是从 X 到 X/K 的自然商映射，记 X 的子集 K 在 X/K 中的对应点为 y，让　$\mathscr{B}=\{f(P):P\in\mathscr{P}'\}$。
因为 f 是连续的闭映射，所以 $\mathscr{B}$ 是点 y 在 X/K 中的 σ HCP 的邻域基，又因为点 y 不是 X/K 的孤立点，所以 $\mathscr{B}$ 是可数的([5]定理 6)，从而 $\mathscr{P}'$ 是可数的。即 K 具有可数特征。由于 K 是 X 的闭可数紧子集，不难验证 $\mathscr{P}'$ 就是点 x 在 X 中的 q 序列([6]命题 41.5)。故 X 是一个 q 空间。

对于 $n\in N$，置

$X_n=\{x\in X:\mathscr{P}_n$ 在点 x 是局部有限的$\}$，那么 X_n 是 X 的开子集并且 $X_{n+1}\subset X_n$。由引理 2，X_n 含有 X 的所有聚点，于是 $X\backslash X_n$ 是 X 的某些孤立点组成的集合，从而 $X\backslash X_n$ 也是 X 的开子集，因此 $X\backslash X_n$ 是 X 的既开且闭的离散子集合。让

$$\alpha_n=\{P\cap X_n:P\in\mathscr{P}_n\}\cup\{\{x\}:x\in X\backslash X_n\},$$

$$\mathscr{K}'=\{K\cap Z:K\in\mathscr{K}\}\cup\{\{x\}:x\in X\backslash Z\},$$

其中 $Z=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}X_n$ 是 X 的闭子集，

那么 α_n 是 X 的局部有限的开子集族，$\mathscr{K}'$ 是由 X 的某些闭可数紧子集组成的 X 的覆盖。我们断言 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 是 X 的关于 $\mathscr{K}'$ 的拟(mod K)基。

事实上，对于 $H\subset U$，其中 $H\in\mathscr{K}'$ 并且 U 是 X 的开子集。不妨设 $H=K\cap Z$，其中 $K\in\mathscr{K}$。因为 $K\cap Z\subset U$，所以

$$K\subset U\cup(X\backslash Z)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(X\backslash X_n)\cup U.$$

由 K 的可数紧性及 $\{X\backslash X_n\}$ 是 X 的单调上升的开子集列，存在 $i\in N$ 使得

$$K\subset(X\backslash X_i)\cup U.$$

又由于 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}(n\in N)$，存在 $j\in N$ 且 $j\geqslant i$ 和 $P\in\mathscr{P}_j$ 使得

$$K\subset P\subset(X\backslash X_i)\cup U,$$

于是

$H=K\cap Z\subset P\cap X_j\subset U$，并且 $P\cap X_j\in\alpha_j$，因此，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n$ 是 X 的关于 $\mathscr{K}'$ 的 σ 局部有限的拟(mod K)基。

注　若将定理 1 中的拟(mod K)基加强为(mod K)基，从定理 1 的证明可以看出我们事实上也证明了具有 σ HCP(mod K) 基的空间是具有 σ 局部有限 (mod K) 基的空间。因而(mod K)度量空间等价于具有 σ HCP(mod K)基的正则空间。

本文的第二部分内容是利用紧有限的概念给出(mod K)度量空间的另一个刻划。

定义 5　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族。$\mathscr{P}$ 称为紧有限的，如果对于 X 的任意的紧子集 K，集族 $\{P\in\mathscr{P}:K\cap P\neq\phi\}$ 是有限的。

定理 2　具有 σ 紧有限(mod K)基的空间具有 σ 局部有限(mod K)基。

证　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的关于 $\mathscr{K}$ 的 σ 紧有限的(mod K)基，其中 $\mathscr{K}$ 是由 X 的某些闭紧子集组成的 X 的覆盖。记 $\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_n:n\in N\}$，其中每一 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的紧有限的子集族。因为有限个紧有限集族的并（或交）仍然是紧有限的，所以不妨设 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$ 并且 $\mathscr{P}_n$ 关于有限交封闭($n\in N$)。我们断言每一 $\mathscr{P}_n$ 是局部有限的。事实上，对于任意的 $n\in X$，存在 $K\in\mathscr{K}$ 使 $x\in K$，置　$\mathscr{P}'=\{P\in\mathscr{P}:K\subset P\}$，
那么 $\mathscr{P}'$ 是可数的。记　$\mathscr{P}'=\{P_i:i\in N\}$，
那么 $\mathscr{P}'$ 是 K 的可数邻域基。因为 $\mathscr{P}$ 关于有限交封闭，不妨设 $P_{i+1}\subset P_i(i\in N)$。对于 $n\in N$，若 $\mathscr{P}_n$ 在点 x 不是局部有限的，由于每一 P_i 是点 x 的邻域，那么集族

$$\{P\in\mathscr{P}_n:P\cap P_i\neq\phi\}$$

是无限的，于是存在 $\mathscr{P}_n$ 的可数子族 $\{Q_i : i\in N\}$ 使得 $Q_i\cap P_i\neq\phi(i\in N)$。对于 $i\in N$，取定 $x_i\in Q_i\cap P_i$，置　　$F=K\cup\{x_i : i\in N\}$，
则 F 是 X 的紧子集。事实上，对于 X 的覆盖 F 的开子集族 $\mathscr{U}$，因为 K 是 X 的紧子集，存在 $\mathscr{U}$ 的有限子族 $\mathscr{U}'$ 使得 $\mathscr{U}'$ 覆盖 K。由于 $\mathscr{P}'$ 是 K 的邻域基，存在 $j\in N$ 使 $K\subset P_j\subset\bigcup\mathscr{U}'$，从而 $K\cup\{x_i : i\geqslant j\}\subset\bigcup\mathscr{U}'$，
于是 $F\setminus\bigcup\mathscr{U}'$ 是有限集，因此存在 $\mathscr{U}$ 的含有 $\mathscr{U}'$ 的有限子族 $\mathscr{U}''$ 使得 $\mathscr{U}''$ 覆盖 F，即 F 是 X 的紧子集。然而，对于 $i\in N$ 有 $F\cap Q_i\neq\phi$，这与 $\mathscr{P}_n$ 的紧有限性相矛盾。故 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的局部有限的子集族。因此，X 具有 σ 局部有限(mod K)基。

最后，我们对定理 1 和定理 2 作一点说明。T. Mizokami 在研究广义度量空间时引进了 CF^* 集族的概念。

定义 6　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族。$\mathscr{P}$ 称为 CF^* 集族[7]，如果对于 X 的任意的紧子集 K，$\mathscr{P}_K=\{P\cap K : P\in\mathscr{P}\}$ 是有限的，并且若 $H\in\mathscr{P}_K$ 且 H 是 X 的无限子集，那么 $\{P\in\mathscr{P} : P\cap K=H\}$ 是有限的。

在空间 X 中，有下列关系成立[7]：

$$\begin{tikzcd}
 & HCP\text{ 集族} \arrow[d, shift left, "/" marking] \arrow[dr] & \\
\text{局部有限集族} \arrow[ur] \arrow[dr] & & CF^*\text{ 集族} \\
 & \text{紧有限集族} \arrow[u, shift left, "/" marking] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

对照定理 1 和定理 2，自然产生的疑问是具有 σ CF^*(mod K) 基的正则空间是否是(mod K)度量空间。我们给一反例否定这一问题。让 X 是文[5]例 9 所构造的具有 σ 弱遗传闭包保持基的正则的非 k 空间。因为 X 不是一个 k 空间，所以 X 不是(mod K)度量空间（(mod K)度量空间可以刻划为度量空间的完备逆象）。又因为弱遗传闭包保持集族是 CF^* 集族（见文[7]命题3.2(1)和命题3.7的证明），所以 X 具有 σ CF^* 基，从而 X 也具有 σ CF^*(mod K)基。

参 考 文 献

1　Michael, E., On Nagami's Σ-spaces and some related matters, Proc. Washington State Univ. Top. Conf., 1969, 1—7.

2　Lin Shou（林寿）, (mod K)-bases and paracompact p-spaces, Northeastern Math. J., 7(1991), 492—496.

3　Lašnev, N., Closed images of metric spaces, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 170(1966)(3), 505—507.

4　Michael, E., A note on closed maps and compact sets, Israel J. Math., 2(1964), 173—176.

5　Burke, D., Engelking, R., Lutzer, D., Hereditarily closure-preserving collections and metrization, Proc. Amer. Math. Soc., 51(1975), 483—488.

6　儿玉之宏，永见启应著，方嘉琳译，拓扑空间论，北京：科学出版社，1984.

7　Mizokami, T., On CF families and hyperspaces of compact subsets, Top. Appl., 35(1990), 75—92.

ON (MOD K)—METRIZABLE SPACES

Lin Shon（林寿）

（*Ningde Teachers' College*）

Abstract

In this paper it is proved that the following are eqnivalent for a T_1-space X:

(1) X has a σ-locally finite (mod K)-base.

(2) X has a σ-hereditarily closure-preserving (mod K)-base.

(3) X has a σ-compact-finite (mod K)-base.

Key words (mod K)-base qnasi-(mod K)-base locally finite family hereditarily closure-preserving family compact-finite family.