第18卷第1期 广西大学学报(自然科学版) Vol.18 No.1
1993年3月 JOURNAL OF GUANGXI UNIVERSITY Mar. 1993

$C_K(X)$的可数强扇密度*

林 寿[1)] 刘 川[2)]

摘 要 证明了$C_K(X)$有可数强扇密度的充分必要条件是X的每一开k-覆盖序列$\{\tilde{U}_n\}$，存在$U_n \in \tilde{U}_n$使$\{U_n\}$为k-覆盖。

关键词 函数空间； 可数强扇密度； k-覆盖

分类号 O189.1

1983年J.Gerlits和Zs.Nagy[1]在研究函数空间的Fréchet性质时引进了性质C''. 1988年M.Sakai[2]为刻划性质C''引进了可数强扇密度(Countable strong fan tightness)的概念，并证明了$C_p(X)$具有可数强扇密度当且仅当X的任何有限积具有性质C''. 本文借助于McCoy和Ntantu的k-覆盖的概念，用X的拓扑性质刻划了$C_K(X)$的可数强扇密度。

本文所涉及的空间均为Tychonoff空间，R表示实数具有通常拓扑。

设X，Y为拓扑空间，对于$A \subset X$，$V \subset Y$，记$[A, V] = \{f \in C(X, Y): f(A) \subset V\}$，其中$C(X, Y)$表示从$X$到$Y$的连续函数全体。记$\tilde{K}(X)$为$X$中的所有非空紧子集。由$\{[K, V]: K \in \tilde{K}(X)$，$V$是$Y$中的开集$\}$作为$C(X, Y)$的子基产生的拓扑称为$C(X, Y)$上的紧开拓扑，记为$C_K(X, Y)$. X的子集族α称为X的一个k－覆盖[3]，如果$\tilde{K}(X)$中的任一元素均含于α的某些元素内，我们简记$C_K(X, R)$为$C_K(X)$.

引理1[3] $C_K^\omega(X, R)$同胚于$C_K(X, R^\omega)$.

引理2 对于空间X，设$K \subset U$，其中$K \in \tilde{K}(X)$，U是X的开集。若f是K上的连续函数，则存在X上的连续函数g，满足$g|_K = f$，且$g(X \setminus U) \subset \{0\}$.

证 设βX为X的极大紧化，存在βX的开子集W使$U = W \cap X$，则$K \subset W$. 定义f_1，使$f_1|_K = f$，$f_1(\beta X \setminus W) \subset \{0\}$，则$f_1$是$\beta X$中闭子集$K \cup (\beta X \setminus W)$上的连续函数，故存在$\beta X$上的连续函数$g_1$使$g_1|_{K \cup (\beta X \setminus W)} = f_1$，令$g = g_1|_X$，则$g$满足要求。

空间X称为有可数强扇密度[2]，如果对$x \in X$，$x \in \bigcap_{n \in N} \overline{A_n}$，$A_n$为$X$的子集，存在$x_n \in A_n$，使$x \in \overline{\{x_n: n \in N\}}$.

定理 对于拓扑空间X，下列命题等价

---

* 国家自然科学基金资助课题
作者单位:1)福建省宁德师专数学科，352100；2)广西大学数学与信息科学系，530004
收稿日期: 1991-11-04

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1) $C_K(X)$有可数强扇密度；

2) $C_K^{\omega}(X)$有可数强扇密度；

3) 对于X的每一开$k-$覆盖序列$\{\tilde{U}_n\}$，存在$U_n\in\{\tilde{U}_n\}(n\in N)$，使$\{U_n\}$为$k-$覆盖。

证 2)→1) 从定义容易验证可数强扇密度具有闭遗传性，所以若$C_K^{\omega}(X)$具有可数强扇密度，则$C_K(X)$有可数强扇密度。

3)→2) 由引理1，$C_K^{\omega}(X)$同胚于$C_K(X, R^{\omega})$. 由于$C_K(X, R^{\omega})$是一个拓扑群，因此我们只须证明$C_K(X, R^{\omega})$在点$f_0: X\to\{0\}$，具有可数强扇密度。

设$f_0\in\bigcap_{n\in N}\overline{A_n}$，其中$A_n\subset C_K(X, R^{\omega})$. 令$\{O_n: n\in N\}$表示$R^{\omega}$中$O=\{0, 0, \cdots\}$的可数下降局部基。置$\tilde{U}_n=\{g^{-1}(O_n): g\in A_n\}$，则$\tilde{U}_n$是$X$的开$k-$覆盖。事实上，对$K\in\mathcal{K}(X)$，由$f_0\in\overline{A_n}$，则存在$g_0\in[K, O_n]\bigcap A_n$，$K\subset g_0^{-1}(O_n)\in\tilde{U}_n$.

① 若$M=\{n\in N, X\in\tilde{U}_n\}$无限，对$f_0$的任一邻域$[K, V]$，则我们可取$m\in M$，使$O_m\subset V$，由$\tilde{U}_m$的构造，存在$g_m\in A_m$使$X=g_m^{-1}(O_m)$，$g_m(X)\subset O_m$，$g_m\in[K, V]$，对$m\in M$，任意取$g_m\in A_m$，则$f_0\in\overline{\{g_m: m\in N\}}$.

② $M=\{n\in N: X\in\tilde{U}_n\}$有限，存在$n_0\in N$，当$m\geqslant n_0$时，对$g\in A_m$，有$g^{-1}(O_m)\neq X$. $\{\tilde{U}_m: m\geqslant n_0\}$为$X$的开k－覆盖序列，对$m\geqslant n_0$存在$U_m\in\tilde{U}_m$，使$\{U_m: m\geqslant n_0\}$是$X$的k－覆盖，由$\tilde{U}_m$的构造，存在$g_m\in A_m$，使$U_m=g_m^{-1}(O_m)$，对$m<n_0$，任意取$g_m\in A_m$，我们将证明$f_0\in\overline{\{g_m: m\in N\}}$.

对f_0的任一邻域$[K, V]$，令$\tilde{A}=\{U_m: K\subset U_m, m\geqslant n_0\}$，则$|\tilde{A}|\geqslant\omega$. 否则$\tilde{A}=\{U_{m_1}, U_{m_2}, \cdots, U_{m_j}\}$，由于$U_{m_i}\neq X$，取$x_{m_i}\in X\setminus U_{m_i}$ $(1\leqslant i\leqslant j)$，$K\bigcup\{x_{m_i}: 1\leqslant i\leqslant j\}$是$X$的紧子集，由$\{U_m: m\geqslant n_0\}$是$X$的k－覆盖，则存在$U_{m_0}\in\{U_m: m\geqslant n_0\}$，使$K\bigcup\{x_{m_i}: 1\leqslant i\leqslant j\}\subset U_{m_0}$，因此$U_{m_0}\in\tilde{A}$，矛盾。因此我们可取$n_1\in N$使$K\subset U_{n_1}$且$O_{n_1}\subset V$. $g_{n_1}^{-1}(O_{n_1})=U_{n_1}\supset K$，$g_{n_1}(K)\subset O_{n_1}$，则$g_{n_1}\in[K, O_{n_1}]\subset[K, V]$. 于是$f_0\in\overline{\{g_m: m\in N\}}$.

1)→3) 设$\{\tilde{U}_n: n\in N\}$是X的开k－覆盖序列。置

$$A_n=\{f\in C_K(X):\quad f|_{X\setminus U}=0\quad U\in\tilde{U}_n\},$$

则$\overline{A_n}=C_K(X)$，其中$n\in N$. 事实上，对$C_K(X)$中的任一邻域$\bigcap_{i=1}^{n}[K_i, V_i]$，取$f\in\bigcap_{i=1}^{n}[K_i, V_i]$，则$f(K_i)\subset V_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 由于$\tilde{U}_n$是开k－覆盖，存在$U\in\tilde{U}_n$使$\bigcup_{i=1}^{n}K_i$

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\subset U$. 由引理 2，存在 $g\in C_K(X)$，使 $g|_{\bigcup_{i=1}^{n} K_i}=f|_{\bigcup_{i=1}^{n} K_i}$ 且 $g|_{X\setminus U}=0$，则 $g\in\bigcap_{i=1}^{n}[K_i,\ V_i]\bigcap A_n$. 令 $f_0:X\to\{1\}$，$f_0\in\bigcap_{n\in N}\overline{A}_n$. 由于 $C_K(X)$ 有可数强扇密度，因此存在 $f_n\in A_n$ 使 $f_0\in\overline{\{f_n:n\in N\}}$，由 A_n 的定义存在 $U_n\in\tilde{U}_n$ 使 $f_n|_{X\setminus U_n}=0$，则 $\{U_n:n\in N\}$ 为 X 的 k－覆盖。事实上，对 $K\in\tilde{K}(X)$，存在 $m\in N$，使 $f_m\in[K,\ (0,\ 2)]$(注意 $[K,\ (0,\ 2)]$ 是 f_0 的一个邻域)，于是 $K\subset U_m$.

参 考 文 献

1 Gerlits J, Nagy Zs. Some properties of $C(X)$, I. Top Appl, 1982(14): 151-161

2 Sakai M. Property C and function spaces. Proc Amer Math Soc, 1988(104): 917-919

3 McCoy R, Ntantu I. Topological properties of spaces of continuous functions. Lecture Notes Math, 1315(Springer, Berlin). 1988

The Countable Strong Fan Tighness of $C_K(X)$

Lin Shou Liu Chuan

Abstract $C_K(X)$ has countable strong fan tightness iff if $\{\tilde{U}_n:n\in N\}$ is a sequence of open k-cover of X, then there exist $U_n\in\tilde{U}_n$ such that $\{U_n:n\in N\}$ is a k-cover.

Key words function space; countable strong fan tightness; k-cover

© 1994-2006 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net