科学通报

第38卷 第1期　CHINESE SCIENCE BULLETIN　1993年1月

研究简报

函数空间的遗传稠密度和遗传 Lindelöf 度*

滕辉
(四川大学数学系,成都 610064)

林寿
(福建宁德师范专科学校数学科,宁德 352100)

刘川
(广西大学数学系,南宁 530004)

关键词　函数空间、遗传稠密度、遗传 Lindelöf 度、ind X

设 X,Y 是拓扑空间. $C_p(X,Y)$ 记由 X 到 Y 的全体连续函数带上点态收敛拓扑(见后面的定义)后的函数空间. 函数空间理论研究的基本问题之一是确定拓扑性质对 (P, Q) 使得 $C_p(X,Y)$ 具有性质 P 的充要条件是 X 具有性质 Q. Zenor[1] 证明了对于 Tychonoff 空间 X 和实数空间 $\mathbb{R}$, X^ω 是遗传 Lindelöf (遗传可分) 的充分必要条件是 $C_p(X,\mathbb{R}^\omega)$ 是遗传可分(遗传 Lindelöf). 由此产生的问题是[2]: 在 Zenor 的结果中能否将 $C_p(X,\mathbb{R}^\omega)$ 换成 $C_p(X,\mathbb{R})$? McCoy 和 Ntantu[3] 曾试图解决此问题,但他们的证明是错误的(见文献[3]中定理 4.8.1的证明).本文在对函数空间的定义域或值域空间作适当假定的情况下,部分地解决了上述问题. 因此,我们一方面推广了 Zenor 的经典结果,证明在 Zenor 的结果中可用 $C_p(X,\mathbb{R}^2)$ 代替 $C_p(X,\mathbb{R}^\omega)$; 一方面纠正了 McCoy 和 Ntantu 的上述错误命题.

本文所论空间均是 Tychonoff 的. $\mathbb{R}$ 表示实直线赋予通常拓扑.

对于拓扑空间 X 和 Y, $C(X,Y)$ 记由 X 到 Y 的全体连续函数. 对 $x\in X$ 和 $V\subseteq Y$, 记

$$[x,V]=\{f\in C(X,Y): f(x)\in V\}。$$

以 $\{[x,V]: x\in X,\ V$ 是 Y 的开集$\}$ 为子基在 $C(X,Y)$ 上产生的拓扑称为点态收敛拓扑. 记此空间为 $C_p(X,Y)$. $d(x)=\omega\cdot\min\{\tau: \exists B\subseteq X$ 使得 $\bar{B}=X$ 且 $|B|=\tau\}$、$L(x)=\omega\cdot\min\{\tau: X$ 的每一开覆盖有基数不超过 τ 的子覆盖$\}$、$hd(x)=\sup\{d(Y): Y\subseteq X\}$ 和

$$\mathrm{hL}(x)=\sup\{L(Y): Y\subseteq X\}$$

分别称为空间 X 的稠密度、Lindelöf 度、遗传稠密度和遗传 Lindelöf 度.

本文中的定理证明需要下述命题.

命题[1]　设 ϕ: $X\times Y\to Z$ 是一映射, Z 是第二可数的空间且 $\mathscr{B}$ 是 Z 的一个可数基. 若 $\{M(y,B): y\in Y、B\in\mathscr{B}\}$ 和 $\{G(X,B): x\in X, B\in\mathscr{B}\}$ 分别是 X 和 Y 的开基, 则 $\mathrm{hd}(X)=\mathrm{hL}(Y)$, $\mathrm{hL}(X)=\mathrm{hd}(Y)$. 其中

$$M(y,B)=\{x\in X: \phi(x,y)\in B\},\quad G(X,B)=\{y\in Y: \phi(x,y)\in B\}.$$

设 $\mathbb{C}$ 为复平面, $\mathbb{D}=\{Z\in\mathbb{C}: |Z|\leqslant 1\}$ 和 $S^1=\{Z\in\mathbb{C}: |Z|=1\}$ 分别为单位圆盘和单位圆周. 若 $Z\in S^1$, $[Z,0]$ 表示 $\mathbb{D}$ 内连接 Z 和中心点 o 的直线段. 称一个空间 Y 含有圆

1991-10-28 收稿, 1992-09-22 收修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目.

盘如果Y含有和 $\mathbb{D}$ 同胚的子空间. 例如$\mathbb{R}^n(n \geqslant 2)$ 和高于1维的多胞形均为此类空间.

下面给出本文的定理和证明.

定理1 设 X 是一拓扑空间, Y 是含有圆盘的第二可数空间. 则

$$\mathrm{hd}(C_p(X,Y)) = \mathrm{hL}(X^\omega),\ \mathrm{hL}(C_p(X,Y)) = \mathrm{hd}(X^\omega).$$

证 考虑映射 $\phi: X^\omega \times C_p(X,Y) = Y^\omega$, 若 $x = (x_i) \in X^\omega$, $f \in C_p(X,Y)$, 则 $\phi(x, f) = (f(x_i)) \in Y^\omega$. 设 $\mathscr{B}$ 是 Y^ω 的一个可数基. 由命题知我们只需证明 $\{M(f,B): f \in C_p(X,Y), B \in \mathscr{B}\}$ 和 $\{G(x,B): x \in X^\omega, B \in \mathscr{B}\}$ 分别为 X^ω 和 $C_p(X,Y)$ 的开基.

对给定的 $f \in C_p(X,Y)$, $\phi(\cdot, f): X^\omega \to Y^\omega$ 是连续的. 这是因为若

$$U = U_{n_1} \times U_{x_2} \times \cdots \times U_{n_j} \times \Pi Y$$

是 Y^ω 的标准开集,则 $(\phi(\cdot,f))^{-1}(U) = f^{-1}(U_{n_1}) \times f^{-1}(U_{n_2}) \times \cdots \times f^{-1}(U_{n_j}) \times \Pi X$ 是 X^ω 的开集. 于是每一 $M(f,B)$ 是 X^ω 中的开集. 设 $z = (x_i) \in X^\omega$. 给 Z 在 X^ω 中的任一标准开邻域 $W = W_{n_1} \times \cdots \times W_{n_j} \times \Pi X$,存在 Z 的另一邻域 $V = V_{n_1} \times \cdots \times V_{n_j} \times \Pi X$ 使得 $V_{n_i} \subseteq W_{n_i}$ 且若 $x_{n_i} = x_{n_j}$, 则 $V_{n_i} = V_{n_j}$, 否则 $\bar{V}_{n_i} \cap \bar{V}_{n_j} = \varnothing$. 设

$$\{n_1, n_2, \cdots, n_j\} = \bigcup_{l=1}^m A_l$$

且满足 $n_i, n_j \in A_l$ 当且仅当 $x_{n_i} = x_{n_j}$. 记 $x_l = x_{n_i}$, $V_l = V_{n_i}$, 其中 $n_i \in A_l$. 则若 $l \neq l'$, $\bar{V}_l \cap \bar{V}_{l'} = \varnothing$. 由假设 Y 含有圆盘,可不妨设 $\mathbb{D}$ 为 Y 的子集. 设 $\{a_1, \cdots, a_m\}$ 是 S^1 的 m 等分点. 作连续映射 $f_l: X \to [a_l, 0]$ 使得 $f_l(x_l) = a_l$, $f_l(X \setminus V_l) = \{0\}$. 定义 $f: X \to Y$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} f_l(x), & \text{若 } x \in V_l, \\ 0, & \text{若 } x \notin \bigcup_{l=1}^m V_l. \end{cases}$$

容易验证 f 是连续的. 取 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 在 Y 中互不相交的邻域 $U_1, U_2, \cdots, U_m$ 使得

$$U_l \cap [a_{l'}, 0] \neq \varnothing$$

当且仅当 $l = l'$. 对 $n_i \in A_l$, 令 $H_{n_i} = U_l$. 记 $H = H_{n_1} \times \cdots \times H_{n_j} \times \Pi Y$, 则 $(f(x_i)) \in H$, 从而 $Z \in M(f,H)$. 若 $y = (y_i) \in M(f,H)$, 则对 $i \leqslant j$, $f(y_{n_i}) \in H_{n_i}$. 若 $y_{n_i} \notin V_{n_i}$, 则要么 $y_{n_i} \notin \bigcup_{l=1}^m V_l$, 要么 $y_{n_i} \in V_{n_k}$, 其中 $x_{n_k} \neq x_{n_i}$. 设 $n_i \in A_l$, $n_k \in A_{l'}$, $l \neq l'$. 在前一种情况下, $f(y_{n_i}) = 0 \notin H_{n_i}$, 矛盾;在后一种情况下, $f(y_{n_i}) \in [a_{l'}, 0]$, 从而 $f(y_{n_i}) \notin U_l = H_{n_i}$, 矛盾. 于是有 $y_{n_i} \in V_{n_i}$, 从而 $y \in V$. 故 $z \in M(f,H) \subseteq W$. 取 $B \in \mathscr{B}$ 使得 $(f(x_i)) \in B \subseteq H_0$ 则 $z \in M(f,B) \subseteq M(f,H)$. 至此我们便证明了 $\{M(f,B): f \in C_p(X,Y), B \in \mathscr{B}\}$ 是 X^ω 的开基.

剩下的是证明 $\{G(x,B): x \in X^\omega, B \in \mathscr{B}\}$ 是 $C_p(X,Y)$ 的开基. 首先对任意给的

$$x = (x_i) \in X^\omega, \phi(x, \cdot): C_p(X,Y) \to Y^\omega$$

是连续的,这是因为若 $U = U_{n_1} \times \cdots \times U_{n_j} \times \Pi Y$ 是 Y 中的基本开集, 则

$$(\phi(x, \cdot))^{-1}(U) = \bigcap_{i=1}^{j} [x_{n_i}, U_{n_i}].$$

从而每一 $G(x,B)$ 是 $C_p(X,Y)$ 中的开集. 设 $f \in C_p(X,Y)$ 且任给 f 的基本邻域

$$V = \bigcap_{i=1}^{j} [x_i, V_i].$$

取 $y=(y_i)\in X^\omega$ 使得对 $i\leqslant j$, $y_i=x_i$. 记 $U=V_1\times\cdots\times V_j\times\Pi Y$, 则 $(f(y_i))\in U$, 从而 $f\in G(y,U)$. 易见若 $g\in G(y,U)$, 则 $g\in\bigcap_{i=1}^{j}[x_i,V_i]$. 于是 $f\in G(x,U)\subseteq V$. 取 $B\in\mathscr{B}$使得 $(f(y_i))\in B\subseteq U_0$ 则 $f\in G(y,B)\subseteq G(y,U)\subseteq V$. 定理证毕.

因为 $\mathbb{R}^2$ 是含有圆盘的第二可数空间,故我们有下述推论.

推论 1　对拓扑空间 X, $\mathrm{hL}(C_p(X,\mathbb{R}^2))=\mathrm{hd}(X^\omega)=\mathrm{hL}(C_p(X,\mathbb{R}^\omega))$, $\mathrm{hd}(C_p(X,\mathbb{R}^2))=\mathrm{hL}(X^\omega)=\mathrm{hd}(C_p(X,\mathbb{R}^\omega))$.

空间 X 的小归纳维数 $\mathrm{ind}\,X=0$, 若 X 有一个由既开且闭的集组成的基.

定理 2　设 $\mathrm{ind}\,X=0$, Y 是一无限的第二可数空间. 则

$$\mathrm{hd}(C_p(X,Y))=\mathrm{hL}(X^\omega),\ \mathrm{hL}(C_p(X,Y))=\mathrm{hd}(X^\omega).$$

证　考虑与定理 1 证明中同样的映射 $\phi:X^\omega\times C_p(X,Y)\to Y^\omega$. 设 $\mathscr{B}$ 是 Y^ω 的可数基. 欲证 $\{M(f,B):f\in C_p(X,Y),\ B\in\mathscr{B}\}$ 和 $\{G(x,B):x\in X^\omega,\ B\in\mathscr{B}\}$ 分别是 X^ω 和 $C_p(X,Y)$ 的开基. 注意到定理 1 的证明中关于 $\{G(x,B):x\in X^\omega,\ B\in\mathscr{B}\}$ 构成 $C_p(X,Y)$ 的开基之证明并没有用到"Y 含有圆盘"这一假设. 因而只需证明 $\{M(f,B):f\in C_p(X,Y),\ B\in\mathscr{B}\}$ 是 X^ω 的开基. 首先易见每一 $M(f,B)$ 开于 X^ω. 设

$$z=(x_i)\in X^\omega,\ W=W_{n_1}\times\cdots\times W_{n_j}\times\Pi X$$

是 z 的任一基本邻域. 可找到 z 的另一基本邻域 $V=V_{n_1}\times\cdots\times V_{n_j}\times\Pi X$ 使得 $V_{n_i}\subseteq W_{n_i}$ 且若 $x_{n_i}=x_{n_k}$, 则 $V_{n_i}=V_{n_k}$, 否则 $\overline{V}_{n_i}\cap\overline{V}_{n_k}=\varnothing$. 由于 $\mathrm{ind}\,X=0$, 可要求 V_{n_i} 是 X 的既开且闭集. 记 $\{n_1,n_2,\cdots,n_j\}=\bigcup_{l=1}^{m}A_l$. 取定 Y 中 $m+1$ 个不同的点 $\{r_0,r_1,\cdots,r_m\}$以及 Y 中互不相交的开集族 $\{U_0,U_1,\cdots,U_m\}$ 使得 $r_l\in U_l\ (0\leqslant l\leqslant m)$. 作映射 $f:X\to Y$ 如下:

$$f(x)=\begin{cases} r_l, & 若\ x\in V_l,\\ r_0, & 若\ x\notin\bigcup_{l=1}^{m}V_l.\end{cases}$$

显然 f 是连续的. 对 $n_i\in A_l$, 令 $H_{n_i}=U_l$. 记 $H=H_{n_1}\times\cdots\times H_{n_j}\times\Pi Y$. 我们欲证 $z\in M(f,H)\subseteq V$. 易见 $(f(x_i))\in H$, 从而 $z\in M(f,H)$. 设 $y=(y_i)\in M(f,H)$, 则对 $i\leqslant j$, $f(y_{n_i})\in H_{n_i}$. 若 $y_{n_i}\notin V_{n_i}$, 则要么 $y_{n_i}\in V_{n_k}$, 其中 $x_{n_i}\neq x_{n_k}$, 要么 $y_{n_i}\notin\bigcup_{l=1}^{m}V_l$. 设 $n_i\in A_l$, $n_k\in A_{l'}$ 且 $l\neq l'$, 则 $f(y_{n_i})\in\{r_0,r_{l'}\}$, 而 $H_{n_i}\cap\{r_0,r_{l'}\}=\varnothing$, 故 $f(y_{n_i})\notin H_{n_i}$, 矛盾. 于是 $y\in V$. 因此 $z\in M(f,H)\subseteq V$. 取$B\in\mathscr{B}$ 使得 $f(x_i))\in B\subseteq H$. 则 $z\in M(f,B)\subseteq M(f,H)\subseteq V\subseteq W$. 至此定理证毕.

推论 2　设 $\mathrm{ind}\,X=0$. 则

$$\mathrm{hd}(C_p(X,\mathbb{R}))=\mathrm{hL}(X^\omega),\ \mathrm{hL}(C_p(X,\mathbb{R}))=\mathrm{hd}(X^\omega).$$

文献[3]中的推论 4.8.4 断言对于拓扑空间 X,

$$\mathrm{hd}(C_p(X,\mathbb{R}))=\mathrm{hL}(X),\ \mathrm{hL}(C_p(X,\mathbb{R}))=\mathrm{hd}(X).$$

事实上这两个等式是不成立的. 设 S 表示 Sorgenfrey 直线,则 $\mathrm{ind}\,S=0$ 且

$$\mathrm{hd}(S)=\mathrm{hL}(S)=\omega.$$

由于 S^2 既不遗传可分又不是遗传 Lindelöf. 由推论 2 知 $\mathrm{hd}(C_p(S,\mathbb{R}))>\omega$ 和

$$hL(C_p(S,R)) > \omega.$$

故上述等式不成立。

致谢 感谢蒋继光教授的热情帮助。

参 考 文 献

[1] Zenor, P., *Fund. Math.*, 1980, **151**: 175—180.
[2] Okuyama, A., *Proc. Fifth Prague Top. Symp.*, 1981, 525—535.
[3] McCoy, R. A., Ntantu, I., *Lecture Notes Math.*, Springer, Berlin, 1988, **1315**.