第8卷第4期　苏州大学学报（自然科学）　Vol.8 No.4
1992年10月　JOURNAL OF SUZHOU UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)　Oct. 1992

关于Arhangel'skii的“映射与空间”

林　寿
（福建省宁德师范专科学校）

摘　要：依照Alexandroff 1961年在布拉格会议上提出的通过映射对空间进行分类的设想，Arhangel'skii 1966年发表了名著“映射与空间”。一方面总结一般拓扑学发展半个世纪来在映射理论方面所取得的重要成果，另一方面对如何通过映射研究空间提出一些具体的设想（以猜想或问题的形式出现）。本文对二十五年来Arhangel's-kii问题的进展作简要述评。

关键词：连续映射，拓扑空间，集论拓扑，广义质量空间，覆盖性质。

1　引　言

1961年Alexandroff[1]在布拉格“一般拓扑学”学术会议上提出通过映射研究空间的设想，其实质是三个彼此密切相关的问题：

1.1 在什么情况下，某个固定空间类A中的每个空间都可以用映射类L中的映射映成类B中的某个空间？

1.2 如果LC是类C中的空间在属于类L的映射作用下的像空间的全体，那么LC中的空间具有怎样的内部特征？

1.3 设L是一个映射类，而$N(A,B)$是一个映射类，其定义域是类A中的空间，值域是类B中的空间，那么类$L\cap N(A,B)$中的映射有哪些性质？

特别地，这些一般性的提法概括了下述问题：在各种映射作用下，哪些拓扑性质保持不变？

Alexandroff设想的意义在于用映射作为工具揭示各种拓扑空间类的内在规律，将映射作为纽带把五花八门的拓扑空间联结在一起。1966年Arhangel'skii发表了著名论文“映射与空间”[2]开创了用映射研究空间的新纪元，它较系统地总结了一般拓扑学发展半个世纪来人们在映射理论方面所取得的重要成果，更重要的是对如何借助映射来研究各式各样的空间给出了一些具体设想。为实现这些以猜想或问题形式出现的设想，二十多年来国内外一批又一批杰出的一般拓扑学专家经过艰苦不懈的努力，获得了大量令

收稿日期：1991—10—25
* 国家自然科学基金资助项目，宁德地区科委资助课题。

人欣慰的成就，回答了其中的大部分问题．实践表明这些问题的解决不仅给一般拓扑学中许多古老的课题灌输了新鲜血液，而且产生了众多新的研究方向．这为一般拓扑学开辟了新的研究领域，带来了六十年代末期至整个七十年代一般拓扑学的繁荣景象．为今后进一步研究的需要，同时也为了纪念*Arhangel'skii*的名著发表二十五周年，本文对*Arhangel'skii*问题的进展作简单的述评．

2　问题与解答

依照*Arhangel'skii*[2]的约定，所有映射指连续满映射；若未特别说明，所有空间都是完全正则空间．我们按*Arhangel'skii*所安排的章节且基本上保持原来提出问题的次序．问题的叙述保持*Arhangel'skii*的原意，只是个别术语的名称或记号按现在的习惯作了适当变换．为了便于归类述评，给每类问题附上一个小标题．

2.1 度量空间与其它一些空间之间的一般关系

问题2.1.1 第一可数紧空间的基数（1）（见问题2.6.4）

Ⅰ（*Alexandroff*，*Urysohn*）是否存在第一可数的*Hausdorff*紧空间X使$|X|>c$？

Ⅱ　设第一可数的空间X是c个度量子空间的并，是否有$|X|\leqslant c$？（问题1.1）*

答　Ⅰ是否定的，Ⅱ是肯定的．

Arhangel'skii[3]证明了对于任一第一可数的T_2 *Lindelöf*空间X有$|X|\leqslant c$．*Arhangel'skii*的论文解决了1923年提出而悬置了四十五年之久的*Alexandroff-Urysohn*问题[4]，是对一般拓扑学的重大贡献．所使用的方法开创了一般拓扑学的一个新领域：研究拓扑空间上的基数函数，即将许多按某种可数性来描述的拓扑性质推广到高基数．具有较大影响的工作是由*de Groot*，*Hajnal*，*Juhász*及*Arhangel'skii*作出的．关于基数函数的研究成果可看*Juhász*的书[5、6]及*Hodel*[7]、*Juhász*[8]的综合报告．

问题2.1.2　正规*Moore*空间

Ⅰ（*Alexandroff*）具有一致基的正规空间是否是可度量化空间？（问题1.2）

Ⅱ　度量空间的开紧像如果是一个正规空间是否是可度量化空间？（问题1.3）

Ⅰ与Ⅱ等价．在（$MA+\neg CH$）下是否定的，在（*PMEA*）下是肯定的．

Arhangel'skii[9]证明了具有一致基的T_1空间等价于度量空间的开紧像，因而Ⅰ与Ⅱ等价．一方面，在（$MA+\neg CH$）下，*Pixley-Roy*空间是一个不可度量化的具有一致基的正规空间[10]；另一方面*Nyikos*[11]证明了在（*PMEA*）下正规*Moore*空间是可度量化空间，从而在（*PMEA*）下具有一致基的正规空间是可度量化空间．

注　1960年*Alexandroff*提出猜测[12]：具有一致基的正规空间是可度量化空间．与此紧密相关的是1973年*Jones*提出的正规*Moore*空间猜测[13]：正规*Moore*空间是可度量化空间．*Alexandroff*猜测弱于正规*Moore*空间猜测，它们是否等价还是一个尚未解决的问题[4]．毫不夸张地说正规*Moore*空间猜测支配了半个世纪来一系列度量化定

*括号内的编号或节次是*Arhangel'skii*原文中的编号或所处的节次

理的研究，并且对于一般拓扑学的发展起了强有力的推进作用。这些发展与公理集合论的逐步成熟是相辅相成的。一般拓扑学中许多经典性问题的求解对数理逻辑的成长是强大的刺激。数理逻辑的结果和方法渗透到点集论对一般拓扑学又有很大的推动。*Cohen*解决了连续统问题，*Jech*、*Solovay*和*Jensen*等人对于*Souslin*假设的成功研究以及力迫法、*Martin*公理、可构造性公理等一些结论在拓扑空间的研究中都得到了广泛的应用。这些发展形成了一般拓扑学与数理逻辑的重要分支：集论拓扑。这方面的一些经典结果、进展及有关问题可参看*Rudin*[10]、*Kunen*和*Vaughan*[15]以及*van Mill*、*Reed*[11]的专著。

2.2 可度量化空间的商空间

问题2.2.1 度量空间的商像

Ⅰ　对度量空间的商紧像作内在刻划。

Ⅱ　对度量空间的商s-像作内在刻划。（问题2.1）

Ⅲ　一个紧空间如果是一个度量空间的商s-像，它是否是可度量化空间？（问题2.2）

Ⅳ　如果一个仿紧空间是度量空间的伪开紧像，它是否是可度量化空间？（问题2.3）

Ⅴ　度量空间的伪开紧像是否一个p-空间？（§5）

答　已求得Ⅰ、Ⅱ的解，Ⅲ、Ⅳ和Ⅴ都是肯定的。

我们利用弱基的概念对度量空间的商紧像给出了一个内在特征[16]：具有点有限弱展开的空间。*Hoshina*[17]及*Gruenhage*等[18]都对度量空间的商s-像作了内在刻划。*Hoshina*利用q-序列定义了q-s-空间，并且证明了一个T_1空间是度量空间的商s-像当且仅当它是一个q-s-空间。*Gruenhage*等给出的下列特征在应用上较为方便：对于T_2空间X，下述条件相互等价：

（1）X是度量空间的商s-像。

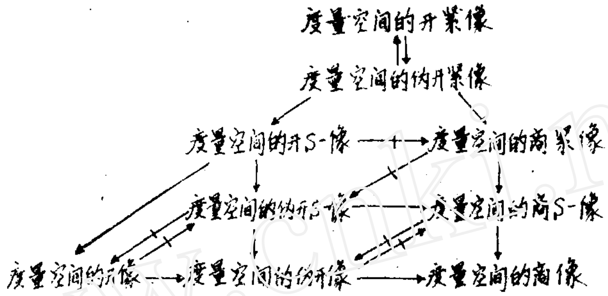
（2）X是度量空间的序列覆盖的商s-像。

（3）X是一个k-空间并且X具有点可数覆盖$\mathscr{P}$使得X的任一开子集U关于$\{P\in\mathscr{P}:\ P\subset U\}$具有弱拓扑。

度量空间的商s-像的另一简洁的内在特征是由*Tanaka*[19]给出：具有点可数cs^*-网的序列空间。应用这些特征，一方面可得到度量空间的伪开s-像的特征，另一方面可得出度量空间的商s-像是一个可度量化空间当且仅当它是一个T_2的M-空间[18]。因而Ⅲ的回答是肯定的。其实，早在1969年*Filippov*[20]就证明了仿紧p-空间若是度量空间的商s-像，那么它可度量化。*Mancuso*[21]证明了度量空间的伪开紧像是可展空间，从而Ⅳ和Ⅴ的回答是肯定的。

注　度量空间的商像、伪开像和开像分别正好是序列空间、*Fréchet*空间和第一可数空间[22]；另一方面度量空间的开s-像、开紧像分别正好是具有点可数基的空间、和具有一致基的空间[2]，因而探求度量空间的商s-像、伪开s-像、商紧像以及伪开紧像的内在刻划势在必然，*H.Junnila*[23]证明了仿紧空间的伪开紧像是弱仿紧空

间，从而如果一个T_2空间是度量空间的伪开紧像，那么它是一个弱仿紧的可展空间，于是具有一致基，故是度量空间的开紧像．人们对于度量空间的商s-像感兴趣的另一个原因是由于1973年$Michael$和$Nagami$[24]提出的下述尚未解决的问题：一个T_2空间如果是度量空间的商s-像，那么它能是度量空间的紧覆盖商s-像吗？关于$Michael$—$Nagami$问题的进展及相关问题参见文献[18]和[25]．度量空间的各种商像的关系如图1．



问题2.2.2　弱基与对称质量空间（1）（见问题2.2.3、2.3.1、2.4.4）

Ⅰ　满足gf-可数公理的拓扑群是否是可度量化空间？

Ⅱ　具有按点可数弱基的紧空间是否是可度量化空间？

Ⅲ　在紧空间类中gf-可数公理与第一可数公理是否等价？

Ⅳ　对称度量空间是否具有σ-离散网？（问题2.4）

Ⅴ　完正规紧空间的对称度量子空间是否是可度量化子空间？（问题2.5）

Ⅵ　半度量的仿紧空间是否具有σ-离散网？

Ⅶ　正规的对称度量空间是否是仿紧空间？

答　Ⅰ、Ⅱ是肯定的，Ⅳ是否定的，而Ⅲ、Ⅴ、Ⅳ和Ⅶ在某些集论公理假设下也是否定的．

$Nyikos$[26]证明了满足gf-可数公理的拓扑群是第一可数空间，因而它是可度量化空间．$Hoshina$[17]证明了具有按点可数弱基的紧T_2空间是度量空间的商s-像，所以它是可度量化空间（见问题2.2.1）．至于Ⅲ，$Jakovlev$[27]在（CH）下构造了一个不具有点G_δ-性质，但满足gf-可数公理的紧T_2空间．周浩旋[28]在（$MA+\neg CH$）下构造了满足gf—可数公理的紧T_2空间使它的特征是c．如果不考虑分离公理，$Harley$等[29]在1975年构造了一个不满足第一可数性公理的紧T_1对称度量空间（这个空间不是T_2空间）．$Kofner$[30]构造了不具有σ-离散网的半度量空间．$Burke$、$Davis$[31]在（CH）下构造了一个对称度量空间使它不可度量化，但它有一个完正规的紧化，因而Ⅴ在（CH）下是否定的．$Michael$[32]在（CH）下构造了不具有σ-离散网的正则、遗传$Lindelöf$的半度量空间．在（$MA+\neg CH$）下$Pixley$—Roy空间是非仿紧的正规对称度量空间[10]．值得一提的是$Nyikos$[11]证明了在（$PMEA$）下半度量的正规空间是仿紧空间．

注　引进弱基并系统地研究对称度量性是Arhangel'skii论文的一大特色．弱基作为基的一种推广产生了一系列有趣的工作．这些工作大致可分为三类：

（1）将与第一可数公理有关的定理推广到满足gf-可数公理的空间[33]．

（2）与度量性、可展性、半度量性类比引入g-度量性、g-可展性、对称度量性等新空间类，这些对广义度量空间理论的发展起积极作用[33、34、35]．

（3）许多用基刻划的度量化定理可减弱到用弱基刻划的度量化定理[36、37]．

本节中未解决的问题．

问题2.2.3 弱基与对称度量空间（2）（见问题2.2.2、2.3.1、2.4.4）

Ⅰ　是否存在满足gf-可数公理的仿紧空间X使$|X|>c$？（Jakovlev[27]构造了具有任意基数的对称度量的紧T_1空间）

Ⅱ　集态正规的对称度量空间是否是仿紧空间？

2.3 商空间可度量化的一般准则

问题2.3.1 弱基与对称度量空间（3）（见问题2.2.2、2.2.3、2.4.4）

每一对称度量空等价于一个满足条件（K）的对称度量空间．（猜测3.1）

答　猜测是不正确的．

满足条件（K）的对称度量空间称为K-对称度量空间．Burke[38]构造了一个非K-对称度量的可分Moore空间．

2.4 闭映射

问题2.4.1 闭映像（1）（见问题2.4.7）

Ⅰ　闭映射把度量空间映成什么空间？

Ⅱ　在Lindelöf空间的每个闭映射下，原像不是紧集的点的全体是否是可数的？即使对满足第一可数公理的完正规Lindelöf空间，答案也是未知的．（问题4.2）

答　1966年Lašnev[39]引进了遗传闭包保持集族，并由此给出了度量空间闭像的第一个内在特征(见[39])．后人称度量空间的闭像为Lašnev空间．但是，Lašnev关于度量空间闭像的特征在应用上并不方便．1985年Foged[40]给出Lašnev空间的另一个重要的特征：具有σ-遗传闭包保持k-网的Fréchet空间．1973年Slaughter[41]证明了度量空间的闭像是M_1-空间．Ⅱ是否定的．Chaber[42]构造了一个从不可数的满足第一可数性公理的Lindelöf空间X到单位区间I上的闭映射f使得对于任一$y\in I$，$f^{-1}(y)$不是X的紧子集．

注　Arhangel'skii论文中涉及的关于闭映像的问题虽不及商映像或开映像的问题多，但是象问题2.4.1.Ⅰ之类的问题确实诱发了人们寻求广义度量空间闭映像的内在特征的一系列工作．较大意义的工作属于Chaber和Foged等．读者可参阅文献[40、43—45]．

问题2.4.2 Dugundji扩张定理

Dugundji扩张定理的结论对于任意仿紧完正规空间是否正确？

答　不正确．

Van Douwen[46]构造了一个ℵ空间(因而仿紧完正规空间)使它不满足Dugundji扩

张定理的结论。实值连续函数的扩张是一个历史悠久而又十分令人感兴趣的课题，这大概基于它在一般拓扑学之外仍有广泛应用的缘故。经典的Tietze—Urysohn定理表明定义于正规空间的闭子空间上的任何实值连续函数可以扩张为整个空间上的实值连续函数。对于一个度量空间，或更一般地对于一个线性层空间的闭子空间上的实值连续函数还可以要求"线性扩张"[47]。尽管Dugundji扩张定理的结论对于仿紧完正规空间不成立，但是在其它一些空间类（如单调正规空间、集态正规空间）上还是有各种类型的扩张定理成立[48,49,50]。

问题2.4.3 层空间与σ-空间（1）（见问题2.4.6）

Ⅰ 具有可数网的第一可空间是否是层空间？（问题4.3）

Ⅱ 具有可数网的第一可数空间是否具有可数基？（§2）

Ⅲ（Ceder）具有对称度量的仿紧空间是否是层空间？（问题4.4）

答 否。

Heath[51]构造了一个具有可数网的正则半度量空间使它不是一个层空间。

问题2.4.4 弱基与对称度量空间（4）（见问题2.2.2、2.2.3、2.31）

完正规紧空间的对称度量子空间是否满足条件（K）（见[2]§3）？

答 满足。

设Y是完正规紧空间X的对称度量子空间。因为X是完正规紧空间，所以Y是第一可数的仿紧半度量空间，于是Y是某一度量空间的连续一对一原像[52]，从而Y满足条件（K）[2]。

问题2.4.5 L—空间

Ⅰ 具有按点可数基的完正规Lindelöf空间是否是可度量化空间？（问题4.6）

Ⅱ（Ponomarev） 完正规Lindelöf空间是否是可分空间？（甚至对完正规紧空间的情况，答案是未知的）

答 Ⅰ是独立性问题。Ⅱ得到一个相容性结果。

一个T_2空间称为L—空间，如果它是非可分的遗传Lindelöf空间。Ⅰ等价于是否存在具有点可数基的正则L—空间，Ⅱ等价于是否存在正则L—空间。Szentmiklóssy[53]证明了在（$MA+\neg CH$）下不存在第一可数的正则L—空间；而Tall[54]在（CH）下构造了一个具有点可数基的正则L—空间。故Ⅰ是独立性问题。Shakhmatvo[5]证明了存在正则对称度量的L—空间相容于ZFC。至于对完正规紧空间的情况，因为完正规的紧空间是第一可数空间，所以在（$MA+\neg CH$）下不存在紧L—空间。

一个T_2空间称为S—空间，如果它是一个非Lindlöf的遗传可分空间。L—空间与S—空间的存在性是Suslin假设的一种自然推广。熟知存在T_2（但非正则）的L—空间和S—空间[10]。正则S—空间的存在性独立于ZFC[56]。是否存在正则的L—空间或正则的S—空间是近二十多年来集论拓扑最活跃的领域之一[56,57]。

问题2.4.6 层空间与σ-空间（2）（见问题2.4.3）

Ⅰ 层空间是否具有σ-离散网？

Ⅱ 对于层空间X，以下关系是否成立：$nw(X)=d(X)=c(X)=L(X)$？

Ⅲ　在什么简单的补充条件下，具有可数网的空间是层空间？

Ⅳ　具有可数基空间的商紧像是否是层空间？（问题4.8）

答　Ⅰ、Ⅱ是肯定的，Ⅲ的一个解是附加单调正规空间，而Ⅳ在（MA）下是否定的。

Heath[58]证明了层空间具有σ—离散网。对于Ⅱ，设X是层空间，显然有$c(X)\leqslant d(X)\leqslant nw(X)$，$L(X)\leqslant nw(X)$。*Arhangel'skii*[2]已叙述了$c(X)\geqslant nw(X)$，于是$c(X)=d(X)=nw(X)$。另一方面，因为层空间具有σ-离散网，所以$L(X)\geqslant nw(X)$，故$L(X)=nw(X)$。*Borges*[59]在更一般的广义度量空间上讨论了与Ⅱ相关的一些基数函数。*Heath*等[12]证明了T_1空间是层空间当且仅当它是单调正规的半层空间，而具有可数网的正则空间是半层空间，所以具有可数网的T_1空间是层空间当且仅当它是单调正规空间。*Foged*[60]在（MA）下构造了一个非单调正规空间（因而非层空间）使它是一可分度量空间在有限到一商映射下的像，因而在（MA）下Ⅳ是否定的。

注　1959年*Arhangel'skii*[61]引进网的概念以证明对任意权数的*Alexandroff—Urysohn*加法定理。网的概念是基的概念的一种推广。继*Arhangel'skii*之后人们为适合于不同的目的讨论了基的种种一般化[62]（如k-网、($modk$)-网、p-网、伪基、p_基、拟基、π-基、弱基、($modk$)-基等）。从这三十多年来一般拓扑学的发展进程看，这些概念的引入产生的影响都不及网的概念深刻。网的概念的重要性表现在σ-空间的引进。类比于*Nagata—Smirnov*度量化定理，1967年*Okuyama*[63]定义了σ-空间——具有σ-局部有限网的正则空间。1968年*Nagata*和*Siwiec*[64]证明了σ-空间的重要特征定理：对于正则空间X，下列条件相互等价：

（1）　X是一个σ-空间。

（2）　X具有σ-离散网。

（3）　X具有σ-闭包保持网。

*Nagata—Siwiec*定理表明相对于*Bing—Nagata—Smirnov*度量化定理而言引进作为度量空间的一种推广的σ-空间获得了极大的成功。同时，*Nagata—Siwiec*定理也是σ-空间具有良好性质而得以广泛应用的基础。对于σ-空间理论的另一重大推进是1969年*Heath*[58]证明了层空间是σ-空间。或许更重要的是*Heath*所使用的证明方法。1962年*Heath*[65]为刻划半度量空间引入集值函数g，后来人们称之为g-函数或*Heath—Hodel*映射[66]。1965年*Heath*[67]用它刻划了层空间，进而1969年用这个层空间的刻划结合*Nagata—Siwiec*定理证明了层空间是σ-空间[58]。这初步显示了这种映射的效力。在*Heath*之后，经过*Hodel*[68]、*Fletcher*和*Lindgren*[69]、*Nagata*[70]以及国内一些拓扑学工作者的一系列工作表明了g-函数是研究拓扑空间论的有力工具。近三十年来一般拓扑学的研究实践表明*Heath—Hodel*映射的主要作用表现在三个方面[62]：

（1）发现或重新刻划广义度量空间类。

（2）探求广义度量空间之间或广义度量空间与其它一些拓扑性质之间的关系。

（3）证明确定的广义度量空间所具有的各种运算性质。

具有可数网的正则空间、层空间以及*Moore*空间是三个互不相关的空间类，它们分别用网、基以及覆盖的加细序列引进，这代表了发现新的广义度量空间的三个方向，而σ-空间正好是它们三者的共同推广。虽然半层空间或者Σ-空间都是σ-空间的推广，但是对于半层空间，两个仿紧半层空间之积空间未必是仿紧空间[32]；对于Σ-空间，它既没有象σ-空间的*Nagata*—*Siwiec*定理那样优美的刻划，而且闭映射又不能保持Σ-空间性质[71]。

本节中未解决的问题。

问题2.4.7 闭映像（2）（见问题2.4.1）

在仿紧空间的每个闭映射下，原像不是紧集的点的全体的势是否不超过被映空间的权？（问题4.1）

问题2.4.8 连续一对一映射（1）（见问题2.5.3、2.6.3）

具有对称度量的集态正规空间是否可用连续一对一映射映成某一度量空间？（问题4.5）

2.5 完备映射

问题2.5.1 p-空间

Ⅰ　p-空间的完备像是否是p-空间？（问题5.2）

Ⅱ　每个严格p-空间是否能用完备映射映成某个可展空间？

Ⅲ　仿紧p-空间的完备像是否是仿紧p-空间？（问题5.3）

Ⅳ　对称度量（或具σ-离散网）的严格p-空间是否是一个可展空间？

答　Ⅰ、Ⅱ是否定的，Ⅲ、Ⅳ是肯定的。

Chaber[72]构造了一个σ-仿*Lindelöf*且*screenable* p-空间使它在一完备映射下的像不是一个p-空间。*Burke*[73]构造了一个严格p-空间使它不能用完备映射映成某个可展空间。*Filippov*[74]证明了完备映射保持仿紧p-空间。*Burke*和*Stoltenberg*[75]证明了在完全正则空间类中，可展空间类、具有σ-离散网的p-空间类以及对称度量的p-空间类是一致的。

注　1961年在布拉格会议上*Alexandroff*[1]猜测仿紧空间是度空间的完备原像。然而这是不正确的[76]。1963年*Arhangel'skii*[76]定义了p-空间并且证明了度量空间的完备原像可以刻划为仿紧p-空间。p-空间类的作用主要表现在三个方面：

（1）刻划某些广义度量空间类的完备原像（如度量空间、具一致基空间、可展空间等）。

（2）积空间的仿紧性。

（3）度量化定理的一个因子。

严格p-空间的地位虽不如p-空间重要，但是严格p-空间与p-空间之间的精确关系是耐人寻味的。

（下转本刊1993年第9卷第1期）

（本文责任编辑：董张维）