福建省科协首届青年学术年会

—中国科协首届青年学术年会卫星会议

论 文 集

福建省科协首届青年学术年会
执 行 委 员 会 编

福建科学技术出版社

σ-映射与 Alexandroff 问题

林　寿

（宁德师范专科学校）

摘要　利用映射建立拓扑空间类与度量空间类的联系是苏联数学家 P. Alexandroff 1961 年在布拉格拓扑学学术会议上提出的通过映射对空间进行分类的设想。σ-空间、Aleph 空间和 g-可度量空间都是重要的拓扑空间类。然而，人们尚未发现能统一建立这些空间类与度量空间类联系的映射类。本文的目的是引进 σ-映射类以达到统一建立上述空间类与度量空间类联系的目的。

1961 年 P. Alexandroff 在布拉格"一般拓扑学以及它与现代分析和代数的关系"的学术会议上提出通过映射对空间进行分类的设想[1]，其核心问题之一是寻求适当的映射类将广义度量空间类特征为确定的度量空间类在这映射类下的像。例如，拓扑空间 X 具有点可数基当且仅当 X 是某一度量空间在开 S-映射下的像。具有特定性质的集族是产生广义度量空间的重要途径。从经典的 Nagata-Smirnov 度量化定理，局部有限集族在这过程中处于中心位置。例如，具有 σ-局部有限网或 k-网的空间都是一般拓扑学家一直关注的对象。但是，用怎样的映射恰好能揭示出度量空间类与这些空间类之间的内在规律是一个困惑人们多年的问题，在映射理论方面三十年的研究表明商映射、伪开映射、开映射、闭映射、紧覆盖映射、S-映射、紧映射等是探讨 Alexandroff 问题的有力工具。同时，人们也明白了映射与集族之间有一些必然的联系。因而问题的焦点在于寻求映射以建立度量空间与 σ-局部有限集族之间的某种必然联系。这正是本文的目的。

经验表明现成的映射类难以达到上述目的。我们定义了 σ-映射，通过它建立了 σ-空间、Aleph 空间、g-可度量空间与度量空间的联系。这些工作拓广了 Arhangel'skii、Michael 等关于可数集族方面的一系列工作，充分表明了 σ-映射是处理 σ-局部有限集族的一种有效工具。

本文所论空间均满足正则且 T_1 分离性公理。映射指连续的满函数。对于空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 及 $f:X\to Y$，记 $f(\mathscr{P})=\{f(P):P\in\mathscr{P}\}$。N 表示自然数集。

定义 1[1]　设 $f:x\to Y$。f 称为 σ-映射，若存在 X 的基 $\mathscr{B}$ 使 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的 σ-局部有限集族。

定义 2[2]　空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 中点 x 的网，如果 $x\in\bigcap\mathscr{P}$ 且对于 x 在 X 中的任意开领域 V，存在 $P\in\mathscr{P}$ 使 $P\subset V$。$\mathscr{P}$ 称为 X 的网，如果对于 $x\in X$，$\{P\in\mathscr{P}:x\in P\}$ 是点 x 在 X 中的网，具有 σ-局部有限网的空间称为 σ-空间。

定理 1　空间 X 是 σ-空间当且仅当 X 是某一度量空间在 σ-映射下的像。

证明　设空间 X 是 σ-空间。让 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的 σ-局部有限网。由正则性，设 $\mathscr{P}$ 是 X 的闭

网。又由于两个局部有限集族的交或并仍是局部有限集族，不妨设 $\mathscr{P}$ 关于有限交封闭。取 M 是集合 X 并且取 $\mathscr{P}$ 作为一个基赋予 M 拓扑（$\mathscr{P}$ 确实满足生成一个拓扑的基的条件）。让 f 是从 M 到 X 上的恒等映射。由于 $\mathscr{P}$ 是 X 的网，f 是连续函数。于是 f 是 σ-映射且 $\mathscr{P}$ 是 M 的 σ-局部有限基。又由于 X 是 T_1 空间，从而 M 是 T_1 空间。因为 $\mathscr{P}$ 的每一元是 M 的既开且闭的子集，所以空间 M 是正则空间。由 Nagata-Smirnov 度量化定理，M 是度量空间。因此 X 是度量空间 M 在 σ-映射 f 下的像。由于连续映射保持网，充分性是显然的。

定义 3[3] 设 $f:X\to Y$。f 称为紧覆盖映射，如果对 Y 的任一紧子集 K，存在 X 的紧子集 L 使 $f(L)=K$。

定义 4[4] 空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 k-网，如果对于 $K\subset U$，其中 K、U 分别是 X 的紧子集和开子集，存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $K\subset\bigcup\mathscr{P}'\subset U$。具有 σ-局部有限 k-网的空间称为 Aleph 空间。

定理 2 空间 X 是 Aleph 空间当且仅当 X 是某一度量空间在紧覆盖、σ-映射下的像。

证明 必要性。设 X 是一个 Aleph 空间，设 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ-局部有限 k-网。不妨设 $\mathscr{P}$ 是 X 的闭 k-网且关于有限交封闭。记 $\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_n:n\in N\}$，其中每一 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的局部有限集族。不妨设 $X\in\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$。设 $\mathscr{P}_n=\{P_\alpha:\alpha\in A_n\}$。置

$$M=\{\alpha=(\alpha_n)\in\prod_{n=1}^{\infty}A_n:\{P_{\alpha_n}\}\text{是 X 中某点 }x(\alpha)\text{在 X 中的网}\},$$

赋 M 予离散空间族 $\{A_n:n\in N\}$ 的 Tychonoff 积拓扑所诱导的子空间拓扑，则 M 是度量空间。因为 X 是 Hausdorff 空间，对于 $\alpha\in M$，$x(\alpha)$ 是唯一确定的，于是依 $f(\alpha)=x(\alpha)$ 定义了从 M 到 X 中的一个函数。往证 f 是紧覆盖、σ-映射。

(1) f 是满函数。对于任一 $x\in X$，由假设，存在 N 的子列 $\{n_i\}$ 及 $\alpha_{n_i}\in A_{n_i}$ 使 $\{P_{\alpha_{n_i}}\}_{i\in N}$ 是点 x 在 X 中的网。对于 $n\in N\setminus\{n_i:i\in N\}$，取 $\alpha_n\in A_n$ 使 $P_{\alpha_n}=X$。置 $\alpha=(\alpha_n)$，那么 $\alpha\in M$ 且 $f(\alpha)=x$，所以 f 是满函数。

(2) f 是连续函数。对于任一 $\alpha=(\alpha_n)\in M$ 及点 $f(\alpha)$ 在 X 中的开领域 V，存在 $i\in N$ 使 $P_{\alpha_i}\subset V$。置 $W=\{\beta\in M:\beta\text{ 的第 i 个坐标是 }\alpha_i\}$ 那么 W 是 M 中含点 β 的开子集，并且 $f(W)\subset P_{\alpha_i}\subset V$。故 f 是连续函数。

(3) f 是 σ-映射。对 $n\in N$，$\alpha_n\in A_n$，置

$V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\{\alpha\in M:\text{对 } i\leqslant n,\alpha\text{ 的第 i 个坐标是 }\alpha_i\}$，

$\mathscr{B}=\{V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n):\alpha_i\in A_i,i\leqslant n,\in N\}$，

那么 $\mathscr{B}$ 是 M 的基。为证 f 是 σ-映射只须验证 $f(V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$，因为由此可知 $f(\mathscr{B})=\mathscr{P}$ 是 σ-局部有限集族。由 f 的定义知对于 $i\leqslant n$ 有 $f(V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))\subset P_{\alpha_i}$，所以 $f(V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))\subset\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$。反之，对于 $x\in\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$，由于 f 是满函数，存在 $\beta=(\beta_j)\in M$ 使 $f(\beta)=x$。对于 $j\in N$，$P_{\beta_j}\in\mathscr{P}_j\subset\mathscr{P}_{j+n}$，于是存在 $\alpha_{j+n}\in A_{j+n}$ 使 $P_{\alpha_{j+n}}=P_{\beta_j}$。置 $\alpha=(\alpha_j)$，那么 $\alpha\in V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 且 $f(\alpha)=x$。因此 $\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}\subset f(V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))$。故 $f(V(\alpha_1,\cdots,\alpha_n))=\bigcap_{i\leqslant n}P_{\alpha_i}$，所以 f 是 σ-映射。

(4) f 是紧覆盖映射，对 X 的紧子集 K，由[5]引理 3.1，存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族的序列 $\{\mathscr{F}_i\}$ 使得每一 $\mathscr{F}_i$ 覆盖 K，并且如果 $x\in K$，$x\in F_i\in\mathscr{F}_i(i\in N)$，那么 $\{F_i\}$ 是点 x 在 X 中的网。取序列 $\{n\}$ 的一个单调上升的子序列 $\{n_i\}$ 使得有 $\mathscr{F}\subset\mathscr{P}_{n_i}$。不妨设 $n_1=1$。对于 $n_i\leqslant n<n_{i+1}$，置 $\mathscr{K}_n=\mathscr{F}_i$，那么 $\mathscr{K}_n\subset\mathscr{P}_n$，于是存在 A_n 的有限子集 B_n 使 $\mathscr{K}_n=\{P_\alpha:\alpha\in B_n\}$。置

$$L=\{\alpha=(\alpha_n)\in\prod_{n=1}^{\infty}B_n:K\cap(\bigcap_{i=1}^{\infty}P_{\alpha_{n_i}})\neq\Phi\text{ 并且当 }n_i<n<n_{i+1}\text{时有 }P_{\alpha_n}=P_{\alpha_{n_i}}\}。$$

如果 $\alpha=(\alpha_n)\in L$，取 $x\in K\cap(\bigcap_{i=1}^{\infty}P_{\alpha_{n_i}})$，那么 $\{P_{\alpha_{n_i}}\}$ 是点 x 在 X 中的网，于是 $\{P_{\alpha_n}\}$ 是点 x 在 X 中的网．从而 $\alpha\in M$ 并且 $f(\alpha)=x\in K$，因此 $f(L)\subset K$。另一方面，如果 $x\in K$，对于 $i\in N$ 取 $F_i\in\mathscr{F}_i$ 使 $x\in F_i$。对于 $n_i\leqslant n<n_{i+1}$，存在 $\alpha_n\in B_n$ 使 $P_{\alpha_n}=F_i$。置 $\alpha=(\alpha_n)$，那么 $\alpha\in L$ 且 $f(\alpha)=x$，因而 $K\subset f(L)$，故 $K=f(L)$。因为 B_n 是有限集，并且 L 是 $\prod_{n=1}^{\infty}B_n$ 的闭子集，于是 L 是 M 的紧子集。综上所述，f 是紧覆盖映射，必要性证毕。

充分性。设空间 X 是度量空间 M 在紧覆盖的 σ-映射 f 下的像，那么存在 M 的基 $\mathscr{B}$ 使 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ-局部有限集族。因为紧覆盖映射保持 k-网，所以 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ-局部有限 k-网，因此 X 是 Aleph 空间。

定义 5[6] 设 $f:(x,d)\to Y$，其中 d 是空间 X 上的度量。f 称为 π-映射，如果对于 $y\in Y$ 及 y 在 Y 中的领域 V 有 $d(f^{-1}(y),X\backslash f^{-1}(V))>0$。

定义 6[7] 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族，$\mathscr{P}$ 称为 X 的弱基，如果 $\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_x: x\in X\}$ 并且满足下述条件：

(1)$x\in\bigcap\mathscr{P}_x$，

(2)如果 $U、V\in\mathscr{P}_x$，那么存在 $W\in\mathscr{P}_x$ 使 $W\subset U\cap V$，

(3)X 的子集 G 是 X 的开子集当且仅当任给 $x\in G$，存在 $P\in\mathscr{P}_x$ 使 $P\subset G$。

定义 7[8] 具有 σ-局部有限弱基的空间称为 g-可度量空间。

引理[9] 设 $f:(x,d)\to Y$ 是商映射，其中 d 是 X 上的度量，那么 Y 是对称度量空间当且仅当 f 是 π-映射。

定理 3 空间 X 是 g-可度量空间当且仅当 X 是某一度量空间在(紧覆盖)商、π、σ-映射下的像。

证明 设空间 X 的 g-可度量空间，即 X 是对称度量的 Aleph 空间[9]。由定理 2，存在度量空间 M 和紧覆盖的 σ-映射 $f:M\to X$。因为 X 是 k-空间，由[10]引理 45.8，f 是商映射。又因为 X 是对称度量空间，由引理知 f 是 π-映射。

反之，设空间 X 是度量空间 M 在商、π、σ-映射 f 下的像。由引理知 X 是对称度量空间。因为 f 是 σ-映射，存在 M 的基 $\mathscr{B}$ 使 $f(\mathscr{B})$ 是 X 的 σ-局部有限集族。由于 f 是商映射并且 X 是对称度量空间，$f(\mathscr{B})$ 是 X 的 k-网[11]，于是 X 是一个 Aleph 空间，故 X 是 g-可度量空间。

最后，我们对 σ-映射和 Michael[12]定义的 σ-局部有限映射进行一些比较以说明 σ-映射的优点。

定义 8[12] 设 $f:X\to Y$，f 称为 σ-局部有限映射，如果对 X 的每一个 σ-局部有限覆盖 $\mathscr{P}$、$\mathscr{P}$ 存在加细 $\mathscr{B}$ 使 $f(\mathscr{B})$ 是 Y 的 σ-局部有限集族。

易验证，每一个 σ-映射是 σ-局部有限映射，Michael[12]曾证明与本文定理 1 相类似的定理，即一个空间是一个 σ-空间当且仅当该空间是某一度量空间在 σ-局部有限映射下的像。然而，下述例子说明 Michael 的方法不可以直接推广至 Aleph 空间或 g-度量空间。

例 存在度量空间 M，σ-空间 X 及 σ-局部有限映射 $f:M\to X$ 具有性质：

(1)f 是紧覆盖映射，但 X 不是 Aleph 空间。

(2)f 是商、π-映射，但 X 不是 g-可度量空间。

构造 让 X 是[13]例 2.5 所描述的空间，那么 X 是一个非正规的 σ-空间，并且 X 可表为它的两个开度量子空间的并。这时，X 不是一个 Aleph 空间，因为一个第一可数的 Aleph 空间是可度量化空间[14]。当然，X 也就不是一个 g-可度量空间。让 M 是 X 的那两个开度量子空间的

拓扑和，f 是从 M 到 X 上的显然映射，那么 M 是度量空间，并且 f 是有限到一的开映射，从而 f 是商、π-映射，并且 f 也是紧覆盖映射[15]。因为存在 M 的网 $\mathscr{B}$ 使 f($\mathscr{B}$)是 σ-局部有限集族，所以 f 是 σ-局部有限映射[12]

参考文献

1 Alexandroff, P., 1961, On some results concerning topolo-gical spaces and their continuous mappings, Proc, Symp. Gen, Top. Prague, 41—54.

2 Okuyama, A., 1967, Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, A9, 236—254.

3 Michael, E., 1964, A note on closed maps and compact sets, Israel J. Math., 2, 173—176.

4 O'Meara, P., 1971, On paracompactness in function spaces with the compact-open topology, Proc. AMS, 29, 183—189.

5 Michael, E., 1977, Ao'-spaces and a function space theorem of R. Pol, Indiana Univ. Math. J., 26, 299—306.

6 Heath, R., 1965, On open mappings and certain spaces satisfying the first countability axiom, Fund Math., 57, 91—96.

7 Arhangel'skii, A., 1966, Mappings and spaces, Russian Math. surveys, 21, 115—162.

8 Siwiec, F., 1974, On defining a space by a weak base, Pacific J. Math., 52, 233—245.

9 Tanaka, Y., 1991, Symmetric spaces, g-developable spaces and g-metrizable spaces, Math. Japonica, 36, 71—84.

10 儿玉之宏、永见启应，1984，《拓扑空间论》，科学出版社。

11 Tanaka, Y., 1987, Point-countable covers and k-networks, Topology Proc., 12, 327—349.

12 Michael, E., 1977, σ-locally finite maps, Proc. AMS, 65, 159—164.

13 Fleissner, W., Reed, G., 1977, Paralindelof spaces and spaces with a σ-locally countable base, Topology Proc., 289—110.

14 Gruenhage, G., 1984, Generalized metric spaces, Handbook of set-theoretic topology, 423—501.

15 Michael, E., 1959, A theorem on semi-continuous set-valude functions, Duke Math. J., 26, 647—656.

作者简介 林 寿，男，1960 年 3 月生，1987 年 7 月毕业于苏州大学数学系并获得理学硕士学位。现为福建省宁德师范专科学校数学科副教授，从事数学教学和研究工作。