中国科学技术协会首届青年学术年会

论文集

（理科分册）

中国科协首届青年学术年会
执行委员会编

中国科学技术出版社
1992年·北京

关于 A. V. Arhangel′skii 的两个问题*

林　寿

（宁德师专数学科　副教授）

摘要　1961 年苏联数学家 P. Alexandroff 在布拉格"一般拓扑学以及它与现代分析和代数的关系"的学术会议上提出通过映射对空间进行分类的设想。1966 年苏联拓扑学家 A. V. Arhangel′ skii 发表了著名论文《映射与空间》，它对如何借助映射来研究各式各样的拓扑空间给出了近 70 个以猜想或问题形式出现的具体设想。25 年的研究实践表明，对于 Arhangel′ skii 问题的解决不仅仅给一般拓扑学中许多课题灌输了新鲜血液，而且开辟了众多新的研究领域，大大地推动了拓扑学的发展。然而，Arhangel′ skii 的关于寻求度量空间或可分度量空间在商紧映射下的像空间的内在特征的问题至今尚未解决。本文的目的是给这两个问题以满意的回答。

定理 1　拓扑空间 X 是度量空间的商紧像当且仅当空间 X 具有点有限的弱展开。

定理 2　拓扑空间 X 是可分度量空间的商紧像当且仅当空间 X 具有可数弱基。

我们还研究了局部紧度量空间在商紧映射下的像空间的特征。

定理 3　拓扑空间 X 是局部紧度量空间的商紧像当且仅当空间 X 具有由度量空间组成的点有限 k 系。

本文内容属于数学领域的一般拓扑学方向。

苏联数学家 P. Alexandroff 在 1961 年的第一届布拉格"一般拓扑学以及它与现代分析和代数的关系"的学术会议上提出了用映射对空间进行分类的设想（Alexandroff 设想）其实质是三个彼此密切相关的问题：

Ⅰ　在什么情况下，某个固定空间类 A 中的每个空间都可以用映射类 L 中的映射成类 B 中的某个空间？

Ⅱ　如果 LC 是类 C 中的空间在属于类 L 的映射作用下的像空间的全体，那么 LC 中的空间具有怎样的内部特征？

Ⅲ　设 L 是一个映射类，而 $N(A,B)$ 是一个映射类，其定义域是类 A 中的空间，值域是类 B 中的空间，那么类 $L \cap N(A,B)$ 中的映射有哪些性质？

Alexandroff 设想的重要意义在于用映射作为工具以揭示各种拓扑空间类的内在规

* 国家自然科学基金资助项目。

律，将映射作为纽带把五花八门的拓扑空间联结在一起。1966 年苏联著名拓扑学家 A. V. Arhangel′skii 发表了历史性的论文《映射与空间》[1]，开创了用映射研究空间的新纪元，它较系统地总结了一般拓扑学发展半个世纪来人们在映射理论方面所取得的重要而丰富的成果，更重要的是对如何借助于映射来研究各式各样的空间给出了近 70 个以猜想或问题形式出现的具体设想。25 年来国内外一批批杰出的一般拓扑学专家经过艰苦不懈的努力，获得了大量令人欣慰的成就，回答了其中的大部分问题。实践已表明这些问题的解决不仅仅给一般拓扑学中许多课题灌输了新鲜血液，而且开辟了众多新的研究领域，大大地推动了拓扑学的发展。然而，Arhangel′skii 的下列两个问题至今未解决：

问题 1　寻求度量空间商紧像的内在特征。

问题 2　寻求可分度量空间商紧像的内在特征。

本文的目的是给上述两问题以满意的回答。我们约定：空间指满足正则且 T_1 分离性公理的拓扑空间；映射指连续且满的函数；N 表示全体自然数所构成的集合。

定义 1　设 $f:X\rightarrow Y$。f 称为商映射，如果 $f^{-1}(U)$ 是空间 X 的开子集，那么 U 是空间 Y 的开子集。f 称为紧映射，如果对于任一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集。

定义 2　设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族，$\mathscr{P}$ 称为 X 的弱基[1]，如果 $\mathscr{P}=\cup\{\mathscr{P}_x:x\in X\}$ 并且满足下述条件：

(1)　$x\in\bigcap\mathscr{P}_x$，

(2)　如果 U、$V\in\mathscr{P}x$，那么存在 $W\in\mathscr{P}x$ 使 $W\subset U\cap V$，

(3)　X 的子集 G 是 X 的开子集当且仅当任给 $x\in G$，存在 $P\in\mathscr{P}_x$ 使 $P\subset G$。

上述集族 $\mathscr{P}_x$ 称为点 x 在 X 中的局部弱基。若 X 的弱基 $\cup\{\mathscr{P}_X:x\in X\}$ 是 X 的可数子集族，那么称 X 具有可数弱基。

对于空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 及 $K\subset X$，记：$st(K,\mathscr{P})=\cup\{P\in\mathscr{P}:P\cap K\neq\phi\}$，简记 $st(\{x\},\mathscr{P})$ 为 $st(x,\mathscr{P})$。

定义 3　空间 X 的覆盖序列 $\{\mathscr{P}i\}_{i\in N}$ 称为 X 的弱展开[2]，如果对于任一 $x\in X$，$\{st(x,\mathscr{P}_i):i\in N\}$ 构成了点 x 在 X 中的局部弱基。X 的覆盖序列 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in N}$ 称为 X 的点有限弱展开，若每一 $\mathscr{P}_i$ 是 X 的点有限覆盖并且 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in N}$ 是 X 的弱展开。

定理 1　拓扑空间 X 是度量空间的商紧像当且仅当空间 X 具有点有限的弱展开。

证明　必要性。设空间 X 是度量空间 M 在商紧映射 f 下的像空间。因为 M 是度量空间，存在 M 的开覆盖的序列 $\{\mathscr{B}_i\}_{i\in N}$ 使得如果 K 是 M 的紧子集，U 是 M 中含 K 的开子集，则对于某个 $i\in N$ 有 $st(K,\mathscr{B}_i)\subset U$[3]。对于 $i\in N$，因为 M 是仿紧空间，不妨设 $\mathscr{B}_i$ 是 M 的局部有限的开覆盖并且 $\mathscr{B}_{i+1}$ 加细 $\mathscr{B}_i$。置 $\mathscr{P}_i=\{f(B):B\in\mathscr{B}_i\}$，那么 $\mathscr{P}_i$ 是 X 的点有限覆盖。下面证明 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in N}$ 是 X 的弱展开。这只须验证对于任一 $x\in X$，$\{st(x,\mathscr{P}_i):i\in N\}$ 满足定义 2 的条件(3)。如果 $x\in G$，其中 G 是 X 的开子集，那么 $f^{-1}(x)\subset f^{-1}(G)$，于是对于某个 $i\in N$ 有 $st(f^{-1}(x),\mathscr{B}_i)\subset f^{-1}(G)$，从而 $st(x,P_i)\subset G$。另一方面，如果 X 的子集 G 满足对于任意的 $x\in G$，存在 $i\in N$ 使 $st(x,\mathscr{P}_i)\subset G$，则对于任一 $Z\in f^{-1}(G)$，存在 $i\in N$ 使 $st(f(z),\mathscr{P}_i)\subset G$，于是 $st(z,\mathscr{B}_i)\subset f^{-1}(G)$，因此 $f^{-1}(G)$ 是点 z 在 M 中的邻域。由 z 的任意性知 $f^{-1}(G)$ 是 M 的开子集，而 f 是商映射，所以 G 是 X 的开子集。因而我们证明了对于任意的 $x\in X$，$\{st(x,\mathscr{P}_i):i\in N\}$ 形成了点 x 在 X 中的局部弱基。

充分性。设 $\{\mathscr{P}_i\}_{i\in N}$ 是空间 X 的点有限的弱展开。首先注意到，如果 X 的点 x 及 X 的

子集列$\{\mathscr{P}_i:i\in N\}$满足对于$i\in N$有$x\in P_i\in\mathscr{P}_i$，那么$\{P_i:i\in N\}$形成了点x在X中的网。事实上，对于点x在X中的任一开邻域V，存在$i\in N$使$st(x,\mathscr{P}_i)\subset V$，因而$x\in P_i\subset st(x,\mathscr{P}_i)\subset V$. 对于$i\in N$，置$\mathscr{P}_i=\{P_\alpha:\alpha\in A_i\}$。我们可以假定集族$\{A_i:i\in N\}$是两两互不相交的。给每一$A_i$赋予离散拓扑。令

$$M=\{\beta=(\alpha_i)\in\Pi\{A_i:i\in N\}:\{P_{\alpha_i}\}_{i\in N}$$

形成了X中某点$x(\beta)$的网$\}$，并且赋予M离散空间族$\{A_i:i\in N\}$的Tychonoff积空间所诱导的子空间拓扑，那么M是度量空间。由于X是Hausdorff空间，对于每一$\beta\in M$，$x(\beta)$是唯一确定的，于是由$f(\beta)=x(\beta)$确定了从M到X的一个函数。下面证明f是从M到X的满、连续、商且紧的函数。

(1) f是满函数。对于任一$x\in X$，$i\in N$，存在$\alpha_i\in A_i$使$x\in P_{\alpha_i}$，那么$\{P_{\alpha_i}\}_{i\in N}$形成了点$x$在$X$中的网。让$\beta=(\alpha_i)$，那么$\beta\in M$且$f(\beta)=x$.

(2) f是连续函数。对于任一$\beta=(\alpha_i)\in M$以及点$f(\beta)$在X中的邻域V，存在$n\in N$使$P_{\alpha_n}\subset V$，置$W=\{r\in M:r$的第n个坐标是$\alpha_n\}$，那么W是M中含点β的开子集并且$f(W)\subset P_{\alpha_n}\subset V$.

(3) f是紧映射。对于任一$x\in X$，$i\in N$，置$B_i=\{\alpha\in A_i:x\in P_\alpha\}$，那么$\Pi\{B_i:i\in N\}$是$\Pi\{A_i:i\in N\}$的紧子集。为证明$f$是紧映射，只须证明$f^{-1}(x)=\Pi\{B_i:i\in N\}$. 一方面，如果$\beta=(\alpha_i)\in\Pi\{B_i:i\in N\}$，那么对于任一$i\in N$，有$\alpha_i\in B_i$，于是$x\in P_{\alpha_i}$，所以$\{P_{\alpha_i}\}_{i\in N}$形成了点$x$在$X$中的网，从而$\beta\in M$并且$f(\beta)=x$，故$\Pi\{B_i:i\in N\}\subset f^{-1}(x)$. 另一方面，如果$\beta=(\alpha_i)\in f^{-1}(x)$，那么对于任一$i\in N$有$x\in P_{\alpha_i}$，因而$\alpha_i\in B_i$，故$\beta\in\Pi\{B_i:i\in N\}$，因此$f^{-1}(x)\subset\Pi\{B_i:i\in N\}$.

(4) f是商映射。设X的子集U使得$f^{-1}(U)$是M的开子集，我们要证明U是X的开子集。对于任一$x\in U$，$i\in N$，置$B_i=\{\alpha\in A_i:x\in P_\alpha\}$，那么$\Pi\{B_i:i\in N\}=f^{-1}(x)\subset f^{-1}(U)$。由于$f^{-1}(x)$是$M$的紧子集，对于$i\in N$，存在$A_i$的开子集$V_i$使

$$\Pi\{B_i:i\in N\}\subset\Pi\{V_i:i\in N\}\cap M\subset f^{-1}(U)$$

其中除了至多有限多个$i\in N$以外有$V_i=A_i$。于是存在$n\in N$使

$$(\Pi\{B_i:i\leqslant n\})\times(\Pi\{A_i:i>n\})\cap M\subset f^{-1}(U)$$

对于$z\in\bigcap\{st(x,\mathscr{P}_i):i\leqslant n\}$，如果$i\leqslant n$，选取$\alpha_i\in B_i$使$z\in P_{\alpha_i}$，如果$i>n$，取定$\alpha_i\in A_i$使$z\in P_{\alpha_i}$，那么$\{P_{\alpha_i}\}_{i\in N}$形成了点$z$在$X$中的网。令$\beta=(\alpha_i)$，那么$\beta\in M$，$z=f(\beta)$，并且$\beta\in(\Pi\{B_i:i\leqslant n\})\times(\Pi\{A_i:i>n\})\cap M\subset f^{-1}(U)$，于是$z\in U$。这说明了$\bigcap\{st(x,\mathscr{P}_i):i\leqslant n\}\subset U$。因为$\{st(x,\mathscr{P}_i):i\in N\}$形成了点$x$在$X$中的局部弱基，所以$U$是$X$的开子集。故$f$是商映射。

综上所述，空间X是度量空间M在商紧映射f下的像空间。证毕。

利用定理1的证明方法和技巧，我们得到了可分度量空间商紧像的一个简洁而优美的特征。

定理2　拓扑空间X是可分度量空间的商紧像当且仅当X具有可数弱基。

证明　F. Siwiec已证明了可分度量空间的商紧像具有可数弱基[4]，我们只须证明充分性。设$\mathscr{B}=\{B_i:i\in N\}$是空间$X$的可数弱基。对于任一$x\in X$，以$\mathscr{B}_x$表示点$x$在$X$中的局部弱基并且满足$\mathscr{B}=\cup\{\mathscr{B}_x:x\in X\}$。因为$X$是正则空间，不妨设$\mathscr{B}$中的每一元都是X的闭子集。对于$i\in N$，令$C_i=\{x\in X:B_i\notin\mathscr{B}_x\}$，$\mathscr{P}_i=\{B_i,C_i\}$，那么$X$的二元覆盖$\mathscr{P}_i$具

有性质：对于 $x\in X$，

$$st(x,\mathscr{P}_i)=\begin{cases}B_i, & B_i\in\mathscr{B}_x\\ X, & B_i\notin\mathscr{B}_x, x\in B_i\\ C_i, & B_i\notin\mathscr{B}_x, x\notin B_i\end{cases}$$

不难验证 $\{st(x,\mathscr{P}_i):i\in N\}$ 构成了点 x 在 X 中的局部弱基，这只须注意到由于 $X\setminus B_i\subset C_i$，并且 B_i 是 X 的闭子集，若 $B_i\notin\mathscr{B}_x$，那么 $st(x,\mathscr{P}_i)$ 是点 x 在 X 中的邻域。从定理 1 充分性的证明可以看出，这时存在度量空间 M 和从 M 到 X 上的商紧映射 f 使得 M 是某一离散空间族 $\{A_i:i\in N\}$ 的 Tychonoff 积空间所诱导的子空间，其中 $|A_i|\leqslant 2$，于是 M 是可分度量空间。证毕。

定义 4　从度量空间 (M,d) 到拓扑空间 X 上的映射 f 称为 π 映射，如果对于任一 $x\in V$，其中 V 是 X 的开子集，有 $d(f^{-1}(x),M\setminus f^{-1}(V))>0$。

显然，定义于度量空间上的紧映射是 π 映射。D. Burke 证明了可分度量空间的商 π 像具有可数弱基[4]。利用定理 2 及 Burke 的定理，我们得到了可分度量空间商 π 像的特征。

推论　拓扑空间 X 是可分度量空间的商 π 像当且仅当空间 X 具有可数弱基。

受 Arhangel' skii 问题的启发，我们探讨局部紧度量空间商紧像的特征。

定义 5　由拓扑空间 X 的某此紧子集组成的 X 的覆盖 $\mathscr{K}$ 称为 X 的 k 系[5]，如果 X 的子集 A 满足：对于任一 $K\in K$，$\mathscr{K}\cap A$ 是 X 的闭子集，那么 A 是 X 的闭子集。若 X 的 k 系 $\mathscr{K}$ 是由 X 的某此度量子空间组成的点有限覆盖，那么 $\mathscr{K}$ 称为由 X 的度量空间组成的点有限 k 系。

定理 3　拓扑空间 X 是局部紧度量空间的商紧像当且仅当空间 X 具有由度量空间组成的点有限 k 系。

证明　必要性。设空间 X 是局部紧度量空间 M 在商紧映射 f 下的像空间。由 M 的仿紧性，存在 M 的由紧度量子空间组成的局部有限的闭覆盖 $\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$。对于 $\alpha\in\Lambda$，让 $G_\alpha=f(F_\alpha)$，由于 $f|_{F_\alpha}$ 是完备映射[6]，所以 G_α 是 X 的紧可度量化的子空间。如果 X 的子集 A 满足：对于任一 $\alpha\in\Lambda$，$G_\alpha\cap A$ 是 X 的闭子集，那么 A 是 X 的闭子集。事实上，若 A 不是 X 的闭子集，因为 f 是商映射，那么 $f^{-1}(A)$ 不是 M 的闭子集。由于 M 是一个 k 空间[6]，存在 M 的紧子集 K 使 $f^{-1}(A)\cap K$ 不是 M 的闭子集。又由于 $\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是 M 的局部有限的闭覆盖，存在 Λ 的有限子集 Λ' 使得 $K\subset\cup\{F_\alpha:\alpha\in\Lambda'\}$，于是有 $\alpha\in\Lambda'$ 使 $f^{-1}(A)\cap F_\alpha$ 不是 M 的闭子集。然而 $f^{-1}(G_\alpha\cap A)=f^{-1}(A)\cap F_\alpha$，从而 $G_\alpha\cap A$ 不是 X 的闭子集，矛盾。因而 $\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是空间 X 的由度量空间组成的点有限 k 系。

充分性。设 $\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ 是空间 X 的由度量空间组成的点有限 k 系。置 $M=\oplus\{G_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$，那么 M 是局部紧的度量空间。让 $f:M\to X$ 使每一 $f|_{G_\alpha}$ 是恒等映射，则 f 是有限到一的商映射。只须验证 f 是商映射。对于 x 的子集 A，如果 $f^{-1}(A)$ 是 M 的闭子集，由拓扑和的定义知对于每一 $\alpha\in\Lambda$，$G_\alpha\cap f^{-1}(A)$ 是 G_α 的闭子集，再由 f 的定义知 $G_\alpha\cap A$ 是 G_α 的闭子集，因而 $G_\alpha\cap A$ 是 X 的闭子集。故 A 是 X 的闭子集。从而 f 是商映射。证毕。

参考文献

1　Arhangel' skii, A. V., Mappings and spaces, Russian Math. Surveys, 21(1966), 115—162.

2 Martin, H., Weak bases and metrization, Trans. Amer. Math. Soc., 222(1976), 337—344.

3 Jones, F., R. L. Moore's axiom 1' and metrization, Proc. Amer. Math. Soc., 9(1958), 487.

4 F. Siwiec, On defining a space by a weak base, Pacific J. Math., 52(1974), 233—245.

5 Arhangel' skii, A., On quotient mappings of metric spaces, Dokl. Akad. Nauk. SSSR., 154(1964), 247—250 (Russian).

6 R. Engelking, General Topology, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977.

作者简介 林寿,男,1960 年 3 月出生于福建省周宁县,1987 年 7 月毕业于苏州大学数学系并获得理学硕士学位。研究方向为基础数学专业一般拓扑学方向。现为福建省宁德师范专科学校数学科副教授,并且从事数学教学和研究工作。研究课题《覆盖性质与广义度量空间》为宁德地区科委、福建省教委及国家自然科学基金资助项目。从 1987—1991 年先后在《拓扑学及其他的应用》(荷兰)、《拓扑学会议录》(美国)、《一般拓扑学中的问题及解》(日本)以及国内《数学学报》、《数学进展》、《数学年刊》等公开发行的杂志上发表拓扑学研究论文 37 篇,其中论文《s\λ-空间的映射定理》(英文,刊于 1988 年《拓扑学及其他的应用》杂志)获福建省数学会 1987—1989 年度优秀论文奖和福建省科协 1987—1989 年度优秀论文二等奖。