漳州师院学报 Jonrnal of Zhangzhou Teachers College
1991年 第5卷 第4期 (Nat.Sci.) Vol.5 No.4 1991

关于等价空间和局部可分空间*

李进金 林 寿
（数学系） （宁德师专）

摘要 本文内容由两部分组成。第一部分给出等价空间的特征。第二部分讨论局部可分空间的可积性及映射性质。

关键词 等价空间，伪度量空间，局部可分空间，可积性，映射性质

1 等价空间的特征

戴修法、夏大峰[1]利用集合上的等价关系定义了一类特殊的拓扑空间——等价空间，并且探讨了这种空间的基本性质。本文讨论等价空间具有怎样的内部特征。

定义1.1 设～是非空集合Y上的一个等价关系。对于$y\in Y$，记

$[y]=\{h\in Y: h\sim y\}$，

让$T(Y/\sim)$是以集族$Y/\sim=\{[y]: y\in Y\}$为子基（或基[1]）生成的拓扑，称为由等价关系～诱导的等价拓扑。拓扑空间$(Y, T(Y/\sim))$称为等价空间[1]。

定义1.2 设Y是一个非空集合。$d: Y\times Y\to[0, +\infty)$称为Y上的一个伪度量，如果对于Y上的任意点x，y，h有

(a) $d(x, x)=0$，(b) $d(x, y)=d(y, x)$，

(c) $d(x, h)\leqslant d(x, y)+d(y, h)$。

对于$y\in Y$和实数$r>0$，记$B(y, r)=\{h\in Y: d(y, h)<r\}$。

拓扑空间(Y, T)称为伪度量空间，如果存在Y上的一个伪度量d使$\{B(y, r): y\in Y, r>0\}$构成的Y的拓扑T的基。

* 1991年6月17日收到，国家自然科学基金资助项目。

1992.1.23 收到

为了简化定理的叙述，称空间具有性质P，如果对于$A\subset Y$，A是Y的闭子集当且仅当A是Y的开子集。

定理1.3 下列条件相互等价：

（1）Y是一个等价空间；（2）Y是具有性质P的伪度量空间；

（3）Y具有性质P。

证明 文〔1〕已证等价空间具有性质P。因而只须证明（3）$\Longrightarrow$（2）$\Longrightarrow$（1）。

设拓扑空间Y具有性质P，要证Y是一个伪度量空间。对于$y\in Y$，让$C(y)$表相点y的连通分支，则$C(y)$是Y的闭子集。因为$y\in C(y)$，所以$\overline{\{y\}}\subset C(y)$，又因为$\overline{\{y\}}$是含有点y的既开且闭的子集，于是$C(y)\subset\overline{\{y\}}$。从而$C(y)=\overline{\{y\}}$，这时$\{C(y):y\in Y\}$构成了Y的一个分划；即$\bigcup\{C(y):y\in Y\}=Y$，并且$C(y_1)\cap C(y_2)\neq\varnothing$当且仅当$C(y_1)=C(y_2)$。定义$d$：$Y\times Y\to[0,+\infty)$使

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当}C(x)=C(y)\\ 1, & \text{当}C(x)\neq C(y)。\end{cases}$$

易验证d是Y上的一个伪度量。设由d产生的Y上的伪度量拓扑为$T(d)$。我们要证明$T=T(d)$，其中T为Y上的拓扑。一方面，设$U\in T$，对于$y\in U$，因为U是Y的开子集，所以U是Y的闭子集，于是$\overline{\{y\}}\subset U$。然而$\overline{\{y\}}=C(y)=\{x\in Y:d(x,y)=0\}=\{x\in Y:d(x,y)<1\}=B(y,1)$，所以$B(y,1)\subset U$，因而$U\in T(d)$，因此$T\subset T(d)$。另一方面，对于$r>0$，$y\in Y$，由d的定义知

$$B(y,r)=\begin{cases}\overline{\{y\}}, & \text{当}r\leqslant 1\\ Y, & \text{当}r>1,\end{cases}$$

于是$B(y,r)$是(Y,T)的闭子集，故$B(y,r)$也是(Y,T)的开子集，所以$B(y,r)\in T$，因而$T(d)=T$综上所述，$T=T(d)$。因此Y是一个伪度量空间。

现在，设$(Y,T(d))$是一个具有性质P的伪度量空间，其中$T(d)$是Y的由Y上的伪度量d诱导的伪度量拓扑。定义Y上的关系～如下：对于y、$h\in Y$，$y\sim h$当且仅当$d(y,h)=0$。由于d是伪度量，易验证～是Y上的一个等价关系。由等价关系～诱导的等价拓扑记为$T(Y/\sim)$。下面证明$T(d)=T(Y/\sim)$。若$A\in T(d)$，由于$(Y,T(d))$具有性质P，所以A是$(Y,T(d))$的闭子集。由〔2，第四章定理9〕知$A=\{y\in Y:d(y,A)=0\}$。对于任意的$y\in A$，若$h\sim y$，则$d(h,A)\leqslant d(h,y)=0$，从而$h\in A$，于是$[y]\subset A$，因而$A=\bigcup\{[y]:y\in A\}$，所以$A\in T(Y/\sim)$。故$T(d)\subset T(Y/\sim)$。另一方面，对于$y\in Y$，再由〔2，第四章定理9〕知点集$\{y\}$在$(Y,T(d))$中的闭包是$\{h\in Y:d(h,y)=0\}$。而$\{h\in Y:d(h,y)=0\}=[y]$。所以$[y]$是$(Y,T(d))$的闭子集。因为$(Y,T(d))$具有性质P，所以$[y]\in T(d)$。故$T(Y/\sim)\subset T(d)$。因此$T(d)=T(Y/\sim)$，即Y是一个等价空间。证毕。

因为一个拓扑空间是一个度量空间当且仅当它是一个满足T_0分离性公理的伪度量

空间。从定理1.3，立即有下述推论。

推论1.4 Y是一个离散空间当且仅当Y是一个满足T_0分离性公理的等价空间。

由上述定理及推论，可将等价空间重新命名为伪离散空间。等价空间的特征定理不仅仅给等价空间以内在的刻划，而且利用众所周知的伪度量空间的性质，我们可得到一系列等价空间的性质。特别地，文〔1〕中的许多定理是我们定理1.3的直接推论，下面给出等价空间的一个映射定理。

推论1.5 商映射保持等价空间。

证明 设f是从等价空间X到空间Y上的商映射。如果$A\subset Y$，那么A是Y的闭子集当且仅当$f^{-1}(A)$是X的闭子集当且仅当$f^{-1}(A)$是X的开子集且仅当A是Y的开子集。所以Y是等价空间。

例1.6 连续映射未必能保持等价空间。

设X是实数集赋予离散拓扑，Y是实数集赋予通常的欧氏拓扑。让f是从X到Y上的恒等映射，那么f是连续映射。由推论1.4知X是一个等价空间，但是Y不是等价空间。

2 局部可分空间的可积性

鉴于局部可分性在拓扑学中的作用，程功祥〔3〕讨论了局部可分空间和可分空间之间的关系，以及局部可分空间的可积性、遗传性和拓扑不变性。本文进一步讨论局部可分空间的可积性（同时纠正〔3〕中的一个错误）及映射性质。

本文中的积空间意指Tychonoff积空间。c指连续统的基数。

例2.1 让$D=\{0,1\}$赋予离散拓扑。如果$\tau>c$，那么积空间D^τ不是局部可分空间。

证 让$X=D^\tau$。X就是积空间$\Pi\{D_\alpha:\alpha\in A\}$，其中对于每一$\alpha\in A$，$D_\alpha=D$并且$|A|=\tau$。由于D是紧空间，于是X也是紧空间，因而X是一个Lindelof空间。又由于$\tau>c$，于是X不是一个可分空间〔4〕。因为局部可分的Lindelof空间是可分空间〔3〕，所以X不是局部可分空间。

由例2.1知讨论局部可分空间的可积性仅只考虑至多c可积性。

定理2.2 设$\{X_\alpha:\alpha\in A\}$是一族非空的拓扑空间且$|A|\leqslant c$。让$X=\Pi\{X_\alpha:\alpha\in A\}$，那么X是局部可分空间当且仅当所有$X_\alpha$是局部可分空间并且除了至多有限个$\alpha$外，其余的$X_\alpha$是可分空间。

证 必要性，对于$\alpha\in A$，让P_α表示从积空间X到因子空间X_α上的投影映射。因为X是局部可分空间，并且P_α是连续的开映射，所以X_α也是局部可分空间，取点$x\in X$，因为X是局部可分空间，并且可分性是开遗传性质，于是存在点x可分的基本领域$\Pi\{Y_\alpha:\alpha\in A\}$，其中每一$Y_\alpha$是$X_\alpha$的开子空间且存在A的有限子集B使当$\alpha\in B/A$时$Y_\alpha=X_\alpha$。由于$\Pi\{Y_\alpha:\alpha\in A\}$是可分空间，于是每一$Y_\alpha$也是可分空间（利用投影映射的连续性）。从而当$\alpha\in B/A$时，$X_\alpha$是可分空间。故除了至多有限个$\alpha$外，其余

的$X\alpha$是可分空间。

充分性。设B是A的有限子集使当$\alpha \in B/A$时$X\alpha$是可分空间。由于可分性是c可积性[4]，而且$|A\setminus B| \leqslant c$，所以$\Pi\{X\alpha : \alpha \in A\setminus B\}$是一个可分空间。又由于局部可分性是有限可积的[3]，故$X=(\Pi\{X\alpha : \alpha \in B\})\times(\Pi\{X\alpha : \alpha \in A\setminus B\})$是局部可分空间。

注2.3 由定理2.2知文〔3〕不加证明地断言局部可分性是可数可积性质是不正确的。

3 局部可分空间的映射性质

局部可分性具有怎样的映射性质？文〔3〕证明了局部可分性是一个拓扑性质。本文将在更一般的映射类中考虑局部可分空间的不变性。本文映射均指连续满映射。

定义3.1 f称为双商映射，如果对于$y\in Y$，若X的开子集族$\mathcal{U}$覆盖$f^{-1}(y)$，则存在$\mathcal{U}$的有限子绿$\mathcal{V}$使$\cup\{f(V) : V\in\mathcal{V}\}$是y在Y中的邻域；$f$称为伪开映射，如果对于任意的$y\in Y$，若X的开集$U\supset f^{-1}(y)$，则$f(U)$是y的邻域；

我们有下列关系[5]

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \text{闭映射} & & & & \\ & & & & \Downarrow & & & & \\ \text{开映射} & \Longrightarrow & \text{双商映射} & \Longrightarrow & \text{伪开映射} & \Longrightarrow & \text{商映射} & \Longrightarrow & \text{连续满映射} \end{array}$$

定理3.2 设X是局部可分空间，f是从X到Y上的连续满映射，当f满足如下条件之一时，Y也是局部可分空间。

（1） f是双商映射；

（2） f是伪开映射，并且对于任意的$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的 Lindelof子空间。

证 （1）对于任意的$y\in Y$。因为X是局部可分空间，所以存在X的由开可分子空间组成的覆盖$\mathcal{A}$。这时$\mathcal{A}$也是$f(y)$的覆盖。因为f是双商映射，所以存在$\mathcal{A}$的有限子族$\mathcal{V}$使$\cup\{f(V) : V\in\mathcal{V}\}$是点y在Y中的邻域。由于连续映射保持可分性，所以每一$f(V)$是Y的可分子空间。又由于有限个可分子空间的并仍是可分子空间，于是$\cup\{f(V) : V\in\mathcal{V}\}$是y在Y的一个可分的邻域。故Y是局部可分空间。

（2）由于X是局部可分空间，所以存在X的由开可分子空间组成的覆盖$\mathcal{A}$。对于$y\in Y$，由于$f^{-1}(y)$是X的Lindelof子空间，于是存在$\mathcal{A}$的可数子族$\mathcal{V}$使$f^{-1}(y)\subset\cup\mathcal{V}$。因为可数个可分子空间的并仍是可分子空间，因而$\cup\mathcal{V}$是X的可分的开子空间。又由于$f$是伪开映射，所以$f(\cup\mathcal{V})$是点y在Y中的邻域。而连续映射保持可分性。因此$f(\cup\mathcal{V})$是点y在Y中的可分的领域。故Y是局部可分空间。

例3.3 闭映射不能保持局部可分性。

证 对于$\alpha<\omega_1$，让$I_\alpha=I=[0,1]$，其中I具有通常的欧氏拓扑。让X是拓扑空

间族$\{I_\alpha : \alpha<\omega_1\}$的互不相交的拓扑和，即$X=\oplus\{I_\alpha : \alpha<\omega_1\}$。则X是局部可分空间。让A是X中的所有零点组成的集合，而Y是商空间X/A。记q：X→Y是自然商映射，且记$q(A)=\{0\}$。由于A是X的闭子集，于是q是闭映射。我们将证明Y不是局部可分空间。事实上，若U是点0在Y中的可分开邻域，由商拓扑的构成，对于$\alpha<\omega_1$，$q^{-1}(V)\cap I_\alpha$是I_α中零点的开邻域，因而存在点$p(\alpha)\in I_\alpha$使非空开集$(0, p(\alpha))\subset U$。这时不可数族$\{(0, p(\alpha)) : \alpha<\omega_1\}$是U的互不相交的非空开子集族，这与U的可分性相矛盾（因为可分空间满足可数链条件）。故Y不是局部可分空间。因此，闭映射不能保持局部可分性。

Y.Tanaka 在近来发表的论文〔6〕中的例2.14（b）（3）构成了一个局部紧度量空间使它在一个有限到一商映射下的象不是局部可分空间。因而定理3.2（2）中f是伪开映射的条件不可减弱为f为商映射。

从商映射不保持局部可分性导致我们寻求局部可分空间的商映象的特征。

定义3.4 拓扑空间X称为s空间，如果A是X的子集并且对于X的任意的可分子空间Z，$A\cap Z$是Z的开子集，那么A是X的开子集。

定理3.5 拓扑空间X是局部可分空间的商映象当且仅当X是s空间。

证 设X是局部可分空间的商映象，即存在局部可分空间Y和从Y到X上的商映射f。如果A是X的子集并且满足对于X的任意的可分子空间Z，$A\cap Z$是Z的开子集，我们要证明$f^{-1}(A)$是Y的开子集。对于$y\in f^{-1}(A)$，因为Y是局部可分空间，设点y在Y中的一个可分的邻域的为V，那么$f(V)$是X的可分子空间，因而$A\cap f(V)$是$f(V)$的开子集，于是存在X的开子集G使$A\cap f(V)=G\cap f(V)$。从而

$$y\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}f(V)=f^{-1}(G)\cap f^{-1}f(V),$$

因此，

$$y\in f^{-1}(G)\cap \mathrm{int}(V)\subset f^{-1}(G)\cap f^{-1}(V)\subset f^{-1}(A),$$

所以y是$f^{-1}(A)$的内点，故$f^{-1}(A)$是Y的开子集，于是A是X的开子集，即X是s空间。

反之，设X是一个s空间。让Ω为X的所有可分子空间的族。设$Y=\oplus\{P : P\in\Omega\}$，那么Y是局部可分空间。置$f$：Y→X是显然映射，从拓扑和的定义及s空间的定义易验证f是连续的商映射。

参 考 文 献

1、戴修法，夏大峰。一类特殊的拓扑空间的基本概念和性质，阜阳师院学报（自然科学版），1988（2）：43—47

2、凯莱·J·L著；吴从炘，吴让泉译。一般拓扑学，北京；科学出版社，1982年

3、程功祥。局部可分空间。湖北师院学报（自然科学版），1987（1）：7—10

4、Pondiczery E B. Power problems in abstract spaces. Duke Math Journ, 1944, 11: 835—837

5、儿玉之宏，永见启应著；方嘉琳译。拓扑空间论，北京：科学出版社，1984年

6、Tanaka Y. Symmetric spacds, g-developale spacds and g-metrizable spaces. Math Japonica, 1991, 36（1）：1—14

On equivalent spaces and locally separable spaces

Li Jinjing　　　　Lin Shou
(Dept. of Math.)　(Ningde Teachers' College)

Abstract

The contents of this paper are cpmposed of two parts. In the first part, an interior characterization on equivalent spaces is given. In the second part, the multiplicative property and mapping property of locally separable spaces are discussed.

Keywords. Equivalent spseudo—metric space, locally separable space, multiplicative property, mapping property.

(上接第31页)

参 考 文 献

〔1〕D.Richards and A.L.Liestman, Generaligations of broadcasting and gossiping,Network,18 (1988) 125—138

〔2〕S.M.Hedetniemi, S.T.Hedetniemi and A.L.Liestman, A Survey of gossiping and broadcasting in Communication networks,Networks, 18 (1988) 319—349

〔3〕R.Bumby, A problem with telephones.SIAM.J.Alg.Disc, Meth, 2 (1981) 18—23

〔4〕D.J.Kleitman and J.B.Shearer, Further gossiping problems,Discr. Math,30 (1980) 151-156

〔5〕J.A.Bondg和U.S.R.Murty著, 吴望名等译,《图论及其应用》,科学出版 社, 1984

The Minimum Gossiping Graph and its Algorithm

Huang Zhengjei

Abstrat Gossiping is a message propagating process over a network whereby each node is informed of any k distinct messages.In this paper, the weighted gossiping graph is studied and the minimum gossiping graph is definitd and a good algorithm is presented for minimum gossiping graph

Key words: gossiping, minimum gossiping graph, algorithm, weight