1991年 辽宁师范大学学报(自然科学版) 1991
第14卷 第3期 Journal of Liaoning Normal University(Natural Science) Vol.14 № 3

关于$\sum^*$-空间

林 寿
(福建宁德师专)

摘要 讨论Σ^*-空间的一些性质。主要研究强Σ^*-空间的特征以及怎样的Σ^*-空间是强Σ-空间。特别地，否定地回答了R.Gittings提出的问题：有限到一开连续映射是否保持Σ^*-空间？

关键词 仿紧，复盖（数学），拓扑空间。
中图分类号 O 189.1

$\sum$-空间类是两个不同的广义度量空间类：M-空间类和σ-空间类的共同推广。鉴于闭映射不能保持$\sum$-空间类，1972年A.Okuyama[1]定义了$\sum$-空间类的一种重要推广——$\sum^*$-空间类以保持其闭映象。本文主要讨论$\sum^*$-空间的一些性质。我们所说的空间均指满足正则且T_1分离性公理的拓扑空间。N表示自然数集。

先陈述一些定义。设X是一个拓扑空间。X称为等紧空间[2]，如果X的任何闭可数紧子空间是X的紧子空间。对于X的子集族$\mathbf{P}$，$\mathbf{P}$称为X的局部有限集族，如果对于$x\in X$，存在点x的开邻域U使U仅与$\mathbf{P}$中至多有限个元相交；$\mathbf{P}$称为X的闭包保持集族，如果对于$\mathbf{P}$的任何子族$\mathbf{P}'$有

$$\bigcup\{cl(P):P\in\mathbf{P}'\}=cl(\bigcup\{P:P\in\mathbf{P}'\});$$

$\mathbf{P}$称为X的遗传闭包保持集族，如果对于$H(P)\subset P\in\mathbf{P}$，集族$\{H(P):P\in\mathbf{P}\}$是$X$的闭包保持集族。设$\mathbf{K}$是空间$X$的一个复盖，$X$的子集族$\mathbf{P}$称为$X$的(mod $\mathbf{K}$)-网，如果对于$K\subset U$，其中$K\in\mathbf{K}$，U是X的开子集，存在$P\in\mathbf{P}$使$K\subset P\subset U$。如果空间X存在由闭可数紧子集组成的复盖$\mathbf{K}$，并且X存在一个σ-局部有限（σ-遗传闭包保持）集族构成X的(mod $\mathbf{K}$)-网，那么称X是一个$\sum$-空间($\sum^*$-空间)。若将上述定义中的$\mathbf{K}$加强为由紧子集组成的复盖，所得到的空间相应地称为强$\sum$-空间（强$\sum^*$-空间）。由于局部有限集族是遗传闭包保持集族，所以(强)$\sum$-空间是(强)$\sum^*$-空间。

为使叙述简洁，本文约定：对于空间X，$\mathbf{K}$表示由X的某些紧子集组成的复盖，$\mathbf{C}$表示由X的某些闭可数紧子集组成的复盖。

定理1 下列条件相互等价：

(1) X是强$\sum^*$-空间。

(2) X是次仿紧的$\sum^*$-空间。

(3) X是等紧的$\sum^*$-空间。

证 从等紧空间的定义以及次仿紧空间是等紧空间[3]，只须证明强$\sum^*$-空间是次仿紧空间。设X是一个强$\sum^*$-空间。让$\mathbf{P}$是X的σ-遗传闭包保持(mod $\mathbf{K}$)-网。记

收稿日期：1990－07－12
国家自然科学基金资助项目

$$\mathbf{P}=\bigcup\{\mathbf{P}_n : n\in N\},$$

其中每一$\mathbf{P}_n$是X的遗传闭包保持集族．设$\mathbf{U}$是X的一个开复盖，置

$$\mathbf{F}=\{P\in\mathbf{P}\text{：存在}\mathbf{U}\text{的有限子族}\mathbf{U}(P)\text{使}P\subset\bigcup\mathbf{U}(P)\}.$$

对于 $P\in\mathbf{F}$，记$\mathbf{U}(P)=\{U_i(P) : i\leqslant k(P)\}$，$k(P)\in N$．置

$$\mathbf{U}(n,i)=\{P\cap U_i(P) : P\in\mathbf{P}_n\cap\mathbf{F}\}.$$

因为$\mathbf{P}_n$是X的遗传闭包保持集族，所以每一$\mathbf{U}(n,i)$是X的闭包保持集族．对于$x\in X$，存在$K\in\mathbf{K}$使$x\in K$，于是有$\mathbf{U}$的有限子族$\mathbf{U}'$使$K\subset\bigcup\mathbf{U}'$．从而对于某个$P\in\mathbf{P}$有

$$K\subset P\subset\bigcup\mathbf{U}'.$$

这时$P\in\mathbf{F}$并且存在$i\in N$使$x\in P\cap U_i(P)$．因而$\bigcup\{\mathbf{U}(n,i) : n,i\in N\}$是$\mathbf{U}$的$\sigma$-闭包保持加细．又因为$X$是一个正则空间，所以$X$是一个次仿紧空间[3]．

注 R.Gittings[4]系统地研究了各类拓扑性质的开映射理论，并且遗留下许多未解决的问题，其中之一是有限到一的开连续映射是否保持$\sum^*$-空间性质不变．利用定理1我们可以给这个问题以否定回答．事实上，R.Gittings[4]例2构造了一个仿紧M-空间(因而$\sum^*$-空间)X_0使它在某一有限到一开连续映射下的象空间X是非次仿紧的等紧空间．由定理1，空间X不能是$\sum^*$-空间．因而有限到一的开连续映射未必能保持$\sum^*$-空间性质不变．

定理2 具有σ-局部可数(mod$\mathbf{K}$)-网的次仿紧空间是强$\sum$-空间．

证 对于具有σ-局部可数(mod$\mathbf{K}$)-网的次仿紧空间X，设$\mathbf{P}$是X的σ-局部可数的(mod$\mathbf{K}$)-网．我们分三步证明X是一个强$\sum$-空间．

(1) X具有σ-局部有限闭集族$\mathbf{H}$使若$x\in K\subset U$，其中$K\in\mathbf{K}$，U是X的开子集，那么存在$H\in\mathbf{H}$使$x\in H\subset U$．

事实上，记$\mathbf{P}=\bigcup\{\mathbf{P}_n : n\in N\}$，其中每一$\mathbf{P}_n$是$X$的局部可数集族(即对于$x\in X$，存在点$x$的开邻域$U$使$U$仅与$\mathbf{P}$中至多可数个元相交)．不妨设$\mathbf{P}_n$是$X$的闭子集族．因为$X$是次仿紧空间，对于$n\in N$，存在$X$的$\sigma$-局部有限闭复盖$\mathbf{V}_n=\bigcup\{\mathbf{V}_{n,m} : n,m\in N\}$使每一$\mathbf{V}_{n,m}$是$X$的局部有限闭集族并且它的每一个元交$\mathbf{P}_n$的至多可数个元．对于$V\in\mathbf{V}_{n,m}$，记$(\mathbf{P}_n)_V=\{P_i(V) : i\in N\}$(可能添加一些空集)，其中$(\mathbf{P}_n)_V$表示$\mathbf{P}_n$中与$V$相交的元的全体构成的集族，那么

$$\mathbf{V}_{n,m}\wedge\mathbf{P}_n=\bigcup\{\{P_i(V)\cap V : V\in\mathbf{V}_{n,m}\} : i\in N\}.$$

因为$\{P_i(V)\cap V : V\in\mathbf{V}_{n,m}\}$是$X$的局部有限的闭子集族，所以$\mathbf{V}_{n,m}\wedge\mathbf{P}_n$是$X$的$\sigma$-局部有限的闭子集族．置

$$\mathbf{H}=\bigcup\{\mathbf{V}_{n,m}\wedge\mathbf{P}_n : n,m\in N\}.$$

对于$x\in K\subset U$，其中$K\in\mathbf{K}$，U是X的开子集，存在$P\in\mathbf{P}_n$使$K\subset P\subset U$．因为$\mathbf{V}_n$是X的复盖，存在$V\in\mathbf{V}_{n,m}$使$x\in V$．于是$P\cap V\in\mathbf{H}$，并且$x\in P\cap V\subset U$．(1)得证．

(2) 对于$x\in X$，置

$$C(x)=\bigcap(\mathbf{H})_x,$$

那么$C(x)$是X的紧子集．

事实上，因为X是次仿紧空间，并且$C(x)$是X的闭子集，只须证明$C(x)$是X的可数紧子集．若不然，存在$C(x)$的可数的闭离散子集A．取$K\in\mathbf{K}$，使$x\in K$，则$K\cap A$是

有限集。置

$$B=A\backslash K,$$

则B是$C(x)$的可数的闭离散子集，并且$B\cap K=\phi$。于是$X\backslash B$是X的开子集，并且$K\subset X\backslash B$。由(1)所证。存在$H\in\mathbf{H}$使$x\in H\subset X\backslash B$，这与$B\subset C(x)\subset H$相矛盾。故$C(x)$是$X$的紧子集。

(3) 置

$$\mathbf{K}'=\{C(x):x\in X\},$$

那么$\mathbf{H}$是X的$(\mathrm{mod}\mathbf{K}')$-网。

事实上，不妨设$\mathbf{H}$关于有限交封闭。设$C(x)\subset U$，其中U是X的开子集。让

$$(\mathbf{H})_x=\{H_n:n\in N\},$$

$$G_n=\bigcap\{H_i:i\leqslant n\},\ n\in N,$$

那么$G_n\in(\mathbf{H})_x$，并且$C(x)=\bigcap\{G_n:n\in N\}$。选取$K\in\mathbf{K}$使$x\in K$，置

$$C=K\backslash U,$$

那么C是X的紧子集，并且$C\cap C(x)=\phi$。因而$\{X\backslash G_n:n\in N\}$是$C$的一个单调上升的开复盖，所以存在$n\in N$使$C\subset X\backslash G_n$。于是$K\subset U\cup(X\backslash G_n)$。从而存在$m\in N$使$H_m\subset U\cup(X\backslash G_n)$。取$j\geqslant\max\{m,n\}$。那么$G_j\subset U\cup(X\backslash G_n)$，并且$G_j\cap(X\backslash G_n)=\phi$，所以$C(x)\subset G_j\subset U$。即$\mathbf{H}$是$X$的$\sigma$-局部有限$(\mathrm{mod}\mathbf{K}')$-网。因此，$X$是一个强$\sum$-空间。

注　显然，定理2中的条件"σ-局部可数$(\mathrm{mod}\mathbf{K})$-网"可以减弱为"σ-局部可数$(\mathrm{mod}\mathbf{C})$-网"。但是"次仿紧性"不可以减弱为"等紧性"，因为Fleissner和Reed[5]例2.6所示的空间Z是一个非θ-可加细的具σ-局部可数基的弱θ-可加细空间，因而Z是非强$\sum$-空间的具有σ-局部可数$(\mathrm{mod}\mathbf{K})$-网的等紧空间。

由定理1和定理2，我们得到如下两个直接的推论。

推论1　空间X是强$\sum$-空间当且仅当X是具有σ-局部可数$(\mathrm{mod}\mathbf{K})$-网的强$\sum^*$-空间。

证　必要性来自强$\sum$-空间的定义。充分性来自定理1和定理2。

推论2　具有Lindelöf纤维的连续闭映射保持强$\sum$-空间。

证　设$f:X\to Y$是连续的闭映射，并且对于$y\in Y$，$f^{-1}(y)$是X的Lindelöf子空间。如果X是一个强$\sum$-空间，由推论1及定理1知X是一个具有σ-局部可数$(\mathrm{mod}\mathbf{K})$-网的次仿紧的$\sum^*$-空间。由于闭映射保持次仿紧性[3]和$\sum^*$-空间[1]性质不变，所以Y是次仿紧的$\sum^*$-空间，即Y是强$\sum^*$-空间。又由于具有Lindelöf纤维的闭映射保持具有σ-局部可数$(\mathrm{mod}\mathbf{K})$-网，所以Y具有σ-局部可数$(\mathrm{mod}\mathbf{K})$-网。由推论1，Y是强$\sum$-空间。

下面我们继续讨论在怎样的附加条件之下一个强$\sum^*$-空间是一个强$\sum$-空间。这里涉及到遗传闭包保持集族向局部有限集族转化的问题。我们知道具有σ-遗传闭包保持基的空间具有σ-局部有限基[6]，这里起关键作用的是具有σ-遗传闭包保持基的空间满足第一可数公理。因而可以猜测满足第一可数性公理的强$\sum^*$-空间是强$\sum$-空间。这个猜测是正确的。

定理3　满足第一可数性公理的强$\sum^*$-空间是强$\sum$-空间。

证　设X是一个满足第一可数性公理的强$\sum^*$-空间。让$\mathbf{P}$是X的σ-遗传闭包保持的$(\mathrm{mod}\mathbf{K})$-网。由X的正则性，不妨设$\mathbf{P}$是X的闭子集族[7]。记$\mathbf{P}=\bigcup\{\mathbf{P}_n:n\in N\}$，其中

$\mathbf{P}_n$是X的遗传闭包保持的闭子集族并且$\mathbf{P}_n \subset \mathbf{P}_{n+1}$。对于$n \in N$，置

$$D_n = \{x \in X : \mathbf{P}_n\text{在点 } x \text{ 不是点有限的}\},$$
$$\mathbf{F}_n = \{\mathrm{cl}(P \backslash D_n) : P \in \mathbf{P}_n\} \cup \{\{x\} : x \in D_n\},$$
$$\mathbf{F} = \cup \{\mathbf{F}_n : n \in N\},$$

那么：

(1)　D_n是X的闭离散子集。

事实上，若不然，因为X是第一可数空间，存在由D_n中互不相同点组成的一个收敛序列$\{x_i\}$。由于$\mathbf{P}_n$在每一点x_i不是点有限的，所以可选取$\mathbf{P}_n$的子族$\{P_i : i \in N\}$使$x_i \in P_i$。又由于$\mathbf{P}_n$是X的遗传闭包保持集族，于是$\{x_i : i \in N\}$是X的一个闭离散子集，矛盾。因而D_n是X的闭离散子集。

(2)　$\mathbf{F}_n$是X的局部有限闭集族。

由(1)所证，只须证明$\{\mathrm{cl}(P \backslash D_n) : P \in \mathbf{P}_n\}$是$X$的局部有限集族。因为点有限且闭包保持的闭集族是局部有限集族，所以又只须证明上述集族是点有限的。若不然，则存在$\mathbf{P}_n$的可数子集$\{P_i : i \in N\}$使对某个$x \in X$有$x \in \cap \{\mathrm{cl}(P_i \backslash D_n) : i \in N\}$，于是$x \in \cap \{P_i : i \in N\}$，因而$x \in D_n$，从而$x \in \cap \{\mathrm{cl}(P_i \backslash \{x\}) : i \in N\}$。让$\{U_i\}$是点$x$的可数局部基，取$x_i \in U_i \cap (P_i \backslash \{x\})$。一方面序列$\{x_i\}$收敛于点$x$，另一方面$\{x_i : i \in N\}$是$X$的闭离散子集，矛盾。因而$\mathbf{F}_n$是$X$的局部有限闭集族。

由(2)所证知$\mathbf{F}$是X的σ-局部有限闭集族。对于$x \in K \subset U$，其中$K \in \mathbf{K}$，U是X的开子集，存在$P \in \mathbf{P}_n$使$K \subset P \subset U$，置

$$F = \begin{cases} \{x\}, & x \in D_n, \\ \mathrm{cl}(P \backslash D_n), & x \overline{\in} D_n, \end{cases}$$

那么$F \in \mathbf{F}$，并且$x \in F \subset U$。即$\mathbf{F}$满足定理2证明中结论(1)，用同样的方法可以证明X是一个强$\sum$-空间。

定理3的不足在于强$\sum$-空间未必满足第一可数性公理。因而条件“满足第一可数性公理”是否可减弱成适当的弱第一可数性公理是很有趣的。但是，可以肯定地说对于k-空间类它是不成立的。因为E.Michael[8] 构造的非强$\sum$-空间的强$\sum^*$-空间就是一个k-空间(它是局部紧空间在连续闭映射下的象空间)。

参 考 文 献

1 Okuyama A. On a genaralization of Σ-spaces. Pacific J Math, 1972; 42(2): 485～495
2 Bacon P. The compactness of countably compact spaces. Pacific J Math, 1970;32: 587～592
3 Burke D. On subparacompact spaces. Proc AMS, 1969; 23: 655～663
4 Gittings R. Open mapping theory. In: Reed G, ed. Set-Theoretic Topology. New York: Academic Press, 1977: 141～191
5 Fleissner W, Reed G. Paralindelof spaces and spaces with a σ-locally countable base. Topology Proc, 1977; 2(1): 89～110
6 Burke D, Engelking R, Lutzer D. Hereditarily closure-preserving collections and metrization. Proc AMS, 1975; 51(2): 483～488
7 林寿. 关于《M_1-空间的和定理》一文的注记. 数学研究与评论, 1990; 10(2): 296～297
8 Michael E. On Nagami's Σ-spaces and some related matters. Proc Washington State Univ Topology Conf, 1970; 13～19

〔下转第184页〕

定焦点。

故当本定理条件成立时，在$A(2,2)$附近存在极限环。　　　　证毕。

下面我们举例说明定理3的条件是完全可以实现的。例如取$k_4=-2$，则$\Delta=36$，$F_{20}=0$，$F_{11}=-66$，$F_{02}=0$，$F_{30}=0$，$F_{21}=-162$，$F_{12}=63$，$F_{03}=27$，$G_{20}=48$，$G_{11}=-48$，$G_{02}=-42$，$G_{30}=90$，$G_{21}=-198$，$G_{12}=-63$，$G_{03}=63$，

$$P_4=\{3(0+63)+63-198+[-66(0+0)+48(48-42)+2\cdot 0]/6\}/8=51/4>0.$$

故由Hopf分支定理，当$\varepsilon>0$足够小时，在$A(2,2)$附近存在极限环。

参 考 文 献

1　黄启宇等。数学学报。1960；10(2)：223～237

2　Gobber F, Willamowski K D. J Math Anal Appl, 1979; 71: 333～359

Limit Cycles of a Cubic System with Two Tangent Circle Solutions

Zhang Cheng

(Department of Mathematics, Liaoning Normal University)

Abstract　Paper [1] gave out the necessary and sufficient codition for the existence of two separated circle solutions as its limit cycles in a cubic system, and then proved that there is no other limit cycles when the two circle solutions become limit cycles. In fact, in a cubic system there exists no other limit cycle, no matter whether the two circle solutions are limit cycles or not. In this paper, we prove that other limit cycle may exist for the cubic system with two tangent circle solutions.

Key words　limit cycle, singular point, fine focus

〔上接第180页〕

On Σ^*-spaces

Lin Shou

(Ningde Teachers' College, Fujian)

Abstract　In this paper some properties of $\sum^*$-spaces are discussed. We mainly study the characteristic of strong $\sum^*$-spaces and study what kinds of $\sum^*$-spaces strong $\sum$-spaces. In particular, R. Gittings' question of whether $\sum^*$-spaces are preserved under finite-to-one open continuous mappings is negatively answered.

Key words　para-compact, covering, topological space