第20卷第2期 数学进展 Vol.20, No.2
1991年4月 ADVANCES IN MATHEMATICS April, 1991

Lašnev空间的可数积*

林 寿

(福建省宁德师范专科学校)

Nogura[1]讨论了Fréchet空间的乘积，并且问两个Lašnev空间乘积的强Fréchet子空间是否是可度量化空间。本文应用Foged[2]中关于Lašnev空间的特征肯定地回答Nogura的问题。

本文中所论空间均指满足正则且T_1分离性公理的拓扑空间。空间X的子集族$\mathscr{P}$称为闭包保持的，如果对于$\mathscr{P}$的任何子族$\mathscr{P}'$有

$$\mathrm{cl}(\bigcup \mathscr{P}') = \bigcup\{\mathrm{cl}(P): P\in \mathscr{P}'\}.$$

X的子集族$\mathscr{P}$称为遗传闭包保持的，如果对于$P\in \mathscr{P}$及$H(P)\subset P$，集族$\{H(P): P\in \mathscr{P}\}$是闭包保持的。$X$的子集族$\mathscr{P}$称为弱遗传闭包保持的，如果对于$P\in \mathscr{P}$及$x(P)\in P$，集$\{x(P): P\in \mathscr{P}\}$是$X$的闭离散子空间。$X$的子集族$\mathscr{P}$称为$X$的$k$-网，如果$U$是$X$的含紧子集$K$的开集，那么有$\mathscr{P}$的有限子族$\mathscr{P}'$使$K\subset \bigcup \mathscr{P}'\subset U$。$X$称为Lašnev空间，如果$X$是度量空间的闭象。$X$称为Fréchet空间，如果对于$X$的子集$A$和点$x\in \mathrm{cl}(A)$，存在由$A$中的点组成的序列收敛于$x$。$X$称为$k$-空间，如果$X$的子集$F$是$X$的闭子集当且仅当对于$X$的任一紧子集$K$，$K\cap F$是$K$的闭子空间。显然，Lašnev空间是Fréchet空间，而Fréchet空间是k-空间。

空间X的可数多个点有限且(弱)遗传闭包保持族的并记为X的σ-点有限且(弱)遗传闭包保持族。

引理1 拓扑空间X是一个Lašnev空间当且仅当X是一个具有σ-点有限且(弱)遗传闭包保持k-网的Fréchet空间。

证 Foged[2]证明了空间X是一个Lašnev空间当且仅当X是一个具有σ-点有限且遗传闭包保持k-网的Fréchet空间。因为遗传闭包保持族是弱遗传闭包保持族，只须证明Fréchet空间中的弱遗传闭包保持族是遗传闭包保持族。设$\mathscr{P}=\{P_\alpha:\alpha\in A\}$是Fréchet空间$X$的弱遗传闭包保持族。如果$\mathscr{P}$不是$X$的遗传闭包保持族，那么对于每一个$\alpha\in A$，我们可以选取$H_\alpha\subset P_\alpha$使$\{H_\alpha:\alpha\in A\}$不是闭包保持的。于是存在$x\in X$和$A$的子集$A'$使$x\in \mathrm{cl}(\bigcup\{H_\alpha:\alpha\in A'\}) - \bigcup\{\mathrm{cl}(H_\alpha):\alpha\in A'\}$。因为$X$是Fréchet空间，存在$\bigcup\{H_\alpha:\alpha\in A'\}$中的序列$\{x_n\}$收敛于$x$。又因为对于每一个$\alpha\in A'$，$x\notin \mathrm{cl}(H_\alpha)$，所以序列$\{x_n\}$只有有限多项在$H_\alpha$中。取定$n_1=1$和$\alpha_1\in A'$使$x_{n_1}\in H_{\alpha_1}$。一般地，存在自然数$n_{i+1}>n_i$和$\alpha_{i+1}\in A'$使$x_{n_{i+1}}\in$

1988年1月29日收到。1989年1月3日收到修改稿。
* 福建省教委科学基金资助。

$H_{\alpha_{i+1}} - \bigcup\limits_{j \leqslant i} H_{\alpha_j}$。那么从$\mathscr{P}$是$X$的弱遗传闭包保持族知$\{x_{n_i}: i \in N\}$是$X$的无限闭离散子空间，这与序列$\{x_n\}$收敛于点$x$相矛盾。引理得证。

引理2 设对于每一自然数i，$\mathscr{P}_i$是空间X_i的点有限且弱遗传闭包保持族。如果L是$\prod\limits_{i \in N} X_i$的$k$-子空间，那么对于每一个自然数$j$，

$$\mathscr{A} = \left\{\left(\prod_{i \leqslant j} P_i\right) \times \left(\prod_{i > j} X_i\right) \cap L : P_i \in \mathscr{P}_i, i \leqslant j\right\}$$

是子空间L的点有限且弱遗传闭包保持族。

证 显然，$\mathscr{A}$是L的点有限集族。如果$\mathscr{A}$不是L的弱遗传闭包保持族，我们可以选取$\mathscr{A}$的子族$\{A_\beta: \beta \in B\}$和点$z_\beta \in A_\beta$使集合$\{z_\beta: \beta \in B\}$不是L的闭子集。因为L是一个k-空间，存在L的紧子空间K使$\{z_\beta: \beta \in B\} \cap K$不是$K$的闭子空间。因而在$\{z_\beta: \beta \in B\} \cap L$中存在可数无限子集$\{z_{\beta_n}: n \in N\}$。对于每一个自然数$n$，表示积空间中的点$z_{\beta_n}$为$\{x_{i,n}\}$，并且

$$A_{\beta_n} = \left(\prod_{i \leqslant j} P_{i,n}\right) \times \left(\prod_{i > j} X_i\right) \cap L,$$

其中$x_{i,n} \in P_{i,n} \in \mathscr{P}_i$。于是对于两个不同的自然数$n$和$m$，$\{P_{i,n}: i \leqslant j\} \neq \{P_{i,m}: i \leqslant j\}$。如果对于每一个$i \leqslant j$，集族$\{P_{i,n}: n \in N\}$是有限的，那么存在$N$的无限子集$N_1$使当$n, m \in N_1$且$i \leqslant j$时$P_{i,n} = P_{i,m}$。于是$\{P_{i,n}: i \leqslant j\} = \{P_{i,m}: i \leqslant j\}$，这是一个矛盾。故存在$i \leqslant j$使$\{P_{i,n}: n \in N\}$是无限集族。不妨设所有的$P_{i,n}$是互不相同的。于是$\{x_{i,n}: n \in N\}$是空间$X_i$的无限闭离散子空间。设$p_i: \prod\limits_{i \in N} X_i \to X_i$是投影映射，那么$\{x_{i,n}: n \in N\}$是$X_i$的紧子空间$p_i(K)$的无限闭离散子集，这是一个矛盾。引理得证。

定理3 可数多个 Lašnev 空间积的 Fréchet 子空间是 Lašnev 空间。

证 设$\{X_i: i \in N\}$是 Lašnev 空间的可数族，L是$\prod\limits_{i \in N} X_i$的 Fréchet 子空间。对于每一个自然数$i$，因为$X_i$是 Lašnev 空间，由 Foged[2] 的结果，X_i有σ-点有限且遗传闭包保持k-网。设$\bigcup\limits_{m \in N} \mathscr{P}_{i,m}$是$X_i$的$k$-网，其中每一$\mathscr{P}_{i,m}$是$X_i$的点有限且遗传闭包保持族。对于每一$j, m_1, m_2, \cdots, m_j \in N$，置

$$\mathscr{P}(j, m_1, m_2, \cdots, m_j) = \left\{\left(\prod_{i \leqslant j} P_i\right) \times \left(\prod_{i > j} X_i\right) \cap L : P_i \in \mathscr{P}_{i, m_i}, i \leqslant j\right\}.$$

由引理2，每一$\mathscr{P}(j, m_1, m_2, \cdots, m_j)$是$L$的点有限且弱遗传闭包保持族。再由$k$-网的定义知

$$\bigcup \{\mathscr{P}(j, m_1, m_2, \cdots, m_j): j, m_1, m_2, \cdots, m_j \in N\}$$

是L的σ-点有限且弱遗传闭包保持k-网。依引理1，L是一个Lašnev空间。定理证完。

T. Nogura[1] 中(问题3.12)问两个 Lašnev 空间积的强 Fréchet 子空间是否是可度量化空间。下面的推论肯定地回答了这一问题。

推论4 可数多个Lašnev空间积的强 Fréchet 子空间是可度量化子空间。

证 强 Fréchet 空间是Fréchet 空间[3]。利用定理3及强 Fréchet 的 Lašnev 空间是可度

量化空间[3]就得推论 4 的证明。

推论5 设 f 是从拓扑空间 X 到Lašnev 空间 Y 上的完备映射，那么 X 是一个 Lašnev 空间当且仅当 X 是一个 Fréchet 空间且满足如下条件之一：

(1) X 有点可数 k-网，

(2) X 具有 G_δ-对角线，

证明 必要性是显然的。

充分性 因为 Y 是Lašnev 空间，从而是 Σ 空间。已知 Σ 空间在拟完备映射下的原象空间是 Σ 空间[4]，所以当 X 有点可数 k-网时，由[5]推论 3.8，X 是 σ-空间，从而 X 有 G_δ-对角线。这样我们只须证明如果 X 是具有 G_δ-对角线的 Fréchet 空间，则 X 是一个 Lašnev 空间。因为 Y 是仿紧空间且 f 是完备映射，所以 X 是仿紧空间。对于具有 G_δ-对角线的仿紧空间 X，存在度量空间 M 和连续的一对一映射 g：$X \to M$[6，推论2.9]。现在定义从 X 到 $Y \times M$ 中的连续映射 h 使对于 $x \in X$，$h(x) = (f(x), g(x))$。显然，h 是连续且一对一的映射。因为 f 是完备映射，于是 h 也是完备映射[7，定理3.7.9]。从而 $h(X)$ 是 Fréchet 子空间。由定理 3，$h(X)$ 是 Lašnev 空间。又因为 h 是一对一的完备映射，所以 h 是同胚嵌入，因此 X 是一个Lašnev 空间。

作者对审稿人提出有价值的修改意见表示感谢。

参 考 文 献

[1] T. Nogura, The product of $\langle \alpha_i \rangle$-spaces, *Top. Appl.*, 21 (1985) 251—259.

[2] L. Foged, A characterization of closed images of metric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 95 (1985), 487—490.

[3] E. Michael, A quintuple quotient quest, *Gen. Top. Appl.*, 2 (1972), 91—138.

[4] K. Nagami, Σ-spaces, *Fund. Math.*, 65 (1969), 169—192.

[5] G. Gruenhage, E. Michael and Y. Tanaka, Spaces determined by point-countable covers, *Pacific J. Math.*, 113 (1984), 303—332.

[6] G.Gruenhage, Generalized metric spaces, Handbook of Set-Theoretic Topology, 1984, 423—501.

[7] R. Engelking, General Topology, Warszawa, 1977.

The Countable Products of Lašnev Spaces

Lin Shou (林寿)

(Ningde Teachers' College, Ningde, Fujian)

Abstract

The closed images of metric spaces are called Lašnev spaces, It is shown that a Fréchet subspace of the product of countably many Lašnev spaces is a Lašnev space. This affirmatively answers a T. Nogura's question. As a corollary, we prove that a perfect inverse image of a Lašnev space is a Lašnev space if and only if it is a Fréchet space with a G_δ-diagonal.