数 学 年 刊
12A: 2(1991), 186—190.

σ-空间的控制和定理*

林　寿
(宁德师范专科学校)

提　要

本文给出σ-空间的一个特征，作为它的推论，证明了由σ-子空间族所控制的空间是σ-空间，这肯定地回答了 Burke 和 Lutzer 的一个问题.

σ-空间类，作为度量空间类的一种推广，有许多重要的性质. 在[1]中，A. Okuyama 证明了由正规σ-子空间族所控制的空间是σ-空间. 至于其正规性是否可省去似乎还是未解决的问题[12,13]. 本文肯定地回答了这个问题. 众所周知，由可层空间族所控制的空间仍是可层空间[4]. Borges 正是利用“层对应”证明上述定理. 利用 Borges 的这种想法，定义一个“σ-对应”以刻划σ-空间，然后应用“σ-对应”解决上述问题.

本文中所有空间是T_1的. N表示自然数集.

§1. σ-空间的特征

设X是一个拓扑空间，$\mathscr{P}$是X的子集族. $\mathscr{P}$称为X的网，如果X的开集是$\mathscr{P}$中某些元的并集. 具有σ-局部有限闭网的空间称为σ-空间.

定义 1　设X是一个拓扑空间. 如果对于X的任一子集A，存在闭集列$\{F(n, A)\}_{n\in N}$满足:

(1) 对于$n\in N$, $F(n, A)\subset F(n+1, A)\subset A$;

(2) 若$A\subset B\subset X$，那么$F(n, A)\subset F(n, B)$;

(3) 若V是X的开子集，就有

$$V=\bigcup_{n\in N}F(n, F(n, V)).$$

那么对应$A\to\{F(n, A)\}_{n\in N}$称为X的一个σ-对应.

定理 2　空间X是一个σ-空间当且仅当X存在一个σ-对应.

证　在[5]中，Heath 和 Hodel 证明了拓扑空间(X, τ)是一个σ-空间当且仅当X存在一个σ-函数，即存在$g: N\times X\to\tau$满足:

(a) 对于$n\in N$, $x\in X$, $x\in g(n+1, x)\subset g(n, x)$;

(b) 若X的序列$\{x_n\}$, $\{y_n\}$有$x\in g(n, x_n)$且$x_n\in g(n, y_n)$，那么$\{y_n\}$收敛于x.

现在设X是一个σ-空间，g是X上的σ-函数. 对于$n\in N$, $A\subset X$，置

本文 1987 年 9 月 10 日收到，1988 年 4 月 25 日收到修改稿.
* 福建省教委科学基金资助的课题.

$$F(n, A)=X\setminus U\{g(n, x): x\in X\setminus A\}.$$

我们证明对应 $A\to\{F(n, A)\}_{n\in N}$ 是 X 的一个 σ-对应．这只须证明上述对应满足定义1中的条件(3)．设 V 是 X 的开子集，显然

$$V\supset\bigcup_{n\in N}F(n, F(n, V)).$$

如果 $x\overline{\in}\bigcup_{n\in N}F(n, F(n, V))$，那么对于 $n\in N$，

$$x\in X\setminus F(n, F(n, V))=\bigcup\{g(n, h): h\in X\setminus F(n, V)\},$$

于是存在 $x_n\in X\setminus F(n, V)$ 使 $x\in g(n, x_n)$．从 $x_n\in X\setminus F(n, V)$ 知存在 $y_n\in X\setminus V$ 使 $x_n\in g(n, y_n)$．因为 g 是 X 上的 σ-函数且 $x\in g(n, x_n)$，$x_n\in g(n, y_n)$，所以 $\{y_n\}$ 收敛于 x．然而，$X\setminus V$ 是 X 的闭子集且 $y_n\in X\setminus V$，于是 $x\in X\setminus V$．故

$$V\subset\bigcup_{n\in N}F(n, F(n, V)).$$

所以定义1中的条件(3)成立．因此 X 存在一个 σ-对应．

反之，设 X 存在 σ-对应 $A\to\{F(n, A)\}_{n\in N}$，其中 $A\subset X$．对于 $n\in N$，$x\in X$，置

$$g(n, x)=X\setminus F(n, X\setminus\{x\}.$$

为了证 X 是一个 σ-空间，只须证明 g 是 X 上的 σ-函数．显然，

$$x\in g(n+1, x)\subset g(n, x)$$

且 $g(n, x)$ 是 X 的开子集．若 X 的序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足 $x\in g(n, x_n)$ 且 $x_n\in g(n, y_n)$．对于 $m\in N$，置

$$F_m=\overline{\{y_n: n\geqslant m\}},$$

$$g(n, F_m)=\bigcup\{g(n, h): h\in F_m\}.$$

于是

$$g(n, F_m)=X\setminus F(n, X\setminus F_m).$$

因而

$$\bigcap\{F(n, X\setminus\{h\}): h\in g(n, F_m)\}$$
$$\supset F(n, X\setminus g(n, F_m))=F(n, F(n, X\setminus F_m)).$$

故

$$\begin{aligned}x\in\bigcap_{n\geqslant m}g(n, x_n)&\subset\bigcap_{n\geqslant m}(\bigcup\{g(n, h): h\in g(n, F_m)\})\\&=\bigcap_{n\geqslant m}(\bigcup\{X\setminus F(n, X\setminus\{h\}): h\in g(n, F_m)\})\\&\subset\bigcap_{n\geqslant m}(X\setminus F(n, F(n, X\setminus F_m)))\\&=X\setminus\bigcup_{n\geqslant m}F(n, F(n, X\setminus F_m))\\&=X\setminus\bigcup_{n\in N}F(n, F(n, X\setminus F_m))=F_m.\end{aligned}$$

因此 x 是序列 $\{y_n\}$ 的一个聚点．由相同的证法知 x 是 $\{y_n\}$ 的任何一个子序列的聚点．所以序列 $\{y_n\}$ 收敛于 x．故 g 是 X 上的一个 σ-函数，X 是一个 σ-空间．　证毕．

§2．σ-空间的控制和定理

因为 σ-空间的闭象是 σ-空间，于是 σ-空间满足遗传闭包保持闭和定理．较弱于“遗传闭包保持形式”的和定理是“控制形式”的和定理．

设 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的闭子集族，称 X 为闭集族 $\mathscr{B}$ 所控制，如果 X 的子集 K 是 X 的

闭子集当且仅当存在子集族 $\mathscr{B}^1\subset\mathscr{B}$ 使 $\mathscr{B}^1$ 复盖 K 且对 $B\in\mathscr{B}^1$, $B\cap K$ 是 X 的闭子集.

引理3　设 X 是一个 σ-空间. 如果 H 是 X 的闭子集且 F 是 H 上 σ-的对应，那么存在 X 的 σ-对应 G 使对 $S\subset X$, $n\in N$, 有

$$G(n, S)\cap H=F(n, S\cap H).$$

证　因为 X 是一个 σ-空间，让 F^1 是 X 上的一个 σ-对应，对于 $S\subset X$, $n\in N$, 置

$$G(n, S)=F(n, S\cap H)\cup F^1(n, S\backslash H).$$

下面验证 G 是 X 上满足要求的 σ-对应. 显然，G 满足定义1中的条件(1)和(2). 若 V 是 X 的开子集，因为

$$\begin{aligned}G(n, G(n, V))&=F(n, G(n, V)\cap H)\cup F^1(n, G(n, V)\backslash H)\\&=F(n, F(n, V\cap H)\cap H)\cup F^1(n, F^1(n, V\backslash H)\backslash H)\\&=F(n, F(n, V\cap H))\cup F^1(n, F^1(n, V\backslash H)).\end{aligned}$$

因为 $V\cap H$、$V\backslash H$ 分别是 H、X 的开子集，因而

$$\begin{aligned}V&=(V\cap H)\cup(V\backslash H)\\&=\bigcup_{n\in N}F(n, F(n, V\cap H))\cup\bigcup_{n\in N}F^1(n, F^1(n, V\backslash H))\\&=\bigcup_{n\in N}G(n, G(n, V)),\end{aligned}$$

所以 G 是 X 上的 σ-对应，并且

$$\begin{aligned}G(n, S)\cap H&=(F(n, S\cap H)\cap H)\cup(F^1(n, S\backslash H)\cap H)\\&=F(n, S\cap H).\end{aligned}$$

证毕.

定理4　由 σ-子空间族所控制的空间是 σ-空间.

证　设 $\mathscr{B}$ 是 X 的由 σ-子空间组成的控制族. 置

$$\mathscr{F}=\{(\mathscr{F}_\alpha, F_\alpha): \mathscr{F}_\alpha\subset\mathscr{B}\text{ 且 }F_\alpha\text{ 是 }X_\alpha=\cup\mathscr{F}_\alpha\text{ 上的 }\sigma\text{-对应}\}.$$

由以下方式定义 $\mathscr{F}$ 上的偏序关系:

$$(\mathscr{F}_\alpha, F_\alpha)\leqslant(\mathscr{F}_\beta, F_\beta)$$

当且仅当 $\mathscr{F}_\alpha\subset\mathscr{F}_\beta$ 且对于 $S\subset X_\beta$, $n\in N$, 有

$$F_\beta(n, S)\cap X_\alpha=F_\alpha(n, S\cap X_\alpha).$$

我们证明 $\mathscr{F}$ 的任一线性序子族 $\{(\mathscr{F}_\alpha, F_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 有一个上界 $(\mathscr{F}_\beta, F_\beta)$. 让

$$\mathscr{F}_\beta=\cup\{\mathscr{F}_\alpha:\alpha\in A\}.$$

对于 $S\subset X_\beta$, $n\in N$, 置

$$F_\beta(n, S)=\cup\{F_\alpha(n, S\cap X_\alpha):\alpha\in A\}.$$

那么对 $\alpha\in A$, $F_\beta(n, S)\cap X_\alpha=F_\alpha(n, S\cap X_\alpha)$, 因而 $F_\beta(n, S)$ 是 X_β 的闭子集. 现在我们证明 F_β 是 X_β 上的一个 σ-对应. 显然，$F_\beta(n, S)\subset F(n+1, S)\subset S$, 并且 $S\subset H\subset X_\beta$ 蕴涵 $F_\beta(n, S)\subset F_\beta(n, H)$. 对于 X_β 中的相对开子集 V,

$$\begin{aligned}V&\supset\bigcup_{n\in N}F_\beta(n, F_\beta(n, V))\\&=\bigcup_{n\in N}F_\beta(n, \bigcup_{\alpha\in A}F_\alpha(n, V\cap X_\alpha))\\&\supset\bigcup_{n\in N,\alpha\in A}F_\beta(n, F_\alpha(n, V\cap X_\alpha))\end{aligned}$$

$$= \bigcup_{n\in N,\alpha\in A}\Big(\bigcup_{\gamma\in A}F_\gamma(n,\ F_\alpha(n,\ V\cap X_\alpha)\cap X_\gamma)\Big)$$
$$= \bigcup_{n\in N,\alpha\in A}F_\alpha(n,\ F_\alpha\ (n,\ V\cap X_\alpha))=V,$$

即
$$V=\bigcup_{n\in N}F_\beta(n,\ F_\beta(n,\ V)).$$

于是$(\mathscr{F}_\beta,\ F_\beta)$是$\{(\mathscr{F}_\alpha,\ F_\alpha)\}_{\alpha\in A}$的上界.

由 Zorn 引理，让$(\mathscr{F}_0,\ F_0)$是$\mathscr{F}$的极大元．为完成证明只须验证$\mathscr{F}_0=\mathscr{B}$．若不然，存在$E\in\mathscr{B}\setminus\mathscr{F}_0$，记$\mathscr{F}_1=\mathscr{F}_0\cup\{E\}$．因为$\mathscr{F}_0\subset\mathscr{B}$，并且$\mathscr{B}$是$X$的控制族，所以$X_0=\bigcup\mathscr{F}_0$是$X$的闭子集；而$E$也是$X$的闭子集，于是$X_0$和$E$是$X_1=X_0\cup E$的闭$\sigma$-子空间，所以$X_1$是一个$\sigma$-空间．由引理 3，存在$X_1$上的$\sigma$-对应$F_1$使对$S\subset X_1$有
$$F_1(n,\ S)\cap X_0=F_0(n,\ S\cap X_0).$$
因此，$(\mathscr{F}_0,\ F_0)<(\mathscr{F}_1,\ F_1)$，矛盾．所以$\mathscr{F}_0=\mathscr{B}$，故$X$是一个$\sigma$-空间．　　证毕.

作者对评审人所提出的有价值的建议表示感谢.

参 考 文 献

[1] Okuyama, A., A survey of the theory of σ-spaces, *Gen. Top. Appl.*, **1**(1971), 57—63.
[2] 高国士, σ-空间、Σ-空间与及 Heath-Hodel 映象, *数学研究与评论*, **4**(1984), 137—142.
[3] Burke, D. K. and Lutzer, D. J., Recent advances in the theory of generalized metric spaces, *Proc. Mephis State Top. Conference*, (1975), 1—70.
[4] Borges, C. J. R., On stratifiable spaces, *Pacific J. Math.*, **17**(1966), 1—16.
[5] Heath, R. W. and Hodel, R. E., Characterizations of σ-spaces, *Fund. Math.*, **77** (1973), 271—275.