第 34 卷 第 2 期　　数 学 学 报　　Vol. 34, No. 2
1991 年 3 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Mar., 1991

关于 Lašnev 空间[*1)]

林　寿
(福建省宁德师范专科学校，福建 352100)

摘　要

本文给出非 $\aleph$-空间的 Lašnev 空间的一个特征. 作为它的推论，我们证明了一个 Lašnev 空间是一个 $\aleph$-空间当且仅当它具有点可数 cs-网.

本文中所论空间均是满足正则、T_1 分离性公理的拓扑空间.

度量空间在连续闭映射之下的象空间称为 Lašnev 空间. 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族，若对于 X 的紧子集 K 和包含 K 的 X 的开子集 U 存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $K\subset\cup\mathscr{P}'\subset U$，那么 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 k-网. 显然，k-网是基的一般化. 具有 σ-局部有限 k-网的空间称为 $\aleph$-空间. Foged[1] 证明了一个空间是一个 Lašnev 空间当且仅当它是具有 σ-遗传闭包保持 k-网的 Fréchet 空间，又因为 $\aleph$-空间具有 σ-遗传闭包保持 k-网，于是一个 $\aleph$-空间是一个 Lašnev 空间当且仅当它是一个 Fréchet 空间. 本文的目的是寻求一个 Lašnev 空间是一个 $\aleph$-空间的充要条件. 为此目的，先讨论非 $\aleph$-空间的 Lašnev 空间的特征，作为该特征的推论是一个 Lašnev 空间是一个 $\aleph$-空间的充要条件是它具有点可数 cs-网.

引理 1　具有 σ-局部可数 k-网的仿紧空间是一个 $\aleph$-空间.

证　设仿紧空间 X 具有 σ-局部可数 k-网 $\bigcup_{i\in N}\mathscr{P}_i$，其中 $\mathscr{P}_i$ 是 X 的局部可数集族. 由于局部可数集族关于有限并封闭，不妨设 $\mathscr{P}_i\subset\mathscr{P}_{i+1}$. 因为 $\mathscr{P}_i$ 是 X 的局部可数集族，存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}_i$ 使 $\mathscr{U}_i$ 中的每一元仅与 $\mathscr{P}_i$ 中的可数个元相交，又因为 X 是仿紧空间，$\mathscr{U}_i$ 存在局部有限的开加细 $\mathscr{W}_i$. 这时 $\mathscr{W}_i$ 中的每一元仅与 $\mathscr{P}_i$ 中的可数个元相交. 下面证明 $\bigcup_{i\in N}(\mathscr{P}_i\wedge\mathscr{W}_i)$ 是 X 的 σ-局部有限 k-网. 对于 $W\in\mathscr{W}_i$，将可数集 $\{P\in\mathscr{P}_i: W\cap P\neq\varnothing\}$ 编排为 $\{P(W,n): n\in N\}$ (可能添加一些空集合)，置

$$\mathscr{H}_{i,n}=\{P(W,n)\cap W: W\in\mathscr{W}_i\}.$$

因为 $\mathscr{W}_i$ 是 X 的局部有限集族，所以 $\mathscr{H}_{i,n}$ 亦是 X 的局部有限集族. 又因为

$$\mathscr{P}_i\wedge\mathscr{W}_i=\bigcup_{n\in N}\mathscr{H}_{i,n},$$

所以 $\bigcup_{i\in N}(\mathscr{P}_i\wedge\mathscr{W}_i)$ 是 X 的 σ-局部有限集族. 设 $K\subset U$，其中 K、U 分别是 X 的紧子

* 1988 年 5 月 9 日收到，1990 年 5 月26日收到修改稿.
1) 福建省教委科学基金资助课题，国家自然科学基金资助项目.

集和开子集，于是存在 $i\in N$ 和 $\mathscr{P}_i$ 的有限子族 $\mathscr{P}'_i$ 使 $K\subset\cup\mathscr{P}'_i\subset U$，也存在 $\mathscr{W}_i$ 的有限子族 $\mathscr{W}'_i$ 使 $K\subset\cup\mathscr{W}'_i$. 这时 $\mathscr{P}'_i\wedge\mathscr{W}'_i$ 是 $\mathscr{P}_i\wedge\mathscr{W}_i$ 的有限子族且 $K\subset\cup(\mathscr{P}'_i\wedge\mathscr{W}'_i)\subset U$. 因而 X 具有 σ-局部有限 k-网，即 X 是一个 $\aleph$-空间.

引理 2 若 $\mathscr{F}$ 是 X 的遗传闭包保持集族，K 是 X 的紧子集，那么存在 K 的有限子集 K_1 使 $\mathscr{F}$ 中仅有有限个元与 $K\backslash K_1$ 相交.

引理 2 的证明类似于[2]定理 2.1 的证明，故从略.

对于 $\alpha<\omega_1$，置

$$X(\alpha)=\{x(\alpha,n):n\in N\}\cup\{x(\alpha)\},$$

其中序列 $\{x(\alpha,n)\}$ 收敛于点 $x(\alpha)$. 记

$$A=\{x(\alpha):\alpha<\omega_1\},$$

$$S_{\omega_1}=\oplus\{X(\alpha):\alpha<\omega_1\}/A.$$

因为 A 是 $\oplus\{X(\alpha):\alpha<\omega_1\}$ 的闭子空间，所以 S_{ω_1} 是一个 Lašnev 空间.

拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 cs-网，如果 X 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 x 且 V 是 X 的含 x 的开子集，那么存在 $m\in N$ 和 $P\in\mathscr{P}$ 使 $\{x\}\cup\{x_n:n\geqslant m\}\subset P\subset V$.

引理 3 S_{ω_1} 不具有点可数 cs-网.

证　设 S_{ω_1} 的唯一非孤立点是 a. 记

$$Y(\alpha)=X(\alpha)\backslash\{a\},\ \alpha<\omega_1.$$

若 S_{ω_1} 具有点可数 cs-网 $\mathscr{P}$，那么 $\{P\in\mathscr{P}:a\in P\}$ 是可数族. 重排可数集族

$\{P\in\mathscr{P}:a\in P$ 且有无限多个 $\alpha<\omega_1$ 使 $Y(\alpha)\cap P\neq\varnothing\}$ 为 $\{P_n:n\in N\}$. 于是可归纳地选取 S_{ω_1} 的子集 $\{y_n:n\in N\}$ 使 $y_n\in P_n\backslash\{a\}$ 且不同的 y_n 位于不同的 $Y(\alpha)$ 上. 这时 $\{y_n:n\in N\}$ 是 S_{ω_1} 的闭子集，因而 $V=S_{\omega_1}\backslash\{y_n:n\in N\}$ 是点 a 的开邻域. 置

$$\mathscr{P}'=\{P\in\mathscr{P}:P\subset V\}.$$

如果 $a\in P\in\mathscr{P}'$，因为 $y_n\in P_n\backslash V$，所以没有 $n\in N$ 使 $P_n=P$，于是 P 仅与有限个 $Y(\alpha)$ 相交，因而 $H=\cup\{P\in\mathscr{P}':a\in P\}$ 仅与可数个 $Y(\alpha)$ 相交，故有 $\beta<\omega_1$ 使 $Y(\beta)\cap H=\varnothing$. 置

$$V\cap Y(\beta)=\{x_n:n\in N\},$$

那么序列 $\{x_n\}$ 收敛于点 a 且 $\{a\}\cup\{x_n:n\in N\}\subset V$，所以存在 $m\in N$ 和 $P\in\mathscr{P}$ 使 $\{a\}\cup\{x_n:n\geqslant m\}\subset P\subset V$，于是 $P\subset H$ 且 $P\cap Y(\beta)\neq\varnothing$，矛盾. 因而 S_{ω_1} 不具有点可数 cs-网.

Foged[1] 证明了 Lašnev 空间具有点可数 k-网，因而 S_{ω_1} 具有点可数 k-网.

空间 X 称为 Fréchet 空间，如果对于 X 的子集 A 及点 $x\in\mathrm{cl}(A)$，存在 A 中的点组成的序列收敛于点 x. Lašnev 空间是 Fréchet 空间.

定理 Lašnev 空间 X 是非 $\aleph$-空间当且仅当 X 含有闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

证　充分性. 设空间 X 含有一个闭子空间 X_0 同胚于 S_{ω_1}，于是 X_0 不具有点可数 cs-网. 因为 $\aleph$-空间的子空间仍然是 $\aleph$-空间，并且 $\aleph$-空间具有点可数 cs-网[3]，所以 X 不是一个 $\aleph$-空间.

必要性. 设 Lašnev 空间 X 不是一个 $\aleph$-空间. 存在度量空间 M 以及满的连续的闭映射 $f:M\to X$. 因为 X 不是一个 $\aleph$-空间，存在点 $a\in X$ 使 $f^{-1}(a)$ 在 M 中的边界点集

$\mathrm{Bry}(f^{-1}(a))$ 不是M的 Lindelöf 子空间. 事实上，如果任给 $x \in X$, $\mathrm{Bry}(f^{-1}(x))$ 是M的 Lindelöf 子空间,那么先取定 $m(x) \in f^{-1}(x)$，置

$$L = \bigcup\{\mathrm{Bry}(f^{-1}(x)) : x \in X\} \cup \{m(x) : f^{-1}(x) \text{ 是}M\text{的开子集}\},$$
$$g = f|_L : L \to X,$$

那么g是从度量空间L到X上的具有 Lindelöf 纤维的连续闭映射. 因为L是度量空间，所以L具有σ-局部有限 k-网. 又因为g是具有 Lindelöf 纤维的满的连续闭映射，所以X具有σ-局部可数 k-网(注意到g是紧覆盖映射[4]). 显然，X是一个仿紧空间. 由引理1, X是一个$\aleph$-空间,矛盾. 因而，存在点 $a \in X$ 使 $\mathrm{Bry}(f^{-1}(a))$ 不是M的 Lindelöf 子空间. 由于在度量空间中 Lindelöf 性质等价于$\aleph_1$-紧性,于是存在 $\mathrm{Bry}(f^{-1}(a))$ 的不可数的离散子集 $\{m(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$. 这时 $\{m(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 也是M的离散子集. 因为M是集态正规空间，存在M的离散开子集族 $\{D(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 使对于 $\alpha < \omega_1$ 有 $m(\alpha) \in D(\alpha)$. 若V是X的含点a的开子集,由于 $m(\alpha) \in \mathrm{Bry}(f^{-1}(a))$，所以

$$f^{-1}(V) \cap D(\alpha) \setminus f^{-1}(a) \neq \varnothing,$$

即

$$V \cap (f(D(\alpha)) \setminus \{a\}) \neq \varnothing,$$

于是

$$a \in \overline{f(D(\alpha)) \setminus \{a\}}.$$

因为X是一个 Fréchet 空间,存在子集

$$E(\alpha) = \{x(\alpha, n) : n \in N\} \subset f(D(\alpha)) \setminus \{a\}$$

使序列 $\{x(\alpha, n)\}$ 收敛于点a. 因为 $\{D(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ 是离散的,并且 $f : M \to X$ 是连续的闭映射,所以 $\{\overline{f(D(\alpha))} : \alpha < \omega_1\}$ 是X的遗传闭包保持集族，从而 $\{E(\alpha) \cup \{a\} : \alpha < \omega_1\}$ 也是X的遗传闭包保持集族. $E(\alpha) \cup \{a\}$ 是X的紧子集，由引理2，存在 $E(\alpha)$ 的有限子集 $K(\alpha)$ 和 ω_1 的有限子集 $\Lambda(\alpha)$ 使当 $\beta \in \omega_1 \setminus \Lambda(\alpha)$ 时，$(E(\alpha) \setminus K(\alpha)) \cap E(\beta) = \varnothing$. 这时必有 $\alpha \in \Lambda(\alpha)$. 置

$$F(\alpha) = E(\alpha) \setminus K(\alpha),$$

则存在ω_1的不可数子集 $\{\alpha_\beta \in \omega_1 : \beta < \omega_1\}$ 使 $\{F(\alpha_\beta) : \beta < \omega_1\}$ 是两两互不相交的. 事实上,先取定 $\alpha_0 = \min \omega_1$，让

$$\alpha_1 = \min(\omega_1 \setminus \Lambda(\alpha_0)),$$

那么 $F(\alpha_0) \cap F(\alpha_1) = \varnothing$. 一般地，若对于 $\gamma < \beta < \omega_1$，我们已选取了 $\alpha_\gamma < \omega_1$ 使 $\{F(\alpha_\gamma) : \gamma < \beta\}$ 是两两互不相交的,由于 $\bigcup\{\Lambda(\alpha_\gamma) : \gamma < \beta\}$ 是ω_1的可数子集,所以

$$\omega_1 \setminus \bigcup\{\Lambda(\alpha_\gamma) : \gamma < \beta\} \neq \varnothing.$$

取

$$\alpha_\beta = \min(\omega_1 \setminus \bigcup\{\Lambda(\alpha_\gamma) : \gamma < \beta\}),$$

那么 $\alpha_\beta < \omega_1$,并且每一 $F(\alpha_\gamma) \cap F(\alpha_\beta) = \varnothing$. 由超限归纳原理,对于 $\beta < \omega_1$,我们取定了 $\alpha_\beta < \omega_1$ 使 $\{F(\alpha_\beta) : \beta < \omega_1\}$ 是两两互不相交的. 这时每一个 $F(\alpha_\beta)$ 仍然是无限序列且收敛于a,故X的闭子空间 $\bigcup\{F(\alpha_\beta) \cup \{a\} : \beta < \omega_1\}$ 同胚于 S_{ω_1}.

推论 Lašnev 空间X是一个$\aleph$-空间当且仅当X具有点可数 cs-网.

证 显然,$\aleph$-空间具有点可数 cs-网[3]. 若 Lašnev 空间X不是一个$\aleph$-空间,由定理，存在X的一个闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 因为 S_{ω_1} 不具有点可数 cs-网,所以X不具有点可数

cs 网。

最后，作者对评审人认真审阅本文及提出有价值的修改意见表示感谢。

参 考 文 献

[1] Foged, L., A characterization of closed images of metric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **95** (1985), 487—490.
[2] Okuyama, A., On a generalization of Σ-spaces, *Pacific J. Math.*, **42**(1972), 485—495.
[3] Foged, L., Characterizations of ℵ-spaces, *Pacific J. Math.* **110**(1984), 59—63.
[4] 高国士，两个映射定理，数学年刊，**7A**(1986), 666—669.