第 34 卷 第 1 期　　数 学 学 报　　Vol. 34, No. 1
1991 年 1 月　　ACTA MATHEMATICA SINICA　　Jan., 1991

关于 R-商、ss-映射*

林　　寿
（福建省宁德师范专科学校，福建 352100）

摘　　要

本文借助于 R-商、ss-映射建立具有局部可数 k-网的 k_R-空间(具有由紧子集组成的局部可数 k-网的 k_R-空间)和度量空间(局部紧度量空间)之间的联系.

Michael [1] 证明了具有可数 k-网的正则的 k-空间可刻划为某一可分度量空间在商映射下的象. 与 Michael 的上述定理平行，Arhangel'skiĭ[2] 证明了具有可数 k-网的正则的 k_R-空间可刻划为某一可分度量空间在 R-商映射下的象. 同时，Arhangel'skiĭ[2] 还用 R-商映射刻划了具有由紧子集组成的可数 k-网的 k_R-空间类. 本文的主要目的是利用 R-商、ss-映射将 Arhangel'skiĭ 的结果推广到具有局部可数 k-网的 k_R-空间类.

本文所论空间均指满足正则且 T_1 分离性公理的拓扑空间.

拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 k-网，如果对于 X 的紧子集 K 及 X 的含 K 的开子集 V，存在 $\mathscr{P}$ 的有限子集族 $\mathscr{P}'$ 使 $K\subset\bigcup\mathscr{P}'\subset V$. 具有可数 k-网的空间称为 $\aleph_0$-空间[1]. 空间 X 称为 k-空间，如果 X 的子集 A 与 X 的任意紧子集之交是 X 的闭子集，则 A 是 X 的闭子集. 空间 X 称为 k_R-空间，如果 X 是完全正则空间，并且对于 X 上的任意实值函数 f，若 f 限制于 X 的所有紧子集上是连续函数，则 f 是 X 上的连续函数. 显然，度量空间是 k-空间，而完全正则的 k-空间是 k_R-空间.

设 f 是从空间 X 到空间 Y 上的连续函数. f 称为 R-商映射[2]，如果 g 是 Y 上的实值函数，并且复合函数 $g\circ f$ 连续，那么 g 是连续函数. f 称为紧覆盖映射[1]，如果 K 是 Y 的紧子集，那么存在 X 的紧子集 L 使 $f(L)=K$. f 称为 ss-映射[3]，如果对于 Y 的任意点 y，存在 y 在 Y 中的开邻域 V 使 $f^{-1}(V)$ 是 X 的可分子空间.

§1. 具有局部可数 k-网的空间

为了方便起见，将主要定理的证明过程中所需要的一些断言以引理的形式列出.

引理 1.1[3, 定理]　空间 X 具有局部可数 k-网当且仅当 X 是某一度量空间在紧覆盖、ss-映射下的象.

---

* 1988 年 11 月 6 日收到.

引理 1.2[2, B] 若 $f: X \to Y$ 是紧覆盖映射，并且 Y 是 k_R-空间(k-空间)，则 f 是 R-商映射(商映射).

引理 1.3 设 $f: X \to Y$ 是 ss-映射，并且 X 是度量空间，则 (a) Y 是完全正则空间，(b) 如果 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ-局部可数子集族，让 $\mathscr{F} = \{f(P) \mid P \in \mathscr{P}\}$ 那么 $\mathscr{F}$ 是 Y 的局部可数子集族.

证 (a) 对于 $y \in V \subset Y$，其中 V 是 Y 的开子集. 由于 f 是 ss-映射，存在点 y 在 Y 中的开邻域 H 使 $f^{-1}(H)$ 是 X 的可分子空间. 而 X 是度量空间，所以 $f^{-1}(H \cap V)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间，于是 $H \cap V$ 是 Y 的 Lindelöf 子空间. 由 Y 的正则性，存在 Y 的开子集 W 使 $y \in W \subset \mathrm{cl}(W) \subset H \cap V$，这时 $\mathrm{cl}(W)$ 是 Y 的正则且 Lindelöf 子空间. 因而 $\mathrm{cl}(W)$ 是完全正则的，故存在从 $\mathrm{cl}(W)$ 到单位区间 $[0,1]$ 中的连续函数 h 使 $h(y) = 0$，$h(\mathrm{cl}(W) - W) = \{1\}$. 置 $h_1: X \to [0,1]$ 使当 $z \in \mathrm{cl}(W)$ 时，$h_1(z) = h(z)$；当 $z \in Y - \mathrm{cl}(W)$ 时，$h_1(z) = 1$；那么 h_1 连续且 $h_1(y) = 0$，$h_1(Y - V) = \{1\}$. 因此，Y 是完全正则空间.

(b) 对于 $y \in Y$. 由于 f 是 ss-映射，且 X 是度量空间，存在点 y 在 Y 中的开邻域 V 使 $f^{-1}(V)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间，而 Lindelöf 空间的局部可数族是可数族，所以 $\{P \in \mathscr{P} \mid P \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing\}$ 是 X 的可数子集族，即 $\{F \in \mathscr{F} \mid F \cap V \neq \varnothing\}$ 是 Y 的可数子集族. 故 $\mathscr{F}$ 是 Y 的局部可数子集族.

引理 1.4[2, Б] 若 $f: X \to Y$ 是 R-商映射，并且 X 是 k_R-空间，Y 是完全正则空间，那么 Y 也是一个 k_R-空间.

引理 1.5[2, 引理 2] 设 f 是从 k_R-空间 X 到完全正则空间 Y 上的 R-商映射。如果 C 是 Y 的紧子集且有 Y 中的下降的开集列 $\{U_n \mid n \in N\}$ 使 $U_n \cap C \neq \varnothing$，$(\cap \{U_n \mid n \in N\}) \cap C = \varnothing$，那么存在 X 的紧子集 K 使对于 $n \in N$，$f(K) \cap U_n \neq \varnothing$ 且 $f(K) \subset \mathrm{cl}(U_1)$.

定理 1 下列条件相互等价:

(1) X 是具有局部可数 k-网的 k_R-空间.

(2) X 是某一度量空间在紧覆盖、R-商、ss-映射下的象.

(3) X 是某一度量空间在 R-商、ss-映射下的象.

证 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 X 是具有局部可数 k-网的 k_R-空间. 由引理 1.1，存在度量空间 M 及从 M 到 X 上的紧覆盖、ss-映射 f. 由引理 1.2，f 是 R-商映射. (2)$\Longrightarrow$(3) 显然. (3)$\Longrightarrow$(1) 设 X 是某一度量空间在 R-商、ss-映射下的象. 于是，存在度量空间 M 及从 M 到 X 上的 R-商、ss-映射 f. 由引理 1.3 和引理 1.4，X 是 k_R-空间. 因为 M 是度量空间，由经典的 Nagata-Smirnov 度量化定理知 M 具有 σ-局部有限基. 让 $\mathscr{B}$ 是 M 的 σ-局部有限基，置 $\mathscr{P} = \{f(B) \mid B \in \mathscr{B}\}$. 由引理 1.3，$\mathscr{P}$ 是 X 的局部可数子集族. 置 $\mathscr{F} = \{\mathrm{cl}(P) \mid P \in \mathscr{P}\}$，那么 $\mathscr{F}$ 是 X 的局部可数的闭子集族. 下面证明 $\mathscr{F}$ 是 X 的 k-网. 设 $K \subset V \subset X$，其中 K 是 X 的非空紧子集，V 是 X 的开子集. 由 K 的紧性及 $\mathscr{F}$ 的局部可数性，存在 X 的开子集 G 使 $K \subset G \subset V$ 且只有 $\mathscr{F}$ 的可数个元与 G 相交. 再由 X 的正则性及 K 的紧性，存在 X 的开集 G_1，G_2 使 $K \subset G_2 \subset \mathrm{cl}(G_2) \subset G_1 \subset \mathrm{cl}(G_1) \subset G$. 置 $\mathscr{F}' = \{F \in \mathscr{F} \mid F \subset G\}$，由 G 的选取知 $\mathscr{F}'$ 是 $\mathscr{F}$ 的可数子集族，于是可以记 $\mathscr{F}' = \{F_i \mid i \in N\}$.

对于 $x\in K$，由于 $x\in G_2$，于是 $f^{-1}(x)\subset f^{-1}(G_2)$．取定 $z\in f^{-1}(x)$，存在 $B\in\mathscr{B}$ 使 $z\in B\subset f^{-1}(G_2)$，因而 $x\in \mathrm{cl}(f(B))\subset \mathrm{cl}(G_2)\subset G$．这时 $\mathrm{cl}(f(B))\in\mathscr{F}'$．故 $K\subset\bigcup\{F_i|i\in N\}$．对于 $n\in N$，置

$$U_n=G_2-\bigcup\{F_i|i\leqslant n\}$$

那么 $K\cap(\bigcap\{U_n|n\in N\})=K-\bigcup\{F_i|i\in N\}=\varnothing$．我们断言存在 $n\in N$ 使 $U_n\cap K=\varnothing$．事实上，如果对于 $n\in N$，$U_n\cap K\neq\varnothing$，而 $\{U_n|n\in N\}$ 是 X 的下降的开子集列且 $K\cap(\bigcap\{U_n|n\in N\})=\varnothing$，由引理 1.3 和引理 1.5，存在 M 的紧子集 L 使对于 $n\in N$，$f(L)\cap U_n\neq\varnothing$ 且 $f(L)\subset \mathrm{cl}(U_1)$．这时 $f(L)\subset\mathrm{cl}(G_2)\subset G_1$，于是 $L\subset f^{-1}(G_1)$．因为 $\mathscr{B}$ 是 M 的基且 L 是 M 的紧子集，存在 $\mathscr{B}$ 的有限子集族，譬如说 $\{B_i|i\leqslant m\}$ 使 $L\subset\bigcup\{B_i|i\leqslant m\}\subset f^{-1}(G_1)$，于是

$$f(L)\subset\bigcup\{\mathrm{cl}(f(B_i))|i\leqslant m\}\subset\mathrm{cl}(G_1)\subset G.$$

这时每一 $\mathrm{cl}(f(B_i))\in\mathscr{F}'$，所以存在 $k\in N$ 使

$$(\bigcup\{\mathrm{cl}(f(B_i))|i\leqslant m\})\cap U_k=\varnothing,$$

因而 $f(L)\cap U_k=\varnothing$，矛盾．故存在 $n\in N$ 使 $U_n\cap K=\varnothing$，即 $(G_2-\bigcup\{F_i|i\leqslant n\})\cap K=\varnothing$，而 $K\subset G_2$，所以

$$K\subset\bigcup\{F_i|i\leqslant n\}\subset G\subset V.$$

因此 $\mathscr{F}$ 是 X 的 k-网．故 X 具有局部可数 k-网．

注　上述定理推广了 Arhangel'skiĭ 的定理：空间 X 是具有可数 k-网的 k_R-空间当且仅当 X 是某一可分度量空间在 R-商映射下的象[2，定理 2]

§2. 具有由紧子集组成的局部可数 k-网的空间

引理 2.1　空间 X 具有由紧子集组成的局部可数 k-网当且仅当 X 是某一局部紧度量空间在紧覆盖、ss-映射下的象．

证　设空间 X 是具有由紧子集组成的局部可数 k-网．让 $\{P_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 X 的由紧子集组成的局部可数 k-网．对于 $\alpha\in A$，P_α 是 X 的紧子空间．由于紧空间的局部可数子集族是可数子集族，于是可数族 $\{P_\alpha\cap P_\beta|\beta\in A\}$ 是子空间 P_α 的一个可数 k-网．而具有可数 k-网的紧空间是可度量化空间 [1，C]，故 P_α 是 X 的可度量化子空间．让 M 是子空间族 $\{P_\alpha|\alpha\in A\}$ 的互不相交的拓扑和，并且让 f 是从 M 到 X 上的显然映射，那么 M 是局部紧的度量空间．不难验证，f 是紧覆盖的 ss-映射．

反之，设 X 是某一局部紧的度量空间在紧覆盖、ss-映射下的象．让 f 是从局部紧度量空间 M 到 X 上的紧覆盖、ss-映射．因为 M 是度量空间，让 $\mathscr{B}$ 是 M 的 σ-局部有限基．又因为 M 是局部紧空间，让 $\mathscr{B}'=\{B\in\mathscr{B}|\mathrm{cl}(B)$ 是 M 的紧子集$\}$，那么 $\mathscr{B}'$ 仍然是 M 的 σ-局部有限基．由于 M 是局部可分的度量空间，M 可表为一族可分度量空间，譬如设为 $\{M_\alpha|\alpha\in A\}$，的互不相交的拓扑和 [4，4.4.F.(c)]．对于 $\alpha\in A$，M_α 是 M 的既开且闭的 Lindelöf 子空间，因而让 $\mathscr{P}_\alpha=\{M_\alpha\cap\mathrm{cl}(B)|B\in\mathscr{B}'\}$，则 $\mathscr{P}_\alpha$ 是 M_α 的由紧子集组成的可数 k-网．于是，$\bigcup\{\mathscr{P}_\alpha|\alpha\in A\}$ 是 M 的由紧子集组成的局部可数 k-网．置 $\mathscr{F}=\{f(P)|P\in\bigcup\{\mathscr{P}_\alpha|\alpha\in A\}\}$．由于紧覆盖映射保持 k-网，于是 $\mathscr{F}$ 是 X 的 k-网．再由

引理 1.3，$\mathscr{F}$ 是X的局部可数子集族．因而X具有由紧子集组成的局部可数 k-网．

定理 2 下列条件相互等价：

(1) X是具有由紧子集组成的局部可数 k-网的 k_R-空间．

(2) X是某一局部紧度量空间在紧覆盖、R-商、ss-映射下的象．

(3) X是某一局部紧度量空间在 R-商、ss-映射下的象．

证 (1)$\Longrightarrow$(2) 应用引理 2.1 和引理 1.2．(2)$\Longrightarrow$(3) 显然．(3)$\Longrightarrow$(1) 设X是某一局部紧度量空间在 R-商、ss-映射下的象．让 f 是从局部紧度量空间M到X上的R-商、ss-映射．由引理 1.3 和引理 1.4，X是一个 k_R-空间．由引理 2.1，只须证明 f 是紧覆盖映射．设K是X的非空紧子集．由于 f 是 ss-映射，并且K是X的紧子集，存在X的开子集V使 $K\subset V$ 且 $f^{-1}(V)$ 是M的可分子空间．由X的正则性，存在X的开子集G使$K\subset G\subset \mathrm{cl}(G)\subset V$．让 $M_o=f^{-1}(\mathrm{cl}(G))$，因为$M$是局部紧的度量空间，$M_o$ 是M的具有 Lindelöf 性质的局部紧的度量空间． 由引理 2.1，M_o 具有由紧子集组成的可数 k-网．让 $\{F_i|i\in N\}$ 是 M_o 的由紧子集组成的可数 k-网，则存在 $n\in N$ 使

$$K\subset f(\cup\{F_i|i\leqslant n\}).$$

若不然，对于 $n\in N$，让 $U_n=G-f(\cup\{F_i|i\leqslant n\})$，那么 $\{U_n|n\in N\}$ 是X的下降的开集列，$U_n\cap K\neq\emptyset$，$(\cap\{U_n|n\in N\})\cap K=K-f(\cup\{F_n|n\in N\})=K-\mathrm{cl}(G)=\emptyset$．由引理 1.3 及引理 1.5，存在$M$的紧子集 L 使对于 $n\in N$，$f(L)\cap U_n\neq\emptyset$ 且 $f(L)\subset\mathrm{cl}(G)$．这时 $L\subset M_0$． 由于 $\{F_i|i\in N\}$ 是 M_o 的 k-网，存在 $m\in N$ 使 $L\subset\cup\{F_i|i\leqslant m\}$，因而 $f(L)\cap U_m\subset f(\cup\{F_i|i\leqslant m\})\cap U_m=\emptyset$，矛盾． 故存在 $n\in N$ 使 $K\subset f(\cup\{F_i|i\leqslant n\})$．让

$$H=f^{-1}(K)\cap(\cup\{F_i|i\leqslant n\}).$$

那么H是M的紧子集且 $f(H)=K$，所以 f 是紧覆盖映射．证毕．

注 定理 2 推广了 Arhangel'skiĭ [2，定理 4]的等价命题：正则空间X是具有由紧子集组成的可数 k-网的 k_R-空间当且仅当 X 是某一可分度量空间在 R-商映射下的象空间．

定理 3 下列条件相互等价：

(1) X是具有由紧子集组成的局部可数 k-网的 k-空间．

(2) X是某一局部紧度量空间在紧覆盖、商、ss-映射下的象．

(3) X是某一局部紧度量空间在商、ss-映射下的象．

证 (1)$\Longrightarrow$(2) 利用引理 2.1 和引理 1.2．(2)$\Longrightarrow$(3) 显然．(3)$\Longrightarrow$(1) 设X是局部紧度量空间M在商、ss-映射 f 下的象空间．因为 f 是商映射，并且M是 k-空间，所以X是 k-空间．由引理 2.1，M具有由紧子集组成的局部可数 k-网．设 $\mathscr{P}$ 是M的由紧子集组成的局部可数 k-网．置 $\mathscr{F}=\{f(P)|P\in\mathscr{P}\}$． 下面证明 $\mathscr{F}$ 是X的由紧子集组成的局部可数 k-网．由引理 1.3，$\mathscr{F}$ 是X的由紧子集组成的局部可数集族．设 $K\subset V\subset X$，其中K是X的非空紧子集，V是X的开子集．让

$$\mathscr{G}=\{F\in\mathscr{F}\,|\,F\cap K\neq\emptyset,\ F\subset V\}$$

我们断言存在 $\mathscr{G}$ 的有限子集族 $\mathscr{G}'$ 使 $K\subset\cup\mathscr{G}'$． 如若不然，那么对于 $\mathscr{G}$ 的任何有限子集族 $\mathscr{G}'$，有 $K-\cup\mathscr{G}'\neq\emptyset$．对于 $x\in K$，让

$$\mathscr{G}_x=\{F\in\mathscr{F}\mid x\in F\subset V\},$$

那么 $\mathscr{G}_x\neq\varnothing$（因为 $\mathscr{P}$ 是M的 k-网），并且 $\mathscr{G}=\bigcup\{\mathscr{G}_x\mid x\in K\}$. 因为 $\mathscr{F}$ 是X的点可数子集族，$\mathscr{G}_x$ 是 $\mathscr{F}$ 的可数子族，于是可以记

$$\mathscr{G}_x=\{F_i(x)\mid i\in N\}$$

（如果某个 $\mathscr{G}_x$ 是有限族，譬如说 $\mathscr{G}_x=\{F_1(x),F_2(x),\cdots,F_m(x)\}$，那么当 $n>m$ 时，取 $F_n(x)=F_m(x)$）. 先取定 $x_1\in K$，那么 $K-F_1(x_1)\neq\varnothing$，然后取 $x_2\in K-F_1(x_1)$，那么

$$K-\bigcup\{F_i(x_j)\mid i,j\leqslant 2\}\neq\varnothing.$$

一般地，可归纳地选取K的一个无限子集，设为 $A=\{x_n\mid n\in N\}$，使对于 $n\in N$，

$$x_{n+1}\notin F_i(x_j),\ 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

因为K是X的紧子集，于是K的无限子集A有聚点. 设 x 是A的一个聚点，让 $B=A-\{x\}$，那么B不是X的闭子集. 而 f 是商映射，因而 $f^{-1}(B)$ 不是M的闭子集. 但是，M是k-空间，于是有M的紧子集L使 $f^{-1}(B)\cap L$ 不是L的闭子集. 让 $g=f|_L:L\to f(L)$，那么g是闭映射且 $g^{-1}(B\cap f(L))=f^{-1}(B)\cap L$，于是 $B\cap f(L)$ 不是 $f(L)$ 的闭子集，因此 $B\cap f(L)$ 是X的无限子集，所以 $A\cap f(L)$ 也是X的一个无限子集. 又因为K是X的闭子集，且 $K\cap f(L)\neq\varnothing$，于是 $H=L\cap f^{-1}(K)$ 是M的非空紧子集且 $H\subset f^{-1}(K)\subset f^{-1}(V)$. 而 $\mathscr{P}$ 是M的 k-网，于是存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $H\subset\bigcup\mathscr{P}'\subset f^{-1}(V)$，所以 $f(H)\subset f(\bigcup\mathscr{P}')\subset V$. 让 $\mathscr{P}'=\{P_m\mid m\leqslant q\}$，不妨设每一 P_m 均与H相交，那么 $f(P_m)\in\mathscr{G}$. 由于

$$A\cap(f(\bigcup\mathscr{P}'))\supset A\cap f(H)=A\cap f(L),$$

所以 $A\cap(f(\bigcup\mathscr{P}'))$ 是无限集，于是存在 $m\leqslant q$ 使 $f(P_m)$ 含有无限多个A中的点. 任意取定 $x_j\in A\cap f(P_m)$，那么存在 i 使 $f(P_m)=F_i(x_j)$，这时存在 $n>i,j$ 使 $x_n\in F_i(x_j)$，这与 x_n 的选取相矛盾. 故存在 $\mathscr{G}$ 的有限子集族 $\mathscr{G}'$ 使 $K\subset\bigcup\mathscr{G}'\subset V$. 因而 $\mathscr{F}$ 也是X的 k-网，所以X具有由紧子集组成的局部可数 k-网. 证毕.

利用 Michael [5, 推论 1.4]我们知道如果X是一个具有由紧子集组成的可数 k-网的 k_R-空间，那么X是一个 k-空间. 对照定理 2 和定理 3，下述问题是有趣的.

问题　若正则空间X是一个具有由紧子集组成的局部可数 k-网的 k_R-空间，那么X是否是一个 k-空间?

参　考　文　献

[1] Michael, E., $\aleph_0$-spaces, *J. Math. Mech.*, **15**(1966), 983—1002.

[2] Архангельский, А. В., Об R-факторых отображениях пространств со счетной базой, *ДАН СССР*, **287**(1986), 14—17.

[3] Lin Shou(林寿), On a generalization of Michael's theorem, *Northeastern Math. J.*, **4**: 2 (1988), 162—168.

[4] Engelking, R., General Topology, Warszawa, 1977.

[5] Michael, E., On k-spaces, k_R-spaces and $k(X)$, *Pacific J. Math.*, **47**(1973), 487—498.