数学年刊 A 辑
2017, 38(3):269–276
DOI: 10.16205/j.cnki.cama.2017.0022

箱积空间中的紧有限集族*

林 寿[1]

提要 箱积中正规性或仿紧性的研究是一般拓扑学中极其困难的问题. 作者以紧有限闭扩张和定理为基础, 建立了一个广义度量空间类的箱积定理, 由此导出 k^* 可度量空间及具有点可数 k 网的空间等均关于箱积运算保持.

关键词 箱积, 紧有限集族, Subproper 映射, k^* 可度量空间, k 网
MR (2010) 主题分类 54B10, 54C10, 54E99
中图法分类 O189.1
文献标志码 A
文章编号 1000-8314(2017)03-0269-08

1 引 言

本文所论空间均是满足 T_2 分离性质的拓扑空间. ω 和 ω_1 分别表示第一个无限基数和第一个不可数的基数.

设 $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是拓扑空间的族. 记 $X=\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$. 令

$$\mathcal{B}=\Big\{\prod_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha : 对每个\ \alpha\in\Lambda,\ U_\alpha\in\tau_\alpha\Big\}.$$

以 $\mathcal{B}$ 作为基生成 X 上的拓扑称为箱拓扑 [1]. 集合 X 赋予箱拓扑称为箱积空间, 记为 $\mathop{\square}\limits_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$. 当每一空间 $X_\alpha=Y$ 且基数 $|\Lambda|=\kappa$ 时, 记 $\mathop{\square}\limits_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha$ 为 $\square Y^\kappa$. 易见, 在有限个拓扑空间的笛卡儿积上, 箱拓扑与积拓扑是一致的; 在任意拓扑空间族的笛卡儿积上, 箱拓扑细于积拓扑, 如 $\square\mathbb{R}^\omega$ 不是第一可数空间.

乘积空间的箱拓扑概念比 Tychonoff 积拓扑概念更早出现 [1]. 由于 Tychonoff 积保持像紧性之类的重要拓扑性质, 但是箱拓扑不保持紧性等, 所以人们更关心 Tychonoff 积 [2]. 令 $D=\{0,1\}$, 赋予离散拓扑. 因为具有点可数 k 网的紧空间是可度量空间 [3], 而 Tychonoff 积空间 D^{ω_1} 是不可度量化的紧空间, 所以 Tychonoff 积空间 D^{ω_1} 不具有点可数 k 网. 如果考虑的笛卡儿积是赋予箱拓扑, 情况发生了很大的变化, 如 $\square D^{\omega_1}$ 具有点可数 k 网 (见定理 3.1). 这引起了我们对于一些广义度量空间类的箱积性质的兴趣.

关于箱积的基本性质, Williams[2] 发表过精美的综述报告, 主要讨论箱积的正规性与仿紧性. 在箱积的研究中, 有两个经典的问题: 一是 Stone 的问题 [4]: $\square(\omega+1)^{\omega_1}$ 是否是正规或仿紧空间? 另一是 van Douwen 的问题 [5]: 不可数个紧 T_2 空间的箱积的 σ 积子空间是否是仿紧空间? 最重要的成果出现于 1996 年. 首先, Lawrence[6] 否定回答了 Stone 的问题, 从而 $\square\mathbb{R}^{\omega_1}$ 不是正规空间. 其次, Nyikos 和 Piątkiewicz[7] 证明了具有有限次乘积

本文 2015 年 6 月 7 日收到, 2016 年 1 月 2 日收到修改稿.
[1]闽南师范大学数学与统计学院, 福建漳州 363000; 宁德师范学院数学研究所，福建宁德 352100.
E-mail: shoulin60@163.com
*本文受到国家自然科学基金 (No. 11471153) 的资助.

(finite subproducts) 为仿紧 T_2 的空间族的箱积的 σ 积子空间是仿紧空间, 从而肯定回答了 van Douwen 的问题. 目前, 在箱积的研究中最重要的未解决问题 [8]: 是否 "$\square(\omega+1)^{\omega}$ 不是仿紧空间" 是相容的? 关于箱积的最新进展, 见 Roitman 和 Williams 的论文 [9].

由于广义度量性质与正规性或仿紧性, 特别与众多的覆盖性质是相互关联的, 所以研究广义度量性质的箱积有助于人们加深对覆盖性质的箱积性质的认识. 这是我们讨论广义度量空间类的箱积性质的原始动力. 为了介绍广义度量空间的箱积定理, 先回忆几个概念.

定义 1.1 设连续的满函数 $f: X \to Y$.

(1) f 称为 proper 或 k 映射 [10], 若 K 是空间 Y 的紧子集, 则 $f^{-1}(K)$ 是空间 X 的紧子集. 度量空间的 proper 映像称为 k 可度量空间[11].

(2) f 称为 subproper 映射[11], 若存在空间 X 的子空间 X', 使得 $f(X')=Y$ 且若 Y 的子集 K, 使得 $\overline{K}$ 是 Y 的紧子集, 则 $\overline{X'\cap f^{-1}(K)}$ 是 X 的紧子集. 度量空间的 subproper 映像称为 k^* 可度量空间[11].

显然, 完备映射 (perfect mappings) 是 proper 映射, proper 映射是 subproper 映射; 度量空间是 k 可度量空间, k 可度量空间是 k^* 可度量空间. Banakh, Bogachev 和 Kolesnikov[11] 说明了 k^* 可度量空间作为一广义度量空间, 其研究动机来源于概率论, 它在集论拓扑、拓扑群、泛函分析和测度论中具有种种的应用. 特别地, Banakh, Bogachev 和 Kolesnikov[11] 证明了 k^* 可度量空间关于箱积运算保持. 这之前在文献中从没见过在一般的箱积上研究广义度量性质. 甚至关于可数箱积的研究也少有见到. Borges[12] 和沈荣鑫、林福财 [13] 讨论了一个空间 X 的可数次箱积 $\square X^{\omega}$ 的 σ 积子空间 $\sigma B(X)$ 的一些广义度量性质. 事实上, 仅以 $\square D^{\omega_1}$ 为例, 就可知大部分的广义度量空间类都不关于箱积运算保持. k^* 可度量空间性质是庞大的广义度量空间类中第一个发现的箱积运算保持性质. 还有哪些广义度量空间类关于箱积运算保持?

虽然 Banakh, Bogachev 和 Kolesnikov[11] 所获得的箱积定理涉及 k^* 可度量空间的性质, 但其本质在于箱积具有的紧有限覆盖性质, 由此我们可以从中抽象出更具有一般性的结果. 本文通过建立一个一般性的定理, 证明箱积保持一些与可度量空间相关的紧可数性质, 由此可导出 k^* 可度量空间的箱积定理.

2 关于箱积的一个一般性定理

拓扑空间中有不少的一般性定理, 其中以 "和定理" 最为著名, 如 "局部有限闭和定理", "可数闭和定理" 等 [14−15]. 可度量性满足局部有限闭和定理, σ 空间性质满足可数闭和定理.

设 X 是一个拓扑空间. X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为紧有限的, 若 X 的每一紧子集与 $\mathcal{P}$ 中至多有限个元相交.

定义 2.1 设 P 是一个拓扑性质.

(1) 称 P 满足紧有限闭和定理 (the compact-finite closed sum theorems), 若空间 X 存在紧有限的闭覆盖 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 使得每一 X_α 具有性质 P, 则 X 也具有性质 P.

(2) 称 P 满足紧有限闭扩张和定理 (the compact-finite sum theorems of closed expansions), 若空间 X 存在紧有限覆盖 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 和它的闭扩张 $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ (即每一 Z_α 是 X 的闭子集且 $X_\alpha\subset Z_\alpha$), 使得每一 Z_α 具有性质 P, 则 X 也具有性质 P.

显然, 紧有限闭扩张和定理蕴含紧有限闭和定理, 紧有限闭和定理蕴含局部有限闭和定理.

本文的主要定理如下.

定理 2.1　设拓扑性质 P 同时满足下述两个性质: (1) 有限可积性; (2) 紧有限闭扩张和定理. 若 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是具有性质 P 的空间族, 则箱积空间 $\mathop{\square}\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ 也具有性质 P.

证　记 $X=\mathop{\square}\limits_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$. 不妨设所有 $X_\alpha\neq\varnothing$. 对于每一 $x=(x(\alpha)),\ y=(y(\alpha))\in X$, 记

$$\{x\neq y\}=\{\alpha\in\Lambda: x(\alpha)\neq y(\alpha)\},$$

$$\sigma(x)=\{y\in X: |\{x\neq y\}|<\omega\}.$$

(1) $\sigma(x)$ 是 X 的闭子空间.

对于每一 $y\in X\setminus\sigma(x)$, 令

$$U_\alpha=\begin{cases}X_\alpha\setminus\{x(\alpha)\}, & \alpha\in\{x\neq y\};\\ X_\alpha, & \text{其它情况},\end{cases}$$

则 $U=\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha$ 是 y 在 X 中的邻域. 如果 $z\in\sigma(x)$, 由于 $\{x\neq y\}$ 是无限集, 则存在 $\beta\in\{x\neq y\}\setminus\{x\neq z\}$, 于是 $z(\beta)=x(\beta)\neq y(\beta)$, 从而 $z\notin U$, 即 $\sigma(x)\cap U=\varnothing$. 故 $\sigma(x)$ 是 X 的闭子空间.

对于每一 $F\subset\Lambda$, 令

$$\sigma_F(x)=\{y\in X: \{x\neq y\}=F\},$$

$$\Pi_F(x)=\{y\in X: \{x\neq y\}\subset F\},$$

则 $\sigma_F(x)\subset\Pi_F(x)$.

(2) 若 $F\in\Lambda^{<\omega}$, 则 $\Pi_F(x)$ 是 $\sigma(x)$ 的具有性质 P 的闭子空间.

显然, $\Pi_F(x)\subset\sigma(x)$ 且 $\Pi_F(x)$ 同胚于有限积空间 $\prod\limits_{\alpha\in F}X_\alpha$. 由于每一 X_α 具有性质 P, 且性质 P 是有限可积性, 于是 $\prod\limits_{\alpha\in F}X_\alpha$ 具有性质 P. 如果 $y\in\sigma(x)\setminus\Pi_F(x)$, 则存在 $\beta\in\{x\neq y\}\setminus F$. 令

$$V_\alpha=\begin{cases}X_\beta\setminus\{x(\beta)\}, & \alpha=\beta;\\ X_\alpha, & \text{其它情况},\end{cases}$$

则 $V=\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}V_\alpha$ 是 y 在 X 中的邻域且 $V\cap\Pi_F(x)=\varnothing$. 这表明 $\Pi_F(x)$ 是 $\sigma(x)$ 的闭子集.

(3) $\{\sigma_F(x): F\in\Lambda^{<\omega}\}$ 是 $\sigma(x)$ 的紧有限覆盖.

显然, $\{\sigma_F(x): F\in\Lambda^{<\omega}\}$ 是 $\sigma(x)$ 的覆盖. 设 K 是 $\sigma(x)$ 的紧子集. 令 $\Lambda_K=\bigcup\limits_{y\in K}\{y\neq x\}$, 则 Λ_K 是 Λ 的有限子集否则Λ_K含有由不同元组成的序列 $\{\alpha_n\}$, 那么存在 K 中的序列 $\{y_n\}$, 使得每一 $\alpha_n\in\{y_n\neq x\}$. 设 y 是序列 $\{y_n\}$ 在 K 中的一个聚点. 因为 $y\in\sigma(x)$, 所以 $\{y\neq x\}$ 是有限集, 不妨设 $\alpha_n\in\{y_n\neq x\}\setminus\{y\neq x\}$, 这时 $y(\alpha_n)=x(\alpha_n)\neq y_n(\alpha_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. 取

$$W_\alpha=\begin{cases}X_{\alpha_n}\setminus\{y_n(\alpha_n)\}, & \alpha=\alpha_n;\\ X_\alpha, & \text{其它情况},\end{cases}$$

则 $W=\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}W_\alpha$ 是 y 在 X 中的邻域且所有的 $y_n\notin W$, 矛盾. 这表明 Λ_K 是 Λ 的有限子集. 若 $F\subset\Lambda$ 且 $K\cap\sigma_F(x)\neq\varnothing$, 取定 $z\in K\cap\sigma_F(x)$, 则 $F=\{z\neq x\}\subset\Lambda_K$. 由 Λ_K 的有限性, 仅有至多有限个 $F\subset\Lambda$, 使得 $K\cap\sigma_F(x)\neq\varnothing$. 故 $\{\sigma_F(x):F\in\Lambda^{<\omega}\}$ 是紧有限的.

对于每一对点 $x,y\in X$, 定义 $x\sim y\Leftrightarrow|\{x\neq y\}|<\omega$, 即 $\sigma(x)=\sigma(y)$. 易验证: $\sim$ 是 X 上的等价关系, $\sigma(x)$ 是由 x 决定的等价类. 记商集 $\Sigma=\{\sigma(x):x\in X\}$.

(4) Σ 是 X 的紧有限覆盖.

若不然, 则存在 X 的紧子集 K 及 X 中互不相同的等价类的列 $\{\sigma(x_n)\}$, 使得对于每一 $n\in\mathbb{N}$, $\sigma(x_n)\cap K\neq\varnothing$. 若 $z\in\sigma(x_n)\cap K$, 则 $\sigma(z)=\sigma(x_n)$, 所以不妨设 $x_n\in K$. 由于 K 的紧性, 设 x 是序列 $\{x_n\}$ 在 K 中的一个聚点. 由于 Σ 是 X 的一个互不相交的覆盖, 不妨设 $x\notin\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\sigma(x_n)$, 于是每一 $\{x_n\neq x\}$ 是无限集, 从而存在 Λ 中由不同元组成的序列 $\{\alpha_n\}$, 使得每一 $x_n(\alpha_n)\neq x(\alpha_n)$. 令

$$G_\alpha=\begin{cases}X_{\alpha_n}\setminus\{x_n(\alpha_n)\}, & \alpha=\alpha_n;\\ X_\alpha, & \text{其它情况},\end{cases}$$

则 $G=\prod\limits_{\alpha\in\Lambda}G_\alpha$ 是 x 在 X 中的邻域且所有的 $x_n\notin G$, 矛盾. 故 Σ 是 X 的紧有限覆盖.

对于每一 $x\in X$, 由性质 P 满足 "紧有限闭扩张和定理" 及 (2) 和 (3), $\sigma(x)$ 具有性质 P. 再由 (1) 及 (4), X 也具有性质 P.

注 2.1 由定理 2.1 的证明可见, 对分离性质仅使用了 T_1 分离公理. 此外, 形如定理 2.1 所述的一般性定理对于 Tychonoff 积是不成立的. 例如, 取 P 为 "紧子集是有限集". 显然, 拓扑性质 P 是有限可积性且满足紧有限闭扩张和定理. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 离散空间 $X_n=\{0,1\}$ 具有性质 P, 但是 Tychonoff 积空间 $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}}X_n=\{0,1\}^\omega$ 不具有性质 P.

下列两个已知的结果作为定理 2.1 的推论. 在引言中介绍过的 k^* 可度量空间有下述等价刻画 (见文 [11, 定理 1.2]): 拓扑空间 X 是 k^* 可度量空间当且仅当存在度量空间 M, 连续的满函数 $f:M\to X$ 和函数 $s:X\to M$ 满足: $f\circ s:X\to X$ 是 X 上的恒等映射 (即 s 是 f 的一个选择), 且若 K 是 X 的具有紧闭包的子集 (即 $\overline{K}$ 是 X 的紧子集, 也称 K 是 X 的 precompact 子集), 则 $s(K)$ 在 M 中也具有紧闭包. Banakh, Bogachev 和 Kolesnikov[11] 还研究了 cs^* 可度量空间. 拓扑空间 X 称为cs^* 可度量空间, 若存在度量空间 M, 连续的满函数 $f:M\to X$ 和函数 $s:X\to M$ 满足: $f\circ s:X\to X$ 是 X 上的恒等映射且若 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中的收敛序列, 则序列 $\{s(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 M 中有聚点. 显然, k^* 可度量空间是 cs^* 可度量空间.

推论 2.1 [11] 下述拓扑性质关于箱积运算保持:

(1) k^* 可度量空间.

(2) cs^* 可度量空间.

因为 k^* 可度量空间性质及 cs^* 可度量空间性质都是可数可积性且满足紧有限闭扩张和定理 (见文 [11, 定理 3.5, 3.9, 4.4]), 所以由定理 2.1, k^* 可度量空间性质及 cs^* 可度量空间性质都是关于箱积运算保持.

为了应用定理 2.1, 主要在于验证紧有限闭扩张和定理. 和定理与映射性质是密切相关的. 如, 关于拓扑和保持且关于有限到一的连续闭映射保持的性质满足局部有限闭和定理 (见文 [14, 定理 5.5.3]).

定理 2.2 考虑拓扑性质 P 的下列条件:

(1) P 关于拓扑和保持;

(2) P 关于 proper 映射保持;

(3) P 关于 subproper 映射保持.

若 P 满足条件 (1) 和 (2), 则 P 满足紧有限闭和定理. 若 P 满足条件 (1) 和 (3), 则 P 满足紧有限闭扩张和定理.

证 仅证明紧有限闭扩张和定理的情形. 设拓扑空间 X 存在紧有限覆盖 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 和它的闭扩张 $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 使得每一 Z_α 具有性质 P, 其中 P 满足条件 (1) 和 (3). 作拓扑和 $M=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$, 其中积空间 $M_\alpha=Z_\alpha\times\{\alpha\}$, $\forall\alpha\in\Lambda$. 由于 P 满足条件 (1), 空间 M 具有性质 P. 定义 $f:M\to X$, 使得 $f(z,\alpha)=z$, $\forall(z,\alpha)\in M_\alpha\subset M$. 显然, f 是连续的满函数. 下面证明 f 是 subproper 映射. 取拓扑和 $M'=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} M'_\alpha$, 其中 $M'_\alpha=X_\alpha\times\{\alpha\}$, $\forall\alpha\in\Lambda$. 则 M' 是 M 的子空间且 $f(M')=X$. 若 X 的子集 K 满足 $\overline{K}$ 是 X 的紧子集, 则 $\Lambda'=\{\alpha\in\Lambda:\overline{K}\cap X_\alpha\neq\varnothing\}$ 是有限的, 且 $K=\bigcup_{\alpha\in\Lambda'} K\cap X_\alpha\subset\bigcup_{\alpha\in\Lambda'} K\cap Z_\alpha$. 由于 $f^{-1}(K)=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(K\cap Z_\alpha)\times\{\alpha\}$, 于是 $M'\cap f^{-1}(K)=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}(K\cap X_\alpha)\times\{\alpha\}=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda'}(K\cap X_\alpha)\times\{\alpha\}\subset\bigoplus_{\alpha\in\Lambda'}(K\cap Z_\alpha)\times\{\alpha\}$. 因为 $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda'}(K\cap Z_\alpha)\times\{\alpha\}$ 是 M 的紧子集, 所以 $\overline{M'\cap f^{-1}(K)}$ 是 M 的紧子集. 从而 f 是 subproper 映射. 由 P 满足条件 (3), 空间 X 具有性质 P. 故 P 满足紧有限闭扩张和定理.

注 2.2 满足紧有限闭和定理的拓扑性质未必满足紧有限闭扩张和定理.

回忆 k 网的定义. 设 $\mathcal{P}$ 是拓扑空间 X 的覆盖. $\mathcal{P}$ 称为 X 的 k 网 [16], 若 $K\subset U$, 其中 K, U 分别是 X 的紧子集与开子集, 则存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{P}'$, 使得 $K\subset\cup\mathcal{P}'\subset U$. 若 k 网 $\mathcal{P}$ 中的每一元都是 X 的闭子集, 则称 $\mathcal{P}$ 是 X 的闭 k 网.

取 P 为性质 “具有点可数闭 k 网”.

(1) P 满足紧有限闭和定理. 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是空间 X 的紧有限闭覆盖, 其中每一 X_α 具有点可数的闭 k 网 $\mathcal{P}_\alpha$. 令 $\mathcal{P}=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_\alpha$. 易验证: $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数的闭 k 网.

(2) P 不满足紧有限闭扩张和定理. 扇空间 S_{ω_1} 是把 ω_1 个非平凡的收敛序列作拓扑和, 将其非孤立点粘成一点所成的商空间 (见文 [14, p. 293]). 记 $S_{\omega_1}=\{\infty\}\cup\bigcup_{\alpha<\omega_1} X_\alpha$, 其中每一 $X_\alpha=\{x_{\alpha,n}:n\in\mathbb{N}\}$ 且序列 $\{x_{\alpha,n}\}_n$ 收敛于点 ∞. 这时, 空间 S_{ω_1} 不具有性质点可数闭 k 网 (见文 [14, p. 293]). 显然, $\{\{\infty\}\}\cup\{X_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是 S_{ω_1} 的紧有限覆盖. 对于每一 $\alpha<\omega_1$, 由于 $\{\infty\}\cup X_\alpha$ 是紧度量空间, 所以 X_α 的闭扩张 $\{\infty\}\cup X_\alpha$ 具有点可数的闭 k 网. 故 P 不满足紧有限闭扩张和定理.

3 广义度量空间的箱积定理

本节探讨定理 2.1 的一些应用.

可数个紧有限集族之并称为 σ 紧有限集族. 空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为紧可数的, 若 X 的每一紧子集与 $\mathcal{P}$ 中至多可数个元相交. 显然, σ 紧有限集族是紧可数集族. 紧可数集族是点可数集族.

设 $\mathcal{P}$ 是拓扑空间 X 的子集族. 对于 $A\subset X$, 记 $\mathcal{P}|_A=\{P\cap A:P\in\mathcal{P}\}$.

定理 3.1 下述拓扑性质关于箱积运算保持:

(1) 具有 σ 紧有限 k 网的空间.

(2) 具有紧可数 k 网的空间.

(3) 具有 σ 点有限 k 网的空间.

(4) 具有点可数 k 网的空间.

(5) 紧子集可度量化的空间.

证 显然, 性质 (1)–(5) 都是有限可积性. 为证明它们关于箱积运算保持, 由定理 2.1, 只须证明它们均满足紧有限闭扩张和定理. 分下列两种情形证明.

情形 1 性质 (1)–(2), (5) 被 subproper 映射所保持.

设 $f: X \to Y$ 是 subproper 映射, 则存在空间 X 的子空间 X', 使得 $f(X') = Y$ 且若空间 Y 的子集 K, 使得 $\overline{K}$ 是 Y 的紧子集, 则 $\overline{X' \cap f^{-1}(K)}$ 是 X 的紧子集.

先证明 (1) 被 subproper 映射所保持. 设空间 X 具有 σ 紧有限 k 网. 让 $\mathcal{P}$ 是 X 的 σ 紧有限 k 网, 下面证明 $f(\mathcal{P}|_{X'})$ 是 Y 的 σ 紧有限 k 网. 对于 $P \in \mathcal{P}$ 和 $K \subset Y$, 易验证: 若 $f(P \cap X') \cap K \neq \varnothing$, 则 $P \cap \overline{X' \cap f^{-1}(K)} \neq \varnothing$. 于是, 由 $\mathcal{P}$ 是 X 的 σ 紧有限集族知 $f(\mathcal{P}|_{X'})$ 也是 Y 的 σ 紧有限集族. 设 $K \subset U$, 其中 K, U 分别是 Y 的紧子集与开子集, 则 $\overline{X' \cap f^{-1}(K)} \subset f^{-1}(K) \subset f^{-1}(U)$, 所以存在 $\mathcal{P}$ 的有限子集 $\mathcal{P}'$, 使得 $\overline{X' \cap f^{-1}(K)} \subset \cup\mathcal{P}' \subset f^{-1}(U)$, 于是 $X' \cap f^{-1}(K) \subset \cup(\mathcal{P}'|_{X'}) \subset f^{-1}(U)$, 从而 $K \subset \cup f(\mathcal{P}'|_{X'}) \subset U$. 故 $f(\mathcal{P}|_{X'})$ 是 Y 的 σ 紧有限 k 网.

(2) 的证明与 (1) 类似. 下面证明 (5) 被 subproper 映射所保持. 设空间 X 的每一紧子集可度量化. 若 K 是空间 Y 的紧子集, 由于 $\overline{X' \cap f^{-1}(K)}$ 是 X 的紧子集, 于是 $\overline{X' \cap f^{-1}(K)}$ 是 X 的紧可度量化的子集. 因为 f 的连续性, 所以 $f(\overline{X' \cap f^{-1}(K)})$ 是 Y 的紧可度量化的子集. 又因为 $K = f(X' \cap f^{-1}(K)) \subset f(\overline{X' \cap f^{-1}(K)})$, 从而 K 是 Y 的可度量化的子集.

由定理 2.2, 性质 (1)–(2), (5) 都满足紧有限闭扩张和定理.

情形 2 性质 (3)–(4) 满足紧有限闭扩张和定理.

仅证明 (4) 成立. 即设空间 X 具有紧有限覆盖 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 如果 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 存在闭扩张 $\{Z_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, 使得每一 Z_α 具有点可数 k 网, 则 X 也具有点可数 k 网.

对于每一 $\alpha \in \Lambda$, 让 $\mathcal{Q}_\alpha$ 是子空间 Z_α 的点可数 k 网. 令 $\mathcal{Q} = \bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} \mathcal{Q}_\alpha|_{X_\alpha}$, 由 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 的点有限性, 则 $\mathcal{Q}$ 是 X 的点可数集族. 下面验证 $\mathcal{Q}$ 还是 X 的 k 网. 对于每一 $K \subset U$, 其中 K, U 分别是 X 的紧子集与开子集, 令 $\Lambda' = \{\alpha \in \Lambda : K \cap X_\alpha \neq \varnothing\}$, 则 Λ' 是有限的且 $K = \bigcup\limits_{\beta\in\Lambda'} K \cap X_\beta$. 对于每一 $\beta \in \Lambda'$, 由于 $\mathcal{Q}_\beta$ 是 Z_β 的 k 网且紧子集 $K \cap Z_\beta \subset U \cap Z_\beta$, 存在有限的 $\mathcal{Q}'_\beta \subset \mathcal{Q}_\beta$, 使得 $K \cap Z_\beta \subset \cup\mathcal{Q}'_\beta \subset U \cap Z_\beta$, 于是 $K \cap X_\beta \subset \cup(\mathcal{Q}'_\beta|_{X_\beta}) \subset U \cap X_\beta$. 令 $\mathcal{Q}' = \bigcup\limits_{\beta\in\Lambda'} \mathcal{Q}'_\beta|_{X_\beta}$, 则 $\mathcal{Q}'$ 是 $\mathcal{Q}$ 的有限子集且 $K \subset \cup\mathcal{Q}' \subset U$. 故 X 具有点可数 k 网.

定理 3.1 中所涉及的 “k 网” 概念是拓扑学中广泛使用的 “网” 概念的加强. 在拓扑学中, 也常讨论 “网” 的其它一些加强形式 [17]. 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs 网 [18], 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域, 则存在 $P \in \mathcal{P}$, 使得序列 $\{x_n\}$ 终于 P 且 $P \subset V$.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs^* 网 [19], 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x 且 V 是 x 在 X 中的邻域, 则存在 $P \in \mathcal{P}$, 使得序列 $\{x_n\}$ 的某子序列终于 P 且 $P \subset V$.

形如定理 3.1, 我们还可讨论具有特定的网空间, 具有特定的 cs 网空间, 或具有特定的 cs^* 网空间等的箱积运算性质. 由于可以用与定理 3.1 类似的方法处理, 本文不再论述. 此外, 如何建立更多的广义度量空间类的箱积定理, 同时如何从已获得了广义度量空间类的箱积定理中导出箱积的覆盖性质更值得进一步的研究.

致谢 作者对本文评审人提出的修改意见表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] Engelking R. General topology (revised and completed edition) [M]. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.

[2] Williams S W. Box products [C]. Kunen K, Vaughan J E (eds), Handbook of Set-theoretic Topology, Amsterdam: North-Holland, 1984:169–200.

[3] Gruenhage G, Michael E A, Tanaka Y. Spaces determined by point-countable covers [J]. *Pacific J Math*, 1984, 113(2):303–332.

[4] Knight C J. Box topologies [J]. *Quart J Math*, 1964, 15:41–54.

[5] van Douwen E K. The box product of countably many metrizable spaces need not be normal [J]. *Fund Math*, 1975, 88:127–132.

[6] Lawrence L B. Failure of normality in the box product of uncountably many real lines [J]. *Trans Amer Math Soc*, 1996, 348:187–203.

[7] Nyikos P, Piątkiewicz L. Paracopmact subspaces in the box product topology [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1996, 124:303–314.

[8] Roitman J. Box products of one point compactifications and related results [J]. *Topology Proc*, 2014, 44:197–206.

[9] Roitman J, Williams S. Paracompactness, normality, and related properties of topologies on infinite products [J]. *Topology Appl*, 2015, 195:79–92.

[10] Halfar E. Compact mappings [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1957, 8:828–830.

[11] Banakh T, Bogachev V, Kolesnikov A. k^*-metrizable spaces and their applications [J]. *J Math Sci*, 2008, 155(4):475–522.

[12] Borges C J R. Direct sums of stratifiable spaces [J]. *Fund Math*, 1978, 100(2):97–99.

[13] Shen R X, Lin F C. Weak quasi-first-countable spaces and box products [J]. *Bull Malays Math Sci Soc*, 2014, 37:845–851.

[14] 高国士. 拓扑空间论 [M]. 第二版, 北京: 科学出版社, 2008.

[15] Hodel R E. Sum theorems for topological spaces [J]. *Pacific J Math*, 1969, 30:59–65.

[16] O'Meara P. On paracompactness in function spaces with the compact-open topology [J]. *Proc Amer Math Soc*, 1971, 29(1):183–189.

[17] 林寿. 点可数覆盖与序列覆盖映射 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.

[18] Guthrie J A. A characterization of $\aleph_0$-spaces [J]. *General Topology Appl*, 1971, 1:105–110.

[19] Gao Z M. ℵ-space is invariant under perfect mappings [J]. *Questions Answers in General Topology*, 1987, 5(2):271–279.

The Compact-Finite Families in Box Products

LIN Shou[1]

[1]School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou 363000, Fujian, China. Institute of Mathematics, Ningde Normal University, Ningde 352100, Fujian, China. E-mail: shoulin60@163.com

Abstract The study on normality or paracompactness in box products is an extremely difficult question in general topology. In this paper, a box product theorem on generalized metric spaces is established by compact-finite sum theorems of closed expansions. It follows that k^*-metrizable spaces, spaces with point-countable k-networks are preserved by box products.

Keywords Box products, Compact-finite families, Subproper mappings, k^*-metrizable spaces, k-networks

2010 MR Subject Classification 54B10, 54C10, 54E99