第6卷第4期　　苏州大学学报（自然科学）　　Vol.6 No.4
1990年10月　JOURNAL OF SUZHOU UNIVERSITY (NATURAL SCIENCE)　Oct. 1990

关于一般性定理的注记*

林　寿
（宁德师专，福建）

摘　要：本文建立拓扑空间论中的两个一般性定理，它们改进了高国士等的一些定理。

关键词：K-网，基，紧复盖映射，遗传闭包保持族。

建立拓扑空间理论中的一般性定理是当前拓扑空间理论研究中的重要课题之一。在[1]中高国士从映射性质、复盖性质和局部性质的角度综述了拓扑空间理论中的一般性定理，在[2]中高国士又给出了k-网和基关系的一般性定理。受上述论文的启发，本文给出两个一般性定理，前者得到了[2]中相应结果的另一充份条件，后者改进了[3]和[4]中的一些相应结果。特别地，作为这些一般性定理的推论，我们得到了如下三个结论：(1)如果一个强$Fréchet$空间是M_1-空间在拟开闭映射下的象，那么它是一个M_1-空间。(2)$\aleph$-空间满足点可数且遗传闭包保持闭和定理。(3)k-半分层空间、紧式仿紧空间（*mesocompactspace*）满足遗传闭包保持闭和定理。

1　关于k—网和基

空间X的集族$\mathscr{F}$称为X的k-网，如果对X的任一紧子集K及X的含K的开集U存在$\mathscr{F}$的有限子族$\mathscr{F}'$使$K\subset\cup\mathscr{F}'\subset U$。空间$X$称为强$Fréchet$空间（*Strongly Fréchet space*），如果$\{A_n\}$是X中下降的集列且$x\in\cap\{\overline{A}_n: n\in N\}$，那么存在$x_n\in A_n$使序列$\{x_n\}$收敛于点$x$。空间$X$称为$Fréchet$空间，如果对于$X$的任意子集$A$及点$x\in\overline{A}$存在$x_n\in A$使序列$\{x_n\}$收敛于点$x$。熟知第一可数空间是强$Fréchet$空间，而强$Fréchet$空间是$Fréchet$空间。

定理1　设具有性质($\mathscr{Q}$)的集族$\mathscr{F}_i$满足：

(1) $\mathscr{F}_i$中元素的任意并组成的集族具有性质($\mathscr{Q}$)；

(2) 对于$n\in N$，$\cup\{\mathscr{F}_i: i\leqslant n\}$具有性质($\mathscr{Q}$)；

(3) $\mathscr{F}_i^0=\{F^0: F\in\mathscr{F}_i\}$具有性质($\mathscr{Q}$)。

如果X是具有σ-($\mathscr{Q}$)-k-网$\cup\{\mathscr{F}_i: i\in N\}$的强$Fréchet$空间，则空间$X$具有$\sigma$-($\mathscr{Q}$)-基。

收稿日期：1988—06—07
*　福建省教委科学基金资助课题

证　设$\cup\{\mathscr{F}_i: i\in N\}$是强Fréchet空间$X$的$k$-网，其中每一$\mathscr{F}_i$是$X$的具有性质($\mathscr{Q}$)的集族且满足定理的条件(1)、(2)和(3)．由条件(1)和(2)可设每一$\mathscr{F}_i$关于任意并封闭且$\mathscr{F}_i\subset\mathscr{F}_{i+1}$．由条件(3)$\cup\{\mathscr{F}_i^0: i\in N\}$是$X$的σ-($\mathscr{Q}$)集族，下面证明它是$X$的基．对于$X$的任一点$x$及$X$中含点$x$的开集$U$，令

$$F_n=\cup\{F\in\mathscr{F}_n: F\subset U\},\quad n\in N,$$

那么$F_n\subset U$且$F_n\in\mathscr{F}_n$．如果对于任意自然数n有$x\in X\backslash F_n^0$那么$x\in(X\backslash F_n^0)\cap U\subset\overline{U\backslash F_n}$．因为$\{U\backslash F_n\}$是$X$中下降的集列,而$X$是强Fréchet空间，所以存在$x_n\in U\backslash F_n$使序列$\{x_n\}$收敛于点$x$，由于紧子集$K=\{x\}\cup\{x_n: n\in N\}$含于开集$U$中，于是存在自然数$m$和$F\in\mathscr{F}_m$使$K\subset F\subset U$．从$F_m$的定义知$F\subset F_m$，故$x_m\in F_m$，这是一个矛盾．因而存在自然数$n$使$x\in F_n^0\subset U$，故$\cup\{\mathscr{F}_i: i\in N\}$是$X$的σ-($\mathscr{Q}$)-基．证毕．

定理1中要求X是强Fréchet空间的条件不可减弱为只要求X是一个Fréchet空间．取X是一个不可度量化、Fréchet、具有可数k-网的正则空间(例如R/N)，记X的可数k-网为$\{F_i: i\in N\}$，让$\mathscr{F}_n=\{F_i: i\leqslant n\}$并且定理1中的性质($\mathscr{Q}$)取为"有限性"．这时每一$\mathscr{F}_n$满足定理1中的条件(1)、(2)和(3)，$X$是一个具有σ-有限$k$-网$\cup\{\mathscr{F}_n: n\in N\}$的Fréchet空间，但是空间$X$不具有σ-有限基，即$X$不具有可数基，因为$X$是不可度量化的正则空间．强Fréchet空间与$r$一空间是两个不相关的概念，文[2]中的定理1及其推论1—推论4以及定理2中都要求X是一个"正则r-空间"．这里都可以改写为要求X是一个"正则强Fréchet空间"，特别地，文[5]的定理2也可改写如下．

推论2　设$f: X\to Y$是一个从M_1-空间X到强Fréchet空间Y上的拟开闭映射，那么Y是一个M_1-空间．

2 关于映射与和定理

本节中所有空间至少假定满足T_1分离性公理，映射指连续的满映射。映射$f: X\to Y$称为紧复盖映射，如果Y的任一紧子集是X中某一紧子集在f下的象．

定理3　设拓扑属性$\mathscr{P}$满足下列二条件：

(1) 关于互不相交拓扑和保持；

(2) 关于(可数对一的)紧复盖闭映射保持，

则$\mathscr{P}$满足(点可数且)遗传闭包保持闭和定理．

证　设集族$\{X_a: a\in A\}$是拓扑空间X的一个(点可数且)遗传闭包保持的闭复盖，并且每一X_a具有拓扑属性$\mathscr{P}$．让$Z=\oplus\{X_a: a\in A\}$表示子空间族$\{X_a: a\in A\}$的互不相交的拓扑和，$q: Z\to X$是一个自然映射．由条件(1)知空间Z具有性质$\mathscr{P}$．因为$\{X_a: a\in A\}$是空间X的(点可数且)遗传闭包保持闭复盖，所以q是(可数对一的)闭映射．下面证明q是一个紧复盖映射．设K是X的一个非空紧子集，那么存在A的有

限子集B使$K\subset\cup\{X_a: a\in B\}$。若不然，那么对于$A$的任何有限子集$B$，$K\setminus\cup\{X_a: a\in B\}$不是有限集。由于$\{X_a: a\in A\}$是$X$的复盖，存在$a_1\in A$使$K\cap Xa_1\neq\phi$，取定$x_1\in K\cap Xa_1$。一般地，设已选取了$A$的有限子集$\{a_i: i\leqslant k\}$和$K$的有限子集$\{x_i: i\leqslant k\}$使$x_1\in K\cap Xa_1$，且对于$i\in\{2,3,\cdots,k\}$有$x_i\in K\cap Xa_i\setminus\{x_1,x_2,\cdots,x_{i-1}\}$。现在$K\setminus\cup\{Xa_i: i\leqslant k\}$不是有限集，于是有$x_{k+1}\in(K\setminus\cup\{Xa_i: i\leqslant k\})\setminus\{x_i: i\leqslant k\}$,
这时有$a_{k+1}\in A$使$x_{k+1}\in Xa_{k+1}$，显然a_{k+1}不同于a_1，a_2，…，a_k。这样我们得到了A的无限子集$\{a_i: i\in N\}$和X的无限子集$\{x_i: i\in N\}$使$x_i\in K\cap Xa_i$。由于$\{Xa_i: i\in N\}$是X的遗传闭包保持闭集族，于是$\{x_i: i\in N\}$是X的离散闭子集，这与K的紧性相矛盾，所以存在A的有限子集B使$K\subset\cup\{X_a: a\in B\}$。置

$$L=\oplus\{K\cap Xa: a\in B\},$$

那么L是Z的紧子集且$q(L)=K$。因而q是一个紧复盖映射。上面的论证说明了空间X是具有性质$\mathscr{P}$的空间Z在(可数对一的)紧复盖闭映射q下的象，由条件(2)知空间X具有性质$\mathscr{P}$，所以拓扑属性$\mathscr{P}$满足(点可数且)遗传闭包保持闭和定理。证毕。

具有σ-局部有限闭k-网的空间称为$\aleph$-空间(不要求正则性)，文[6]定理2.2事实上证明了具有Lindelöf纤维的紧复盖闭映射保持$\aleph$-空间性质，由定理3，我们有下列$\aleph$-空间的和定理。

推论4　$\aleph$-空间性质满足点可数且遗传闭包保持闭和定理。

Gittings[7]例4.1构造了一个度量空间M和一个至多二对一的开映射f使$f(M)=X$是非正规的完全正则空间。由于开映射保持第一可数性公理，并且满足第一可数性公理的正则$\aleph$-空间是可度量化空间([8]定理1)，因而X不是一个$\aleph$-空间。又由于度量空间在有限对一开映射下的象是可数多个闭度量子空间之并([9]定理1.1)，所以X可表为一列上升的闭度量子空间(从而是$\aleph$-空间)的并。所以$\aleph$-空间不满足可数闭和定理。又因为上升的闭复盖总是闭包保持的，所以$\aleph$-空间也不满足(局部可数且)闭包保持闭和定理。此外，我们构造下面的例。对于$\alpha<\omega_1$，让I_α是单位区间$I=[0,1]$的考贝。选取$x_\alpha\in I_\alpha$，令X是所有I_α的互不相交拓扑和，即$X=\oplus\{I_\alpha: \alpha<\omega_1\}$，那么$X$是可度量化空间，而$A=\{x_\alpha: \alpha<\omega_1\}$是$X$的闭子空间，于是商映射$q: X\to X/A$是闭映射且$\alpha(q^{-1}(\{A\}))=A$不是$X$的Lindelöf子空间。故$X/A$不具有点可数闭$K$-网([10]命题6.4)，从而$X/A$不是一个$\aleph$-空间。但是，对于$\alpha>\omega_1$，由于$q(I_\alpha)$是$X/A$的度量子空间，因而它是$X/A$的$\aleph$-子空间，又由于$\{I_\alpha: \alpha<\omega_1\}$是$X$的离散闭复盖，于是$\{q(I_\alpha): \alpha<\omega_1\}$是$X/A$的遗传闭包保持闭复盖。因而非$\aleph$-空间$X/A$存在由$\aleph$-子空间组成的按点$\omega_1$且遗传闭包保持闭复盖，故$\aleph$-空间不满足按点$\omega_1$且遗传闭包保持闭和定理。以上的例说明推论4的结果是当前最好的。

关于紧复盖映射和闭映射之间的关系，目前我们只知道在一定的条件下闭映射是紧复盖映射([11])，而有些空间类并不满足这些条件。例如，K-半分层空间、紧式仿紧空间都被紧复盖的闭映射保持([12]，[13])，但是它们是否能被闭映射保持还是未解决的问题，由定理3我们有下列和定理。

推论5 K-半分层空间性质、紧式仿紧性满足遗传闭包保持闭和定理.

本文的部分内容是作者硕士学位论文的一部分，在此对我的导师高国士教授表示感谢.

参 考 文 献

1 高国士. 拓扑空间理论中的一般性定理. 苏州大学学报（自然科学版），1985；（1）：1—7

2 高国士. 关于K-网和基. 苏州大学学报(自然科学版)，1986；（2）：107—111

3 高国士. 关于闭包保持和定理. 数学学报，1986；29：58—62

4 Singal M K, Arya S P. On the Closure-preserving Sum theorem. Proc. AMS., 1975；53：518—522

5 高国士. 关于M_1-空间的又一注记. 数学研究与评论，1985；（4）：47—48

6 Lin shou(林寿). Mapping theorems on ℵ-spaces.（待发表于Top. Appl.）

7 Gittings R F. Open mapping theory, set—Theoretic Topology. Academic Press, 1977；141—191

8 O'Meara P. A metrization theorem. Math. Nachr., 1970；45：69—72

9 Chaber J. Open finite-to-one images of metric spaces. Top. Appl 1982；14：241—246

10 Gruenhage G, Michael E, Tanaka Y. spaces determined by Point-countable covers. Pacific J. Math., 1984；113：303—332

11 高国士. 两个映射定理. 数学年刊，1986；7 A：666—669

12 Lutzer DJ. Semimetrizable and stratifiable spaces. Gen. Top. Appl., 1971；1:43—48

13 Kao K S, Wu L S(高国士、吴利生). Mapping theorems On mesocompact Spaces. Proc. AMS., 1983；89：355—358

A NOTE ON THE GENERALITY THEOREM

Lin Shou

(Ningde Teachers' College)

Abstract: In this note two generality theorems on topological space theory are established, they improve several theorems of Gao Guoshi.

Keywords: K-network, base, compact-covering mapping, hereditarily closure-preserving family. （本文责任编辑 董张维）