第44卷第4期 数 学 进 展 Vol.44, No.4
2015年7月 ADVANCES IN MATHEMATICS(CHINA) July, 2015

doi: 10.11845/sxjz.2014008a

关于点离散集族的研究

林 寿[1,2,*], 沈荣鑫[3,**]

(1. 闽南师范大学数学与统计学院, 漳州, 福建, 363000; 2. 宁德师范学院数学研究所, 宁德, 福建, 352100; 3. 泰州学院数理学院, 泰州, 江苏, 225300)

摘要: 本文以度量化定理的现代发展为脉络, 综述了近十年来有关点离散集族的主要研究成果, 重点介绍具有 σ 点离散基的空间和具有各种 σ 点离散网络的空间类, 以及它们与具有各种 σ 紧有限网络的空间类之间的关系.

关键词: 点离散集族; 紧有限集族; 广义度量空间; k 网; 弱基

MR(2010) 主题分类: 54C10; 54D20; 54D70; 54E30; 54E40 / **中图分类号:** O189.1

文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2015)04-0481-11

0 引言

1914 年, Hausdorff (德, 1868–1942) 出版了影响深远的著作 “Grundzüge der Mengenlehre” (《集论基础》)[24], 发展了 Hilbert (德, 1862–1943), Weyl (德, 1885–1955), Fréchet (法, 1878–1973), Riesz (匈, 1880–1956) 等研究几何问题或抽象空间问题的一系列方法, 给出了以邻域系为基础的拓扑空间的定义, 并由此展开了一些重要拓扑空间的研究, 其中以 Hausdorff 空间和 Hausdorff 度量最为著名 [10]. 这标志着一般拓扑学的诞生, Hausdorff 也因此成为一般拓扑学的奠基人 (见 [4, 57]). 一般拓扑学作为一门独立的数学分支, 获得了充分的发展, 同时对数学及相关学科的进步起积极的促进作用 [22−23]. 我们撰写本文献给一般拓扑学的百年诞辰, 同时纪念近期去世的国内外几位一般拓扑学名家: Mary Ellen Rudin (美, 1924–2013), Ernest A. Michael (美, 1925–2013), 方嘉琳 (1925–2014), 王国俊 (1935–2013).

一直以来, 可度量性及紧性是一般拓扑学的两大中心议题 [1, 23]. 1925 年, Urysohn (俄, 1898–1924) 成功地将具有可数基的正则空间嵌入到希尔伯特方体中, 从而证明了该空间类是可度量化的 [55]. 1950–1951 年, Bing (美, 1914–1986), Nagata (日, 1925–2007) 和 Smirnov (俄, 1921–2007) 分别独立地给出了拓扑空间可度量化的充要条件, 建立了下面著名的度量化定理, 现称之为 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理.

定理 0.1 对正则空间 X, 下述条件等价:

(1) X 是可度量化空间.

(2) X 具有 σ 离散基 [5].

(3) X 具有 σ 局部有限基 [48, 54].

收稿日期: 2014-10-05.
基金项目: 国家自然科学基金 (No. 11471153, No. 11201414) 和江苏省自然科学基金 (No. BK20140583).
E-mail: * shoulin60@163.com; ** srx20212021@163.com

度量化定理的进一步发展主要体现在对局部有限集族和基的各种推广, 这导致许多重要广义度量空间类的产生, 从而有力地推动了 20 世纪 70–80 年代广义度量空间理论的蓬勃发展 [9, 16].

拓扑空间中的紧有限集族和闭包保持集族是局部有限集族的两种自然的推广. 空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为是*紧有限的*[6], 如果 X 中每一紧集至多与 $\mathcal{P}$ 中有限个集合相交; $\mathcal{P}$ 称为是*闭包保持的*[45], 如果对任意的 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$, 有 $\overline{\bigcup\{P : P \in \mathcal{P}'\}} = \bigcup\{\overline{P} : P \in \mathcal{P}'\}$. 易见, 每一局部有限集族都是紧有限集族和闭包保持集族. 1971 年, Boone[6] 证明了具有 σ 紧有限基的正则空间是可度量化的. 但是, 早在 1957 年, Michael[45] 就指出具有 σ 闭包保持基的正则空间未必是可度量空间. 遗传闭包保持集族介于局部有限集族与闭包保持集族之间. 空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为是*遗传闭包保持的*[25], 如果对任意的 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ 和 $H(P) \subset P \in \mathcal{P}'$, 有 $\overline{\bigcup\{H(P) : P \in \mathcal{P}'\}} = \bigcup\{\overline{H(P)} : P \in \mathcal{P}'\}$, 即集族 $\{H(P) : P \in \mathcal{P}\}$ 是闭包保持的. 1975 年, Burke 等 [8] 证明了具有 σ 遗传闭包保持基的正则空间是可度量化的. 1986 年, 蒋继光 [15] 引进了线性遗传闭包保持集族的概念, 建立了具有 σ 线性遗传闭包保持基的空间的度量化定理. 上述的一系列结果都直接推广了 Bing-Nagata-Smirnov 度量化定理. 在 [8] 中, Burke 等引入并进一步研究了遗传闭包保持集族的一种推广, 他们称之为*弱遗传闭包保持集族* (weakly hereditarily closure-preserving families). 2008 年, 在 Arhangel'skiĭ 的建议下, 刘川等 [43] 将此类集族改称为点离散集族 (point-discrete families). 空间 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 称为是*点离散的*[8, 43], 如果对任意的 $x(P) \in P \in \mathcal{P}$, $\{x(P) : P \in \mathcal{P}\}$ 是一个闭离散集. 显然, T_1 空间中的遗传闭包保持集族都是点离散的. Burke 等 [8] 给出反例说明存在具有 σ 点离散基的不可度量化的正则空间, 并证明了具有 σ 点离散基的正则 k 空间是可度量化的, 开启了研究点离散集族的先河.

在基的推广方面, 继 1959 年 Arhangel'skiĭ[2] 引入网络的概念后, 一些拓扑学名家先后引入多个特殊网络的概念 (如 k 网, 弱基等), 从而定义了众多耳熟能详的空间类, 如 cosmic 空间、σ 空间、$\aleph$ 空间、g 可度量空间等, 极大地丰富和发展了广义度量空间理论, 相关研究的进展情况及系统论述请参考 [16–18, 36]. 尽管对于具有各种 σ 离散 (σ 局部有限、σ 遗传闭包保持、σ 闭包保持) 网络的空间的研究已在 20 世纪 90 年代中期完成, 然而具有各种 σ 点离散网络的空间的研究大多在近 10 年才开展, 期间国内学者投入了大批的力量, 构成了一般拓扑学的重要增长点, 获得了可喜的成就, 并引起了国外学者的关注 [7]. 这些研究成果散见于各种期刊杂志, 使初涉相关领域的研究者很难窥其全貌. 近期, Gruenhage[20] 撰写的关于广义度量空间的最新综述报告亦少有涉及. 为此, 本文将有关点离散集族的研究成果整理分类, 并加以综述, 同时列举一些尚未得到解决的问题, 供有志于从事相关领域的研究者参考.

本文中所有空间都假设至少是 Hausdorff 的拓扑空间, 所有映射都是连续且满的.

1 具有 σ 点离散基的空间

首先介绍两个具有 σ 点离散基且不可度量化的正则空间, 它们是研究点离散集族的原始动力. 拓扑空间 X 称为是*亚 Lindelöf 空间*, 如果 X 的每一开覆盖具有点可数的开加细覆盖. 仿紧空间和具有点可数基的空间都是亚 Lindelöf 的.

例 1.1[7] 存在具有 σ 点离散基的完全正则空间, 使其不是亚 Lindelöf 的.

例 1.2[8] 存在具有 σ 点离散基的遗传仿紧空间, 使其不可度量化.

从以上两例可以看出点离散集族和遗传闭包保持集族在性质上有很大的区别: 具有 σ 点离

散基的正则空间不仅不可度量化, 甚至不满足亚 Lindelöf 这种弱覆盖性质; 即使附加很强的覆盖性质, 也不足以使具有 σ 点离散基的空间可度量化. 对于具有 σ 点离散基的正则空间在何种条件下可度量化, Burke 等 [8] 先后给出一些充要条件.

拓扑空间 X 称为 k 空间, 若对任意 $A \subset X$, A 是 X 中的闭集当且仅当对 X 中每一紧集 K, $K \cap A$ 闭于 K; X 称为*具有可数 tightness*, 若对任意 $x \in \overline{A} \subset X$, 存在可数集 $C \subset A$ 使得 $x \in \overline{C}$; X 称为 *q 空间*, 若对每一 $x \in X$, 存在 x 的可数开邻域族 $\{U_n(x) : n \in \omega\}$ 使得满足 $x_n \in U_n(x)$ 的序列 $\{x_n\}$ 总有聚点. 对 $x \in X$, 称 $\chi(x, X) = \min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B}$ 是 x 在 X 中的邻域基 $\}$ 为 *x 在 X 中的特征*, 称 $\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$ 是 *X 的特征*.

所有第一可数空间, 即具有可数特征的空间, 是 k 空间、q 空间且具有可数 tightness. 但是 k 空间性质、q 空间性质、可数 tightness 互不蕴涵 [46].

定理 1.1 设正则空间 X 具有 σ 点离散基, 则下述条件等价:

(1) X 是可度量空间.

(2) X 是 k 空间 [8].

(3) X 具有可数 tightness[44].

(4) X 是 q 空间 [44].

(5) $\chi(X) < \aleph_\omega$ (见 [44]).

由上述定理可知, 例 1.1 和例 1.2 构造的具有 σ 点离散基的空间既不是 k 空间或 q 空间, 也不具有可数 tightness. 再由定理 1.1 的 (3) 和 (4) 可知, 可分的或可数紧的正则空间如果具有 σ 点离散基, 则其可度量化 [44].

问题 1.1[43] 具有 σ 点离散基且满足可数链条件的正则空间是否一定是可度量空间?

问题 1.2[43−44] 具有 σ 点离散基的正则的伪紧空间是否一定是可度量空间?

具有 σ 点离散基的空间的性质是丰富多彩的. 空间 (X, τ) 的邻域指派是指一个函数 $\phi : X \to \tau$, 满足 $x \in \phi(x)$ $(\forall x \in X)$. X 称为 *D 空间*[56], 如果对 X 的每一邻域指派 ϕ, 存在 X 的闭离散集 D 使得 $\{\phi(d) : d \in D\}$ 覆盖 X. D 空间是近 10 年来一般拓扑学研究的热点空间, 国内学者做出了突出的贡献 [19].

定理 1.2[44] 每一具有 σ 点离散基的正则空间都是 D 空间.

映射 $f : X \to Y$ 称为*紧覆盖映射*, 若空间 Y 的每一紧子集是空间 X 中某紧子集关于 f 的映像. 关于紧覆盖映射的经典结果是度量空间上的闭映射是紧覆盖映射 [46].

定理 1.3[44] 每一具有 σ 点离散基的正则空间上的闭映射都是紧覆盖映射.

度量空间的每一点具有可数特征. 具有 σ 点离散基的空间的每一点的特征有下述性质, 它对刻画乘积性质起关键的作用.

定理 1.4[7] 如果空间 X 具有 σ 点离散基, 则对 X 中每一非孤立点 x, $\chi(x, X)$ 具有可数共尾数.

定理 1.5[7] 设空间 X 和 Y 都具有 σ 点离散基, 则 $X \times Y$ 具有 σ 点离散基当且仅当对 X 和 Y 中非孤立点 x 和 y, 总有 $\chi(x, X) = \chi(y, Y)$.

然而, 具有 σ 点离散基的空间的乘积性质与映射性质却逊色于具有 σ 局部有限基的空间.

例 1.3[7] 存在具有 σ 点离散基的正则空间 X 与 Y, 使得 $X \times Y$ 不具有 σ 点离散基.

例 1.4[43] 存在正则空间 X, X 的任意有限次乘积具有 σ 点离散基, 但是 X^ω 不具有 σ 点离散基.

例 1.5[7] 完备映射不保持具有 σ 点离散基的空间.

拓扑空间 X 称为*具有点 G_δ 性质*或*具有可数伪特征*, 若 X 中的每一单点集是 X 的 G_δ 集. 蒋继光 [15] 证明了具有 σ 线性遗传闭包保持基的正则空间是可度量化的当且仅当它具有可数伪特征. 下述问题是本节中最有趣的问题, 如果它的回答是肯定的, 则问题 1.2 的回答也是肯定的.

问题 1.3[43–44] 具有 σ 点离散基的正则空间是否一定具有点 G_δ 性质?

2 k 网与相关网络

网络和 k 网是广义度量空间理论的中心概念 [16, 47]. 20 世纪 70–90 年代, 一批一般拓扑学家把 k 网概念中的紧集用适当的收敛序列来代替, 先后引入了 cs 网, cs^* 网和 wcs^* 网等概念. 时至今日, 这些网络已被证明在广义度量空间理论中, 尤其是在刻画度量空间的各种映像及拓扑代数的研究中发挥了重要的作用 [27, 35]. 关于具有 σ 局部有限, σ 闭包保持或 σ 遗传闭包保持网络 (k 网, cs 网, cs^* 网, wcs^* 网) 的空间类的系统研究可以参见 [16, 35–36]. 下面我们主要介绍 2000 年以来具有这些 σ 点离散网络的空间类的研究进展.

定义 2.1 设 $\mathcal{P}$ 是拓扑空间 X 的一个覆盖.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的一个*网络* 或简称 *网*[2], 如果对 X 中的任意开集 U 和 $x \in U$, 存在 $P \in \mathcal{P}$, 使得 $x \in P \subset U$.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的一个 *k 网*[50], 如果对 X 中的任意紧集 K 和开集 U 满足 $K \subset U$, 存在有限子族 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ 使得 $K \subset \bigcup \mathcal{P}' \subset U$ 成立.

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的一个 *cs 网*[21], 如果对 X 中的任意开集 U, $x \in U$, 以及任意收敛于 x 的序列 L, 存在 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $x \in P \subset U$ 并且 L 终于 P.

(4) $\mathcal{P}$ 称为 X 的一个 *cs^* 网*[12], 如果对 X 中的任意开集 U, $x \in U$, 以及任意收敛于 x 的序列 L, 存在 L 的子列 L' 以及 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $x \in P \subset U$ 并且 $L' \subset P \subset U$.

(5) $\mathcal{P}$ 称为 X 的一个 *wcs^* 网*[37], 如果对 X 中的任意开集 U, $x \in U$, 以及任意收敛于 x 的序列 L, 存在 L 的子列 L' 以及 $P \in \mathcal{P}$ 使得 $L' \subset P \subset U$.

易见: (1) 基 $\Rightarrow$ cs 网 $\Rightarrow$ cs^* 网 $\Rightarrow$ wcs^* 网 $\Rightarrow$ 网; (2) 基 $\Rightarrow$ k 网 $\Rightarrow$ wcs^* 网.

下述引理是处理点离散集族的基本方法, 同时建立了点离散集族与紧有限集族的基本关系.

引理 2.1[38, 49] 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点离散族.

(1) 若 K 是 X 的紧集, 则存在 K 的有限子集 F 使得 $\{P \in \mathcal{P} : P \cap (K \setminus F) \neq \emptyset\}$ 是有限的.

(2) 记 $D = \{x \in X : \mathcal{P}$ 在 x 不是点有限的$\}$, 则 $\{P \setminus D : P \in \mathcal{P}\} \cup \{\{x\} : x \in D\}$ 是紧有限的.

上述 (2) 表明: 点有限且点离散集族是紧有限集族. 易验证, k 空间中的紧有限集族是点离散集族. 利用上述引理和 [38] 主要结果证明中的构造方法, 有以下推论成立.

推论 2.1 (1) 具有 σ 点离散网的空间具有 σ 紧有限网, 故这类空间的每一紧子集是可度量化的.

(2) 具有 σ 点离散 k 网的空间具有 σ 紧有限 k 网 [51].

(3) 具有 σ 点离散 wcs^* 网的空间等价于具有 σ 点离散 k 网的空间 [52].

(4) 具有 σ 紧有限 wcs^* 网的空间等价于具有 σ 紧有限 k 网的空间.

为了完备起见, 下面简单说明 (1) 与 (4) 成立的理由. 设 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n$ 是空间 X 的 σ 点离散网, 其中每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的点离散集族. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 令 $D_n=\{x\in X:\mathcal{P}_n$ 在 x 不是点有限的$\}$, $\mathcal{F}_n=\{P\setminus D_n:P\in\mathcal{P}_n\}\cup\{\{x\}:x\in D_n\}$. 记 $\mathcal{F}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{F}_n$. 由引理 2.1, $\mathcal{F}$ 是 σ 紧有限的. 对 X 的任意开集 U 及点 $x\in U$, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 和 $P\in\mathcal{P}_n$ 使得 $x\in P\subset U$. 若 $x\in D_n$, 取 $F=\{x\}$; 若 $x\notin D_n$, 取 $F=P\setminus D_n$. 则 $F\in\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}$ 且 $x\in F\subset U$. 故 $\mathcal{F}$ 是 X 的网, 即 X 具有 σ 紧有限网. 由于具有可数网的紧空间是可度量化的, 所以 X 的每一紧子集是可度量化的, 故 (1) 成立.

由于 k 网是 wcs^* 网, 所以具有 σ 紧有限 k 网的空间具有 σ 紧有限 wcs^* 网. 又由于在每一紧子集是可度量化的空间中, 点可数的 wcs^* 网是 k 网 (见 [35, 引理 2.1.6]), 所以具有 σ 紧有限 wcs^* 网的空间也具有 σ 紧有限 k 网. 因此 (4) 成立.

由此可见, 对于考虑具有特定性质网、k 网或 wcs^* 网的空间时, σ 点离散性质都强于 σ 紧有限性质.

扇空间 S_{ω_1} 是指将 ω_1 条非平凡的收敛序列的拓扑和空间中所有收敛点粘成一点得到的商空间. 类似地, *序列扇* S_ω 是指将 ω 条非平凡的收敛序列的拓扑和空间中所有收敛点粘成一点得到的商空间. 以上两空间的初步性质见 [36, 例 1.8.7]

例 2.1 扇空间 S_{ω_1}: 具有 σ 点离散 cs^* 网, 但既不具有 σ 点离散 cs 网也不具有 σ 紧有限 cs^* 网.

下述问题是本节的核心问题.

问题 2.1[52] 具有 σ 点离散 cs 网的空间是否一定具有 σ 紧有限 cs 网?

我们甚至不知道具有 σ 点离散 cs 网的空间是否一定具有 σ 紧有限 cs^* 网. 与此相关的问题是具有 σ 紧有限 cs^* 网的空间是否具有 σ 紧有限 cs 网. 后面的例 4.1 说明具有 σ 紧有限网 (k 网, cs 网, cs^* 网, wcs^* 网) 的空间相应地都不能推出具有 σ 点离散网 (k 网, cs 网, cs^* 网, wcs^* 网) 的空间.

定义 2.2[11] 空间 X 的子集 P 称为是点 $x\in X$ 的*序列邻域*, 如果 X 中任意收敛于 x 的序列都终于 P. 子集 $U\subset X$ 称为*序列开集*, 如果 U 是其中每一个点的序列邻域. X 称为*序列空间*, 如果 X 中每一个序列开集是开的.

设 X 是一个空间. X 中所有序列开集构成 X 上一个新的拓扑, 赋予 X 该拓扑所得到的空间记为 σX, 称为 X 的*序列反射拓扑*. 容易验证: 空间 X 是序列空间当且仅当 $X=\sigma X$.

定理 2.1[26] 设空间 X 具有 σ 点离散 cs^* 网. 如果 σX 不含闭子空间同胚于 S_ω, 则 X 具有 σ 紧有限 cs^* 网.

对于空间 X, 如果 σX 不含闭子空间同胚于 S_ω, 则 X 不含闭子空间同胚于 S_ω. 下述问题与问题 2.1 相关.

问题 2.2[26] 设空间 X 不含闭子空间同胚于 S_ω. 如果 X 具有 σ 点离散 cs^* 网 (或 cs 网), X 是否具有 σ 紧有限 cs^* 网 (或 cs 网)?

定理 2.2[26] 设 X 是具有 σ 点离散 wcs^* 网的正则空间. 如果 X^ω 是 k 空间, 则 X 是可度量空间.

上述定理对于具有 σ 点离散基的正则空间是正确的, 这是文 [43] 中的一个结果. 但是, 它对

于具有 σ 点离散网的正则空间却不再成立. 例如, 取 X 是任一具有可数网的第一可数的不可度量的正则空间 (见 [36, 例 1.8.3]), 则 X^ω 是第一可数空间, 从而 X^ω 是 k 空间.

回忆几个映射. 设映射 $f: X \to Y$. f 称为*序列覆盖映射*, 若 Y 中的每一收敛序列是 X 中的某收敛序列关于 f 的像; f 称为*序列商映射*, 若对 Y 中的每一收敛序列 S, 存在 X 中的收敛序列 L 使得 $f(L)$ 是 S 的子序列. 在映射保持方面, 由于闭映射保持点离散集族, 所以容易验证: 序列覆盖的闭映射保持具有 σ 点离散 cs 网的空间; 序列商的闭映射保持具有 σ 点离散 cs^* 网 (wcs^* 网, k 网) 的空间; 闭映射保持具有 σ 点离散网的空间.

3 弱基及其推广

作为基的一种推广, 弱基的概念是由 Arhangel'skiĭ 在 1966 年的经典报告《映射与空间》中提出的 [3]. 具有各种弱基的空间类是广义度量空间理论中重要的研究对象, 具有 σ 局部有限 (σ 遗传闭包保持、σ 闭包保持) 弱基的空间类的研究请参考 [35–36]. 关于弱基的一个重要的阶段性成果是 2005 年刘川 [41] 证明了具有 σ 遗传闭包保持弱基的正则空间具有 σ 局部有限弱基. 本节主要介绍近 10 年来具有 σ 点离散弱基及相关空间类的重要研究成果.

定义 3.1 设 $\mathcal{B} = \bigcup\{\mathcal{B}_x(n) : x \in X, n \in \omega\}$ 是空间 X 中的一个集族, 满足对任意 $x \in X$, $n \in \omega$, $\mathcal{B}_x(n)$ 关于有限交封闭并且 $x \in \bigcap \mathcal{B}_x(n)$.

(1) 若对 X 的每一子集 A, A 是开集当且仅当对任意 $x \in A$ 及 $n \in \omega$ 存在 $B \in \mathcal{B}_x(n)$ 使得 $B \subset A$ 成立, 则称 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个 *$\aleph_0$ 弱基*[42]. 此时, 如果每一 $\mathcal{B}_x(n)$ 都是可数的, 则称空间 X 是*弱拟第一可数的*[53].

(2) 在 $\aleph_0$ 弱基的定义中, 若 $\mathcal{B}_x(n) = \mathcal{B}_x(1)$ 对每一 $n \in \omega$ 成立, 则称 $\mathcal{B}$ 是 X 的一个*弱基*[3]. 此时, 如果每一 $\mathcal{B}_x(1)$ 都是可数的, 则称空间 X 是*弱第一可数的*[3].

定义 3.2 设 $\mathcal{P} = \bigcup\{\mathcal{P}_x : x \in X\}$ 是空间 X 中的一个集族, 满足对任意 $x \in X$, $\mathcal{P}_x$ 关于有限交封闭. 如果 $\mathcal{P}_x$ 中每一元都是 x 的序列邻域且对 x 的任意开邻域 U, 存在 $P \in \mathcal{P}_x$ 使得 $x \in P \subset U$ 成立, 则称 $\mathcal{P}$ 是 X 的一个 *sn 网*[33]. 此时, 如果每一 $\mathcal{P}_x$ 都是可数的, 则称空间 X 是 *sn 第一可数的*[15, 34].

易见: (1) 基 $\Rightarrow$ 弱基 $\Rightarrow$ $\aleph_0$ 弱基 $\Rightarrow$ cs^* 网.

(2) 弱基 $\Rightarrow$ sn 网; 且在序列空间中, sn 网 $\Rightarrow$ 弱基.

(3) 第一可数空间 $\Rightarrow$ 弱第一可数空间 $\Rightarrow$ 弱拟第一可数空间 $\Rightarrow$ 序列空间 $\Rightarrow$ k 空间; 且弱第一可数空间 $\Leftrightarrow$ sn 第一可数的序列空间.

下述结果是关于 σ 点离散集族的一个不平凡定理, 其逆命题不成立, 见例 4.1.

定理 3.1[31] 具有 σ 点离散 sn 网的空间具有 σ 紧有限 sn 网.

由此, 可进一步获得与具有 σ 点离散 cs 网空间的精确联系. 注意到, 若 X 是 sn 第一可数空间, 则 σX 不含闭子空间同胚于 S_ω, 见 [35].

定理 3.2 下述条件等价:

(1) X 具有 σ 点离散 sn 网.

(2) X 是具有 σ 点离散 cs 网的 sn 第一可数空间 [30].

(3) X 具有 σ 点离散 cs 网且 σX 不含闭子空间同胚于 S_ω, 见 [28].

例 3.1 存在具有可数 cs 网的正则空间 X 使得 X 不含闭子空间同胚于 S_ω, 但是 σX 同胚于 S_ω, 见 [34, 例 3.19]. 这说明定理 3.2 的条件 (3) 中的 σX 不可减弱为 X.

推论 3.1 下述条件等价:

(1) X 具有 σ 紧有限弱基.

(2) X 是具有 σ 点离散弱基的弱第一可数空间 [38].

(3) X 是具有 σ 点离散 sn 网的 k 空间 [30].

(4) X 是具有 σ 紧有限 sn 网的 k 空间.

(5) X 是具有 σ 点离散 cs 网的弱第一可数空间 [43].

若设 X 有正则性, 则在连续统假设下, 上述条件也与下述条件等价:

(6) X 是具有 σ 点离散弱基和可数 tightness 的空间 [43].

上述条件 (4) 未见于文献, 其等价性说明如下. 由定理 3.1 知 (3) $\Rightarrow$ (4). 若 X 是具有 σ 紧有限 sn 网的 k 空间, 由于 X 是每一紧子集可度量化的 k 空间, 所以 X 是序列空间. 这时, X 的 sn 网就是 X 的弱基, 从而 X 具有 σ 紧有限弱基, 即 (4) $\Rightarrow$ (1).

不知是否可把定理 3.2 (2) 和推论 3.1 (5) 中的 cs 网减弱为 cs^* 网, 所以有下述问题:

问题 3.1[53] 具有 σ 点离散 cs^* 网的弱第一可数 (sn 第一可数) 空间是否具有 σ 点离散弱基 (sn 网)?

对比定理 1.2, 我们有下述问题.

问题 3.2 每一具有 σ 点离散弱基的正则空间是否都是 D 空间?

关于映射性质的正面结论有下述结果.

定理 3.3[43] 设 $f: X \to Y$ 是序列覆盖的闭映射. 若 X 是具有 σ 紧有限弱基的正则空间, 则 Y 具有 σ 紧有限弱基.

下述例子加深了我们对弱基和 sn 网所确定空间的映射性质的认识.

例 3.2 (1) 完备映射不保持具有 σ 点离散弱基的空间, 这只须验证由 Burke 和 Davis[7] 给出的本文中的例 1.3 中的像空间不具有 σ 点离散弱基.

(2) 存在完备映射 $f: S_2 \to S_\omega$, 其中 S_2 (即 Arens 空间) 具有可数弱基, S_ω 不是 sn 第一可数空间, 见 [35, 例 1.5.1 和例 1.5.2].

(3) 具有 σ 紧有限 sn 网空间上的闭映射未必是紧覆盖映射, 见 [35, 例 2.2.2].

下列映射问题也是有趣的.

问题 3.3[30] 序列覆盖的闭映射是否保持具有 σ 点离散 sn 网或具有 σ 紧有限 sn 网的空间?

注意到例 3.2(1) 中的像空间具有 σ 点离散 $\aleph_0$ 弱基, 我们有下述问题.

问题 3.4 完备映射是否保持具有 σ 点离散 $\aleph_0$ 弱基的空间?

下述问题与定理 1.3 相关.

问题 3.5 具有 σ 点离散 sn 网的正则空间上的闭映射是否为紧覆盖映射?

对于 $\aleph_0$ 弱基, 有下述与推论 3.1 相类似的结论.

定理 3.4[52] 下述条件等价:

(1) X 具有 σ 紧有限 $\aleph_0$ 弱基.

(2) X 是具有 σ 点离散 $\aleph_0$ 弱基的 k 空间.

(3) X 是具有 σ 点离散 $\aleph_0$ 弱基的弱拟第一可数空间.

此外, 在连续统假设下, 有以下更进一步的结果, 它与问题 3.5 相关, 同时部分地减弱了定理 1.3 的条件.

定理 3.5[52] (CH) 每一具有 σ 点离散 $\aleph_0$ 弱基的正则空间上的闭映射都是紧覆盖映射.

本文中最期待解决的是下述问题.

问题 3.6[39] 具有 σ 紧有限弱基的正则空间是否具有 σ 局部有限弱基?

下述两个问题分别与问题 1.3 和问题 1.1 相关.

问题 3.7[30, 43] 具有 σ 点离散弱基 (sn 网) 的正则空间是否具有点 G_δ 性质?

问题 3.8[43] 具有 σ 点离散弱基的伪紧空间是否可度量化?

本节最后讨论可数性对于点离散集族的部分作用.

定理 1.1 之后已指出下述问题对于基的回答是肯定的. 文 [40, 52] 已证明在连续统假设下, 问题的回答仍是肯定的. 即使把 "点离散性" 加强为 "紧有限性", 在一般情况下我们仍不能给出下述问题的确切回答.

问题 3.9[40, 52] 具有 σ 点离散弱基 ($\aleph_0$ 弱基) 的可分正则空间是否具有可数弱基 ($\aleph_0$ 弱基)?

下述例子表明若把问题 3.9 中的弱基或 $\aleph_0$ 弱基换为 sn 网, 则问题的回答是否定的.

例 3.3 存在具有 σ 局部有限 sn 网的可分正则空间, 不具有可数 sn 网, 见文 [31, 例 1].

拓扑空间 X 称为 $\aleph_1$ 紧的, 若 X 中每一基数为 $\aleph_1$ 的集合都有聚点. Lindelöf 空间和遗传可分空间都是 $\aleph_1$ 紧空间.

定理 3.6 设 X 是一个 $\aleph_1$ 紧空间.

(1) 若 X 具有 σ 点离散网, 则 X 具有可数网 [44].

(2) 若 X 具有 σ 点离散 k 网, 则 X 具有可数 k 网 [32].

(3) 若 X 具有 σ 点离散 sn 网, 则 X 具有可数 sn 网 [13].

(4) 若 X 具有 σ 点离散 $\aleph_0$ 弱基, 则 X 具有可数 $\aleph_0$ 弱基 [52].

(5) 若 X 具有 σ 点离散弱基, 则 X 具有可数弱基 [38].

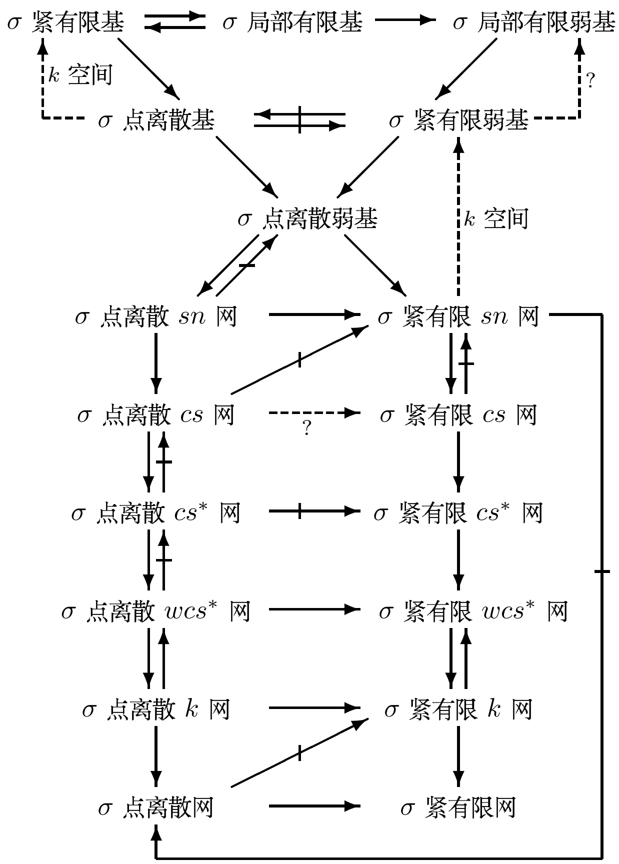
(6) 若 X 具有 σ 点离散基, 则 X 具有可数基 [44].

上述定理形式上没涉及本文所关注的 cs 网、cs^* 网和 wcs^* 网. 其实, 它们都蕴涵在条件 (2) 中, 因为空间具有的下述性质是相互等价的: 可数 cs 网、可数 cs^* 网、可数 wcs^* 网和可数 k 网. 事实上, 若 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的可数 wcs^* 网, 易验证集族 $\{\bigcup\mathcal{F}:$ 有限的 $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}\}$ 既是 X 的可数 cs 网也是 X 的可数 k 网.

问题 3.10[26] 设 X 是可分正则的 k 空间. 若 X 具有 σ 点离散 k 网, 那么 X 是否具有可数 k 网?

4 总结

作为结束, 我们用一张图表来总结本文中所涉及的主要空间之间的基本关系. 为了避免过多的线条交叉, 此图未列出 $\aleph_0$ 弱基的相应内容, 读者不难从已介绍的基本关系中作出补充.



以上各节末说明的一些相关例子补充如下.

例 4.1 Fortissimo 空间 (见 [52, 例 2.1]): 具有 σ 紧有限 sn 网的正则空间, 但不具有 σ 点离散网.

例 4.2 Arens 空间 S_2 (见 [36, 例 1.8.6]): 具有可数弱基的正则 k 空间, 但不可度量化. 由定理 1.1, S_2 不具有 σ 点离散基.

例 4.3 Michael 空间 (见 [36, 例 1.8.8]): 具有可数 sn 网的正则可数空间, 但不是 k 空间. 由定理 3.6, Michael 空间不具有 σ 点离散 $\aleph_0$ 弱基.

例 4.4 存在具有 σ 点离散 wcs^* 网的弱第一可数空间, 不具有 σ 点离散 cs^* 网, 见文 [35, 例 1.5.6] 中给出的空间 X. 这例子表明若把问题 3.1 中的 cs^* 网减弱为 wcs^* 网, 则问题的回答是否定的.

例 4.5 序列扇 S_ω (见 [35, 例 1.5.2]): 具有 σ 点离散 cs 网和 σ 紧有限 cs 网, 但不具有 σ 紧有限 sn 网.

例 4.6 Isbell-Mrówka 空间 $\psi(\mathbb{N})$ (见 [36, 例 1.8.4]): 具有 σ 点离散网, 但不具有 σ 紧有限 k 网.

致谢 本文初稿曾在 2014 年夏季的 "第 4 届漳州拓扑论坛" 上讨论过, 特向提出过修改意见的刘川教授等人表示感谢.

关于 Hausdorff 丰富多彩, 跌宕起伏的人生道路建议读者参看维基百科上 Hausdorff 的介绍文章: http://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff.

参考文献

[1] Aleksandrov, P.S., Fedorchuk, V.V. and Zaĭcev, V.I., The main aspects in the development of set-theoretic topology, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1978, 33(3): 3-48 (in Russian). (江守礼, 刘畅畅译, 点集拓扑学发展的几个奠基性时刻, 数学译林, 1984, 3(3): 223-233; 1984, 3(4): 313-326, 366).

[2] Arhangel'skiĭ, A.V., An addition theorem for the weight of sets lying in bicompacts, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1959, 126(2): 239-241 (in Russian).

[3] Arhangel'skiĭ, A.V., Mappings and spaces, *Russian Math. Surveys*, 1966, 21(4): 115–162.

[4] Aull, C.E. and Lowen, R., Handbook of the History of General Topology, Vol. 1, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[5] Bing, R.H., Metrization of topological spaces, *Canad. J. Math.*, 1951, 3(2): 175-186.

[6] Boone, J.R., Some characterizations of paracompactness in k-spaces, *Fund. Math.*, 1971, 72(2): 145-153.

[7] Burke, D.K. and Davis, S.W., Spaces with a σ-weakly hereditarily closure preserving base, *Topology Proc.*, 2010, 35: 9-18.

[8] Burke, D.K., Engelking, R. and Lutzer, D.J., Hereditarily closure-preserving collections and metrization, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1975, 51(2): 483-488.

[9] Burke, D.K. and Lutzer, D.J., Recent advances in the theory of generalized metric spaces, In: Topology Proc. 9th Ann. Spring Topological Conf. (Memphis State Univ., 1975), Lect. Notes Pure and Appl. Math., Vol. 24, New York: Marcel Dekker Inc., 1976, 1-70.

[10] 方嘉琳, 豪斯多夫, 世界著名数学家传 (吴文俊主编), 北京: 科学出版社, 1995, 1240-1246.

[11] Franklin, S.P., Spaces in which sequences suffice, *Fund. Math.*, 1965, 57(1): 107-115.

[12] Gao, Z., $\aleph$-space is invariant under perfect mappings, *Questions Answers Gen. Topology*, 1987, 5(2): 271-279.

[13] Ge, X., Shen, J. and Ge, Y., Spaces with σ-weakly hereditarily closure-preserving sn-networks, *Novi. Sad. J. Math.*, 2007, 37(1): 33-37.

[14] Ge, Y., On sn-Metrizable spaces, *Acta Math. Sin., Engl. Ser.*, 2002, 45(2): 355-360.

[15] 蒋继光, 关于仿紧性与拓扑空间的可度量性, 数学学报, 1986, 29(5): 679-701.

[16] Gruenhage, G., Generalized metric spaces, In: Handbook of Set-theoretic Topology (Kunen, K. and Vaughan, J.E. eds.), Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1984, 423-501.

[17] Gruenhage, G., Generalized metric spaces and metrization, In: Recent Progress in General Topology (Hušek, M. and Van Mill, J. eds.), Papers from the Prague Topological Symp. (Prague, 1991), Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1992, 239-274.

[18] Gruenhage, G., Metrizable spaces and generalizations, In: Recent Progress in General Topology II (Hušek, M. and Van Mill, J. eds.), Papers from the Prague Topological Symp. (Prague, 2001), Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 2002, 201-225.

[19] Gruenhage, G., A survey of D-spaces, *Contemp. Math.*, 2011, 533: 13-28.

[20] Gruenhage, G., Generalized metrizable spaces, In: Recent Progress in General Topology III (Hart, K.P., Van Mill, J. and Simon, P. eds.), Papers from the Prague Topological Symp. (Prague, 2011), Amsterdam: Atlantis Press, 2014, 471-505.

[21] Guthrie, J.A., A characterization of $\aleph_0$-spaces, *General Topology Appl.*, 1971, 1(2): 105-110.

[22] Hart, K.P., Van Mill, J. and Simon, P., Recent Progress in General Topology III, Papers from the Prague Topological Symp. (Prague, 2011), Amsterdam: Atlantis Press, 2014.

[23] Hart, K.P., Nagata, J. and Vaughan, J.E., Encyclopedia of General Topology, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 2004.

[24] Hausdorff, F., Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig: Veriag von Veit und Comp., 1914 (in German).

[25] Lašnev, N., Closed images of metric spaces, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 1966, 170: 505-507 (in Russian).

[26] Lin, F.C., σ-point-discrete cs^*-networks and wcs^*-networks, *J. Adv. Research Pure Math.*, 2010, 2(3): 7-12.

[27] 林福财, 拓扑代数与广义度量空间, 厦门: 厦门大学出版社, 2012.

[28] Lin, F.C. and Lin, S., Some notes on sequence-covering maps, *J. Math. Res. Appl.*, 2014, 34(1): 97-104 (in Chinese).

[29] Lin, F.C. and Lin, S., Sequence-covering maps on generalized metric spaces, *Houston J. Math.*, 2014, 40(3): 927-943.

[30] Lin, F.C., and Shen, R.X., Some notes on σ-point-discrete sn-networks, *Adv. Math.* (*China*), 2010, 39(2): 212-216 (in Chinese).

[31] Lin, S., On normal separable $\aleph$-spaces, *Questions Answers Gen. Topology*, 1987, 5: 249-254.

[32] Lin, S., A study of pseudobases, *Questions Answers Gen. Topology*, 1988, 6: 81-97.
[33] Lin, S., On sequence-covering s-mappings, *Adv. Math.* (*China*), 1996, 25(6): 548-551 (in Chinese).
[34] Lin, S., A note on the Arens' space and sequential fan, *Topology Appl.*, 1997, 81(3): 185-196.
[35] 林寿, 点可数覆盖与序列覆盖映射, 北京: 科学出版社, 2002.
[36] 林寿, 广义度量空间与映射 (第 2 版), 北京: 科学出版社, 2007.
[37] Lin, S. and Tanaka, Y., Point-countable k-networks, closed maps, and related results, *Topology Appl.*, 1994, 59(1): 79-86.
[38] Lin, Y., and Yan, L., A note on spaces with a σ-compact-finite weak base, *Tsukuba J. Math.*, 2004, 28(1): 85-91.
[39] Liu, C., Spaces with a σ-compact finite k-network, *Questions Answers Gen. Topology*, 1992, 10: 81-87.
[40] Liu, C., Notes on g-metrizable spaces, *Topology Proc.*, 2005, 29(1): 207-215.
[41] Liu, C., On weak bases, *Topology Appl.*, 2005, 150(1/2/3): 91-99.
[42] Liu, C. and Lin, S., On countable-to-one maps, *Topology Appl.*, 2007, 154(2), 449-454.
[43] Liu, C., Lin, S. and Ludwig, L.D., Spaces with a σ-point-discrete weak base, *Tsukuba J. Math.*, 2008, 32(1): 165-177.
[44] Liu, C. and Ludwig, L.D., Nagata-Smirnov revisited: spaces with σ-WHCP bases, *Topology Proc.*, 2005, 29(2): 559-565.
[45] Michael, E.A., Another note on paracompact spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1957, 8(4): 822-828.
[46] Michael, E.A., A quintuple quotient quest, *General Topology Appl.*, 1972, 2(2): 91-138.
[47] Morita, K. and Nagata, J., Topics in General Topology, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1989.
[48] Nagata, J., On a necessary and sufficient condition of metrizability, *J. Inst. Polytech. Osaka City Univ.*, 1950, 1(2A): 93-100.
[49] Okuyama, A., On a generalization of Σ-spaces, *Pacific J. Math.*, 1972, 42(2): 485-495.
[50] O'Meara, P., On paracompactness in function spaces with the compact open topology, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1971, 29(1): 183-189.
[51] Shang, Y. and Wang, S.Z., The discussion of spaces with σ-WHCP or σ-compact-finite sets, *J. Capital Norm. Univ. Nat. Sci. Ed.*, 2007, 28(6): 16-21 (in Chinese).
[52] Shen, R. and Lin, S., Spaces with σ-point-discrete $\aleph_0$-weak bases, *Appl. Math. J. Chinese Univ.*, 2013, 28B(1): 116-126.
[53] Sirois-Dumais, R., Quasi- and weakly-quasi-first-countable spaces, *Topology Appl.*, 1980, 11(2): 223-230.
[54] Smirnov, Yu.M., On the metrization of topological spaces, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1951, 6(6): 100-111 (in Russian).
[55] Urysohn, P., Zum Metrisationsproblem, *Math. Ann.*, 1925, 94(1): 309-315 (in German).
[56] Van Douwen, E.K., Simultaneous extension of continuous functions, Ph. D. Thesis, Amsterdam: Free University of Amsterdam, 1975.
[57] 中国大百科全书编辑委员会, 中国大百科全书 (数学卷), 北京: 中国大百科全书出版社, 1988.

Researches on Point-discrete Families

LIN Shou[1,2], SHEN Rongxin[3]

(*1. School of Mathematics and Statistics, Minnan Normal University, Zhangzhou, Fujian, 363000, P. R. China; 2. Institute of Mathematics, Ningde Normal University, Ningde, Fujian, 352100, P. R. China; 3. Department of Mathematics and Physics, Taizhou University, Taizhou, Jiangsu, 225300, P. R. China*)

Abstract: Based on the modern development of Metrization theorem for context, the main results obtained in recent ten years on point-discrete families are summarized. This paper mainly introduces the theory of the spaces with σ-point-discrete bases, the spaces with certain σ-point-discrete networks, and the relationship between the above spaces and the spaces with certain σ-compact-finite networks.

Keywords: point-discrete families; compact-finite families; generalized metrizable spaces; k-networks; weak bases