1990年 松辽学刊（自然科学版） №.3
第3期 Songliao Journal (Natural Science Edition) 1990

具有正则G_δ—对角线空间的一个注记

林 寿

（宁德师范专科学校）

摘 要 本文引进具有 K-G_δ^*-对角线的空间，它介于具有正则G_δ-对角线的空间和具有G_δ^*-对角线的空间之间．其作用之一是改进两个具有正则G_δ-对角线空间的度量化定理．

关键词 正则G_δ-对角线 K-G_δ^*-对角线 G_δ^*-对角线

近年来，具有G_δ-对角线的空间已成为一般拓扑学工作者研究的主要对象之一，这一方面是因为许多广义度量空间具有G_δ-对角线，另一方面是因为具有G_δ-对角线的空间是许多度量化定理的一个因子．本文引进具有K-G_δ^*-对角线的空间，它介于具有正则G_δ-对角线的空间和具有G_δ^*-对角线的空间之间．其应用之一是改进两个具有正则G_δ-对角线的空间的度量化定理．至于怎样的空间具有K-G_δ^*-对角线将在其它的文章中讨论．本文中N表示自然数集．

1 K-G_δ^*-对角线

设X是一个拓扑空间，$\{u_n\}$是X的开覆盖序列．考虑下列条件：

（1）对于X中不同的两点x和y，存在$n\in N$和X的开子集H，G使$x\in H$，$y\in G$且$H\cap st(G, u_n)=\phi$．

（2）对于X的紧子集K，有$\bigcap_{n\in N}\overline{st(K, u_n)}=K$．

（3）对于X的点x，有$\bigcap_{n\in N}\overline{st(x, u_n)}=\{x\}$．如果空间$X$存在开覆盖序列$\{u_n\}$分别满足上述条件（1），（2）和（3），那么称$X$是具有正则$G_\delta$-对角线〔1，定理1〕，具有$K$-$G_\delta^*$-对角线和具有$G_\delta^*$-对角线的空间．所对应的序列$\{u_n\}$分别称为$X$的正则$G_\delta$-对角线，$K$-$G_\delta^*$-对角线和$G_\delta^*$-对角线序列．

显然，具有G_δ^*-对角线的空间是Hausdorff空间．

定理1 对于拓扑空间X，X具有正则G_δ-对角线$\Rightarrow X$具有K-G_δ^*-对角线$\Rightarrow X$具有G_δ^*-对角线．

证明．设$\{u_n\}$是空间X的正则G_δ-对角线序列，不妨设u_{n+1}加细u_n．下面证明$\{u_n\}$

收稿日期：1988-03-16

是X的K-G_δ^*-对角线序列．对于X的紧子集K，如果$y\in X\setminus K$．对于任意的$x\in K$，存在$n(x)\in N$和X中分别含y，x的开集$H(x)$，$G(x)$满足$H(x)\cap st(G(x),\ \mathscr{U}_{n(x)})=\phi$．由$K$的紧性，存在$K$的有限子集$\{x_i:i\leq m\}$使$K\subset\bigcup_{i\leq m}G(x_i)$．令$H=\bigcap_{i\leq m}H(x_i)$，$n=\max\{n(x_i):i\leq m\}$，那么$H\cap st(K,\ \mathscr{U}_n)=\phi$．所以$y\notin\overline{st(K,\mathscr{U}_n)}$．因而$K=\bigcap_{n\in N}\overline{st(K,\mathscr{U}_n)}$，故$X$具有$K$-$G_\delta^*$-对角线．

显然，具有K-G_δ^*-对角线的空间具有G_δ^*-对角线．

定理 2　设X是具有K-G_δ^*-对角线的空间．如果X满足第一可数性公理，那么X具有正则G_δ-对角线．

证明．设$\{\mathscr{U}_n\}$是第一可数空间X的K-G_δ^*-对角线序列，不妨设$\mathscr{U}_{n+1}$加细$\mathscr{U}_n$．对于X中不同的两点x和y．设点x和y在X中的可数递减局部邻域基分别为$\{H_n\}$和$\{G_n\}$．因为X是T_2空间，不妨设$H_n\cap G_n=\phi$．下面证明存在$n\in N$使$H_n\cap st(G_n,\ \mathscr{U}_n)=\phi$．若不然，存在$X$的可数子集$\{x_n:n\in N\}$使$x_n\in H_n\cap st(G_n,\ \mathscr{U}_n)$．由于$\{H_n\}$是点$x$的可数局部邻域基且$H_n\cap G_n=\phi$，于是序列$\{x_n\}$收敛于$x$且所有$x_n\neq y$．记$K=\{x\}\cup\{x_n:n\in N\}$，那么$K$是$X$的紧子集且由$G_n\cap st(x_n,\ \mathscr{U}_n)\neq\phi$知$G_n\cap st(K,\ \mathscr{U}_n)\neq\phi$．另一方面，因为$y\notin K=\bigcap_{n\in N}\overline{st(K,\mathscr{U}_n)}$，存在$m\in N$使$y\in X\setminus\overline{st(K,\mathscr{U}_m)}$，于是有$k\geq m$使$G_k\subset X\setminus\overline{st(K,\mathscr{U}_m)}\subset X\setminus st(K,\ \mathscr{U}_k)$，故$G_k\cap st(k,\ \mathscr{U}_k)=\phi$，矛盾．因此，存在自然数$n$使$H_n\cap st(G_n,\ \mathscr{U}_n)=\phi$，故$X$具有正则$G_\delta$-对角线．

推论　具有K-G_δ^*-对角线的局部紧空间具有正则G_δ-对角线．

证明．设X是具有K-G_δ^*-对角线的局部紧空间．由定理2，只须证明X满足第一可数性公理．因为X是局部紧的Hausdorff空间，所以X是正则空间，于是对于$x\in X$，存在点x的开邻域的递减集列$\{G_n\}$使得$\{x\}=\bigcap_{n\in N}\bar{G}_n$且$\bar{G}_1$是$X$的紧子集．如果$\{G_n\}$不是点$x$的局部邻域基，那么存在点$x$的开邻域$G$使对于每一$n\in N$，$G_n\cap(X\setminus G)\neq\phi$，因而$\bigcap_{n\in N}\bar{G}_n\cap(X\setminus G)\neq\phi$．矛盾与$\bigcap_{n\in N}\bar{G}_n=\{x\}$．故$X$是第一可数空间，于是$X$具有正则$G_\delta$-对角线．

2　K-G_δ^*-对角线与度量化

本节应用所引进的K-G_δ^*-对角线改进两个具有正则G_δ-对角线空间的度量化定理．

拓扑空间X称为伪紧空间，如果X是完全正则空间且定义于X上的一每一实值连续函数是有界函数．完全正则的可数紧空间是伪紧空间．具有G_δ-对角线的可数紧空间是紧可度量化空间，但是具有G_δ-对角线（甚至G_δ^*-对角线）的伪紧空间未必是可度量化空间（见定理3后的例）．那么，怎样的伪紧空间是可度量化空间？文〔2〕证明了具有正则G_δ-对角线的伪紧空间是紧可度量化空间．下面的定理3改进了这个度量化定理．

定理 3　具有K-G_δ^*-对角线的伪紧空间是紧可度量化空间．

证明．设X是具有K-G_δ^*-对角线的伪紧空间．由定理2和具有正则G_δ-对角线的伪紧空间是紧可度量化空间〔2，定理2.6〕，我们只须证明X是第一可数空间．对于$x\in X$，存在点x的开邻域递减序列$\{G_n\}$使$\bigcap_{n\in N}G_n=\{x\}$．如果$\{G_n\}$不是点$x$的局部邻域基，

那么存在点x的开邻域G使对于$n\in N$，$G_n\cap(X\setminus G)\neq\phi$．由正则性，选取开集$H$使$x\in H\subset\overline{H}\subset G$，那么$\{G_n\cap(X\setminus\overline{H})\}$是$X$的非空开子集的递减序列．因为$X$是伪紧空间，所以$\bigcap_{n\in N}G_n\cap(X\setminus\overline{H})\neq\phi$〔3，定理3.10.23〕．但是$\bigcap_{n\in N}G_n\cap(X/\overline{H})\subset(\bigcap_{n\in N}\overline{G}_n)\cap(X\setminus H)=\phi$，矛盾．因而$\{G_n\}$是点$x$的可数局部邻域基．故$X$是第一可数空间，所以$X$是紧可度量化空间．

例　存在不可度量化的局部伪紧Moore空间．

让X是文〔4〕中例4.4的空间$\phi(N)$，那么X是不可度量化的局部紧Moore空间且含有可数稠子空间$N\subset X$使N的任何可数无限子集在X中有聚点．因为X是局部紧的T_2空间，所以X是完全正则的．若f是X上的连续实值函数．因为N的任何可数无限子集在X中有聚点，所以f在N上有界；又因为N是X的稠子空间，所以f是X上的有界函数．故X是伪紧空间．

近年来，局部紧且局部连通的空间引起了一般拓扑学工作者的广泛兴趣，其原因之一是因为拓扑流形是局部紧且局部连通的空间．文〔5〕定理2.15证明了具有正则G_δ-对角线的局部紧且局部连通的空间是可度量化空间．利用定理2的推论，我们有如下的度量化定理．

定理4　具有K-G_δ^*-对角线的局部紧且局部连通空间是可度量化空间．

参考文献

1 P.Zenor, On spaces with regular G_δ-diagonals, Pacific J.Math., 1972; 40: 759～763
2 W.G.McArthur, G_δ-diagonals and metrization Theorems, ibid., 1973; 44: 613～617
3 R.Engelking, General Topology, Warszawa, 1977
4 D.K.Burke, Covering properties, Handbook of set-Theoretic Topology, Elsevier Science Publisher B.V., 1984: 347～421
5 G.Gruenhage, Generalized metric spaces, ibid, 423～501

A Note to the Space with Regular G_δ-diagonal

Lin Shou

(Ningde Teacher's College)

Abstract

This paper describes a space with K-G_δ^*-diagonal which is between the 2 spaces with the regular G_δ-diagonal and the G_δ^* respectively. One of the functions of the space is to improve two metrization theorems of regular G_δ-diagonal space.

Keywords regular G_δ-diagonal K-G_δ^*-diagonal G_δ^*-diagonal

作者简介　林寿　男　1960年生于福建省周宁县　1987年7月毕业于苏州大学数学系获硕士学位　现在宁德师专数学科担任分析教学工作　主要研究方向为一般拓扑学曾发表Mapping theorems on Alaph—spaces 等论文