2013,**33A**(3):483–493

Acta Mathematica Scientia 数学物理学报

http://actams.wipm.ac.cn

弱基与度量空间的紧覆盖映像 *

[1,2] 林寿　[3] 张静

([1] 漳州师范学院数学与信息科学系　福建漳州 363000; [2] 宁德师范学院数学研究所　福建宁德 352100;
[3] 南京师范大学数学科学学院　南京 210046)

摘要：借助 sn 网，获得了拓扑空间 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数弱基的等价特征，证明了这空间可刻画为度量空间的 1-scc (或 scc) 的商映像，讨论了每一紧子集具有可数外弱基空间的性质，推广了 Michael 和 Nagami 关于度量空间的紧覆盖、开映像的经典结果.

关键词：sn 网；弱基；外 sn 网；外弱基；紧覆盖映射； 1 序列覆盖映射；商映射； 1-scc 映射； scc 映射.

MR(2000) 主题分类：54C10; 54D65; 54E20　**中图分类号**：O189.1　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2013)03-483-11

1　引言

研究空间与映射之间的相互关系，探讨广义度量空间之间的内在联系是一般拓扑学的重要课题之一 [6,8]. 近年来，新的结果层出不穷 [7,15,18]. 1973 年， Michael 和 Nagami[13] 的经典论文开创了度量空间紧覆盖映像的研究，其中提出的 “度量空间的商 s 映像是否是度量空间的紧覆盖的商 s 映像” 问题被列为一般拓扑学的重要问题 [14], 至 2003 年才通过集论假设给予否定回答 [2]. 在文献 [3] 中， Michael 和 Nagami 引入了外基的概念，证明了下列结果.

定理 1.1　对于 T_2 空间 X, 下列条件相互等价

(1)　X 是度量空间的紧覆盖的开映像;

(2)　X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数邻域基;

(3)　X 的每一紧子集在 X 中具有可数外基.

它建立了紧子集具有可数邻域基空间与度量空间的紧覆盖的开映像之间的精确关系，为进一步讨论度量空间的各类紧覆盖映像理论提供了奠基性的工作 [10]. 2009 年， Tkachuk[18] 在 D 空间的研究中特别讨论了紧子集具有可数邻域基的空间. 弱基是基的重要推广，一些弱基与基相关内容的讨论常带来较困难的问题 [11]. 受 Michael 和 Nagami 论文的启发，引导我们对于下述问题的兴趣.

问题 1.2　(1)　如何用度量空间的映像刻画每一紧子集可度量化且在整个空间中具有可数弱基的空间？

收稿日期: 2011-10-13; 修订日期: 2013-02-05

E-mail: shoulin60@163.com

* 基金项目：国家自然科学基金 (10971185, 11171162) 和福建省自然科学基金 (2009J01013) 资助

(2) 对于拓扑空间 X, 下列条件是否等价

(a) X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数弱基;

(b) X 的每一紧子集在 X 中具有可数外弱基.

由于度量空间的紧覆盖映像刻画了每一紧子集是可度量化的空间 [13], 所以在上述的第一个问题中, 所寻求的映射一般要含有紧覆盖映射, 同时这映射通常也要弱于开映射. 另一方面, 用映射理论研究弱基的有效映射是 1 序列覆盖的商映射, 而度量空间上的开映射是 1 序列覆盖映射的商映射 [9]. 这自然地提出下述进一步的问题.

问题 1.3 度量空间的 1 序列覆盖、紧覆盖、商映像是否刻画每一紧子集可度量化且在整个空间中具有可数弱基的空间?

本文的主要目的是引进与 1 序列覆盖映射及紧覆盖映射密切相关的 1-scc 映射与 scc 映射 (见定义 3.1), 由此回答了问题 1.2 (1), 推广了定理 1.1. 此外, 给出例子说明问题 1.2 (2) 和问题 1.3 的回答都是否定的. 这些结论一方面说明了关于基到弱基的推广并不都是平行和平凡的, 另一方面, 也找到了关于 1 序列覆盖映射的一些更深入的应用.

本文所讨论的空间均是满足 T_2 分离性公理的拓扑空间, 映射指连续的满函数, $\mathbb{N}$ 是正整数集. 未定义的术语及记号见文献 [4].

2 紧子集具有可数外 sn 网的空间

对于弱基性质更广泛探讨的基础是讨论稳定性较好的 sn 网. 弱基是介于基与 sn 网之间的一个概念.

Michael 和 Nagami[13] 引入的空间中子集的外基 (outer base) 概念, 就是把空间中一点的邻域基扩展到一个子集上每一点的邻域基. 即空间 X 的开集族 $\mathcal{B}$ 称为 X 的子集 A (在 X 中) 的外基, 若对于每一 $x \in A$ 及 x 在 X 中的任一邻域 U, 存在 $B \in \mathcal{B}$, 使得 $x \in B \subset U$. 因而, $\mathcal{B}$ 是 A 的外基当且仅当对于每一 $x \in A$, 存在 x 的邻域基 $\mathcal{B}_x$ 使得 $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{x \in A} \mathcal{B}_x$.

由此, 可引入外 sn 网的概念.

对于空间 X 的子集 P, P 称为点 $x \in X$ 的序列邻域 (sequential neighborhood), 若 X 中每一收敛于 x 的序列是终于 P 的. 显然, 点 x 的邻域是 x 的序列邻域.

定义 2.1 设 A 是空间 X 的非空子集. X 的子集族 $\mathcal{B}$ 称为 A (在 X 中) 的外 sn 网 (outer sn-network), 如果 $\mathcal{B} = \bigcup\limits_{x \in A} \mathcal{B}_x$, 其中每一 $\mathcal{B}_x$ 满足

(1) $\mathcal{B}_x$ 是 x 在 X 中的网, 即 $x \in \bigcap \mathcal{B}_x$, 且如果 X 的开集 O 含有点 x, 则存在 $B \in \mathcal{B}_x$ 使得 $B \subset O$;

(2) 如果 $U,\ V \in \mathcal{B}_x$, 则存在 $W \in \mathcal{B}_x$ 使得 $W \subset U \cap V$;

(3) $\mathcal{B}_x$ 中的每一元是 x 在 X 中的序列邻域.

上述 $\mathcal{B}_x$ 称为 x 在 X 中的 sn 网 (sn-network). X 在 X 中的外 sn 网也称为 X 的 sn 网 [9].

定义 2.2 设 A 是空间 X 的非空子集. 称 A 在 X 中具有可数 sn 网, 若存在 X 的子集列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 满足

(1) 每一 V_n 是 A 中每一点的序列邻域, 即 V_n 是 A 在 X 中的序列邻域;

(2) 对 X 中每一包含 A 的开集 V, 存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $V_n \subset V$.

上述 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 也称为 A 在 X 中的可数 sn 网.

在定义 2.1 和定义 2.2 中, 当把序列邻域加强为邻域时, 分别定义了子集 A 的外基及 A 在 X 中的可数邻域基.

下列定理建立了空间中紧子集具有可数 sn 网与具有可数外 sn 网的精确联系．它是本文中建立度量空间的紧覆盖映像定理的关键.

定理 2.3 设 K 是空间 X 的紧子集，则 K 可度量化且在 X 中具有可数 sn 网当且仅当存在 K 在 X 中的可数外 sn 网 $\mathcal{H}$, 满足: $\mathcal{H}$ 的每一元形如 $U\cap V$, 其中 U 是 X 的开集, V 是 K 在 X 中的序列邻域.

证 必要性．设 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的可数 sn 网．因为 K 是 X 的可度量化的紧子集，所以 K 具有可数基，记其为 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 令 $A=\{(n,m)\in\mathbb{N}^2:\overline{U}_m\subset U_n\}$. 对于 $(n,m,k)\in A\times\mathbb{N}$, 由于 $\overline{U}_m\subset U_n$, 于是 $\overline{U}_m\cap(K\setminus U_n)=\varnothing$. 因为 $\overline{U}_m$ 和 $K\setminus U_n$ 是 T_2 空间 X 中不交的紧子集，从而存在 X 的开集 $U_{n,m}$, 使得

$$\overline{U}_m\subset U_{n,m}\subset\overline{U}_{n,m}\subset X\setminus(K\setminus U_n).$$

置 $W(n,m,k)=U_{n,m}\cap V_k$. 形如上述 $W(n,m,k)$ 的集合的有限交全体组成的 X 的集族记为 $\mathcal{H}$, 则 $\mathcal{H}$ 是可数的．由于有限个 K 在 X 中的序列邻域之交仍是 K 在 X 中的序列邻域，所以 $\mathcal{H}$ 中每一元形如 $U\cap V$, 其中 U 是 X 的开集， V 是 K 在 X 中的序列邻域.

对于每一个 $x\in K$, 定义

$$B_x=\{\alpha\in A\times\mathbb{N}:x\in W(\alpha)\};$$

$$H(F)=\cap\{W(\alpha):\alpha\in F\},\ \text{其中}\ F\subset B_x;$$

$$\mathcal{H}_x=\{H(F):F\subset B_x\ \text{且}\ F\ \text{有限}\}.$$

则 $\mathcal{H}=\bigcup\limits_{x\in K}\mathcal{H}_x$. 往证 $\mathcal{H}$ 是 K 在 X 中的外 sn 网.

(1) 任取 $H(F_1),H(F_2)\in\mathcal{H}_x$, 由 $\mathcal{H}_x$ 的定义可得 $F_1\subset B_x$, $F_2\subset B_x$ 且 F_1,F_2 都是有限集．令 $F=F_1\cup F_2$, 则 F 是 B_x 的有限子集，所以 $H(F)\in\mathcal{H}_x$ 且 $H(F)\subset H(F_1)\cap H(F_2)$.

(2) $\mathcal{H}_x$ 是 x 在 X 中的网.

设 U 是点 x 在 X 中的开邻域．如果不存在 B_x 的有限子集 F 使 $x\in H(F)\subset U$, 取 $p(F)\in H(F)\setminus U$. 置 $Q(F)=\{p(F'):F'\ \text{是}\ B_x\ \text{的有限子集且}\ F\subset F'\}$, 则 $U\cap Q(F)=\varnothing$. 下面先证明： $K\cap\overline{Q(F)}\neq\varnothing$. 否则，由 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的 sn 网，存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $V_k\cap\overline{Q(F)}=\varnothing$. 由 K 的正则性及 $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 的基，存在 $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ 使得 $x\in\overline{U}_m\subset U_n$. 记 $\alpha=(n,m,k)$, $F'=F\cup\{\alpha\}$, 则 $\alpha\in B_x$ 且 $p(F')\in W(\alpha)\cap Q(F)\subset V_k\cap Q(F)=\varnothing$, 矛盾.

若 $F_1\subset F_2$, 则 $Q(F_2)\subset Q(F_1)$, 因此 $\{K\cap\overline{Q(F)}:F\ \text{是}\ B_x\ \text{的有限子集}\ \}$ 具有有限交性质．由 K 的紧性， $K\cap(\bigcap\{\overline{Q(F)}:F\ \text{是}\ B_x\ \text{的有限子集}\ \})\neq\varnothing$.

另一方面，对于每一 $y\in K\setminus\{x\}$, 由 K 的正则性，存在 $(n,m)\in\mathbb{N}^2$, 使得

$$x\in U_m\subset\overline{U}_m\subset U_n\subset K\setminus\{y\},$$

于是 $\overline{U}_{n,m}\subset X\setminus(K\setminus U_n)\subset X\setminus\{y\}$. 取 $k\in\mathbb{N}$, 让 $\alpha=(n,m,k)$, 则 $\alpha\in B_x$ 且 $y\notin\overline{U}_{n,m}$. 而

$$Q(\{\alpha\})=\{p(F'):F'\ \text{是}\ B_x\ \text{的有限子集且}\ \alpha\in F'\}\subset H(\{\alpha\})=W(\alpha)\subset U_{n,m},$$

于是 $y\notin\overline{Q(\{\alpha\})}$. 因此， $(K\setminus\{x\})\cap(\bigcap\{\overline{Q(F)}:F\ \text{是}\ B_x\ \text{的有限子集}\ \})=\varnothing$. 这时

$$\cap\{K\cap\overline{Q(F)}:F\ \text{是}\ B_x\ \text{的有限子集}\ \}=\{x\}\subset U.$$

再由 K 的紧性及 (1) 所证, 存在 B_x 的有限子集 F 使得 $x\in K\cap\overline{Q(F)}\subset U$, 从而 $U\cap Q(F)\neq\varnothing$. 矛盾．因此，存在 B_x 的有限子集 F 使得 $H(F)\subset U$ 且 $x\in H(F)\subset U$. 从而， $\mathcal{H}_x$ 是 x 在 X 中的网.

(3) $\mathcal{H}_x$ 中的每一个元都是点 x 在 X 中的序列邻域.

对于每一 $H \in \mathcal{H}_x$, 由前所述，分别存在 X 中的开子集 U 和 K 在 X 中的序列邻域 V 使得 $H = U \cap V$. 因为 $x \in U \cap K \subset U \cap V$, 所以 H 是 x 的序列邻域.

充分性. 记 K 在 X 中的外 sn 网 $\mathcal{H}$ 为 $\{U_n \cap V_n : n \in \mathbb{N}\}$, 其中 U_n 是 X 的开子集， V_n 是 K 在 X 中的序列邻域. 由于 $\mathcal{H}$ 是 K 的外 sn 网，所以 $\{H \cap K : H \in \mathcal{H}\}$ 是紧子空间 K 的可数网，从而 K 可度量化 (如，见文献 [4, 定理 3.1.10]).

记 $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. 令

$$\mathcal{V} = \{(\cup\mathcal{U}') \cap (\cap\{V_n : n \le m\}) : \mathcal{U}' \text{ 是 } \mathcal{U} \text{ 的有限子集且覆盖 } K,\ m \in \mathbb{N}\},$$

则 $\mathcal{V}$ 是可数的. 显然， $\mathcal{V}$ 中的每一元是 K 在 X 中的序列邻域. 若 X 的开子集 $V \supset K$, 对于每一 $x \in K$, 因为 $\mathcal{H}$ 是 K 的外 sn 网，存在 $n_x \in \mathbb{N}$ 使得 $x \in U_{n_x} \cap V_{n_x} \subset V$. 那么 K 的覆盖 $\{U_{n_x} : x \in K\}$ 有有限子覆盖，记为 $\mathcal{U}' = \{U_{n_{x_i}} : i \le k\}$. 令 $m = \max\{n_{x_i} : i \le k\}$, 则 $(\bigcup\mathcal{U}') \cap (\bigcap\{V_n : n \le m\}) \subset V$. 故， $\mathcal{V}$ 是 K 在 X 中的 sn 网. ▮

例 4.6 将说明：紧子集具有可数外 sn 网不足以保证紧子集在 X 中具有可数 sn 网.

为了下列推论叙述的简洁及后面引用的方便，引入 fsn 覆盖 (fsn-covering) 的概念. 空间 X 的有限集族 $\mathcal{F} = \{F_i : i \le n\}$ 称为 X 的子集 C 的 fsn 覆盖，若 C 可表示为 C 中有限个闭子集 $\{C_i : i \le n\}$ 之并，且每一 F_i 是 C_i 在 X 中的序列邻域.

推论 2.4 设 K 是空间 X 的可度量化的紧子集，下述条件相互等价

(1) K 在 X 中具有可数 sn 网;

(2) 存在 X 的可数集族 $\mathcal{H}$, 满足：若 V 是 K 在 X 中的邻域，则存在 $\mathcal{H}$ 的有限子集 $\mathcal{H}'$, 使得 $\mathcal{H}'$ 是 K 的 fsn 覆盖，且 $\bigcup\mathcal{H}' \subset V$.

(3) 存在 X 的可数集族 $\mathcal{H}$, 具有性质 $(\star)$: 若 C 是 K 的非空紧子集且 V 是 C 在 X 中的邻域，则存在 $\mathcal{H}$ 的有限子集 $\mathcal{H}'$, 使得 $\mathcal{H}'$ 是 C 的 fsn 覆盖，且 $\bigcup\mathcal{H}' \subset V$.

证 (1) $\Rightarrow$ (3). 设 K 在 X 中具有可数 sn 网. 由定理 2.3, 让 $\mathcal{H}$ 是满足定理 2.3 必要性中的 K 在 X 中的可数外 sn 网. 下证 $\mathcal{H}$ 具有性质 $(\star)$.

若 $x \in C$, 则存在 $H_x \in \mathcal{H}$ 使得 $x \in H_x \subset V$, 不妨记 $H_x = U_x \cap V_x$, 其中 U_x 是 X 的开集，且 V_x 是 K 在 X 中的序列邻域. 于是 X 的开子集族 $\{U_x : x \in C\}$ 覆盖 C, 从而有 C 的有限子覆盖 $\{U_{x_i} : i \le n\}$. 仍由 C 的紧性，存在 C 的有限闭覆盖 $\{C_i : i \le n\}$ 使得每一 $C_i \subset U_{x_i}$. 对于每一 $i \le n$, 置 $H_i = U_{x_i} \cap V_{x_i}$, 因为 U_{x_i} 与 V_{x_i} 都是 C_i 在 X 中的序列邻域，所以 H_i 是 C_i 在 X 中的序列邻域. 显然， $\bigcup\{H_i : i \le n\} \subset V$.

(3) $\Rightarrow$ (2) 是显然的，下面证明 (2) $\Rightarrow$ (1). 设 X 的可数集族 $\mathcal{H}$ 满足条件 (2). 令

$$\mathcal{W} = \{\cup\mathcal{H}' : \mathcal{H}' \text{ 是 } \mathcal{H} \text{ 的有限子集且 } \cup\mathcal{H}' \text{ 是 } K \text{ 在 } X \text{ 中的序列邻域}\},$$

则 $\mathcal{W}$ 是可数的. 若 X 中的开集 $V \supset K$, 存在 K 的 fsn 覆盖 $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$, 使得 $\bigcup\mathcal{H}' \subset V$, 则 $\bigcup\mathcal{H}'$ 也是 K 在 X 中的序列邻域. 从而， $\mathcal{W}$ 是 K 在 X 中的可数 sn 网. ▮

对于 X 的紧子集 K, 推论 2.4 的条件 (3) 蕴含 K 的可度量性质. 事实上，对于每一 $x \in K$, 以 $C = \{x\}$ 利用性质 $(\star)$, 则存在 $\mathcal{H}$ 的某子族是 x 在 X 中的网，所以 $\{H \cap K : H \in \mathcal{H}\}$ 是紧子空间 K 的可数网，从而 K 可度量化. 这说明，对于紧子集 K, 条件 (3) 与定理 2.3 的条件也是相互等价的.

3 度量空间的紧覆盖映像

本节引入两类特别的紧覆盖映射，为问题 1.2 (1) 的回答做准备.

先回忆几个熟知的映射类. 设映射 $f: X \to Y$. f 称为紧覆盖映射 (compact-covering map)[12], 若对于空间 Y 的每一紧子集 K, 存在空间 X 的紧子集 L 使得 $f(L)=K$. f 称为序列覆盖映射 (sequence-covering map)[16], 若对于 Y 中的每一收敛序列 $\{y_n\}$, 存在 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. f 称为 1 序列覆盖映射 (1-sequence-covering map)[9], 若对于每一 $y \in Y$, 存在 $x \in f^{-1}(y)$ 满足：如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y, 则存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$, 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

度量空间上的开映射是 1 序列覆盖映射 [9]. 显然， 1 序列覆盖映射是序列覆盖映射.

下面引入的映射分别是 1 序列覆盖映射、序列覆盖映射与紧覆盖映射的有机结合.

定义 3.1 设映射 $f: X \to Y$.

(1) f 称为 1-*scc* 映射 (1-*scc*-map), 若对 Y 的每一紧子集 K, 存在 X 的紧子集 L, 使得 $f(L)=K$, 且对于每一 $y \in K$, 存在 $x \in L$ 满足：如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y, 那么存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$, 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

(2) f 称为 *scc* 映射 (*scc*-map), 若对 Y 的每一紧子集 K, 存在 X 的紧子集 L, 使得 $f(L)=K$, 且如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 K 中的某点，那么存在 X 中收敛于 L 中某点的序列 $\{x_n\}$, 使得每一 $x_n \in f^{-1}(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

显然， 1-*scc* 映射 (或 *scc*) 映射是 1 序列覆盖映射 (或序列覆盖映射) 和紧覆盖映射. 例 4.5 将说明：度量空间上的 1 序列覆盖且紧覆盖映射未必是 *scc* 映射.

仅讨论度量空间的紧覆盖映像，其刻画是简单的.

引理 3.2[13] 空间 X 是可度量化空间的紧覆盖映像当且仅当 X 的每一紧子集可度量化.

验证序列覆盖映射的基本途径是利用下述引理.

引理 3.3[9] 设映射 $f: X \to Y$. 如果 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 X 中某点 x 的递减的网且每一 $f(B_n)$ 是 $f(x)$ 在 Y 中的序列邻域，若在 Y 中序列 $\{y_n\}$ 收敛于 $f(x)$, 那么存在 $x_n \in f^{-1}(y_n)$, 使得在 X 中序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x.

推论 3.4 第一可数空间上的紧覆盖、开映射是 1-*scc* 映射.

证 设 $f: X \to Y$ 是紧覆盖、开映射，其中 X 是第一可数空间. 对于 Y 的每一紧子集 K, 存在 X 的紧子集 L 使得 $f(L)=K$. 对于每一 $y \in K$, 取定 $x \in L \cap f^{-1}(y)$, 并让 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中递减的邻域基，那么每一 $f(B_n)$ 是 y 在 Y 中的邻域. 由引理 3.3, 如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y, 那么存在 $x_n \in f^{-1}(y_n)$, 使得序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x. 故， f 是 1-*scc* 映射. ▍

本文的主要结果是下述定理.

定理 3.5 对于空间 X, 下述条件相互等价

(1) X 是每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 sn 网的空间；

(2) X 是某一可度量化空间的 1-*scc* 映像；

(3) X 是某一可度量化空间的 *scc* 映像.

证 (1) ⇒ (2). 设空间 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 sn 网. 对于 X 的每一非空紧子集 K, 由定理 2.3 及推论 2.4, 存在 K 在 X 中的可数外 sn 网 $\mathcal{H}_K$, 满足定理 2.3 及推论 2.4 的性质 $(\star)$.

令 $\mathcal{H} = \bigcup\{\mathcal{H}_K : K$ 是 X 的非空紧子集 $\}$, 记 $\mathcal{H} = \{H_\alpha : \alpha \in A\}$. 让 $(f, M, X, \mathcal{H})$ 是 Ponomarev 系，即置

$$M = \{\alpha = (\alpha_i) \in A^\omega : \{H_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \text{ 形成 } X \text{ 中某点 } x_\alpha \text{ 的网 }\},$$

其中 M 赋予离散空间 A 的可数次 Tychonoff 积空间的子空间拓扑，定义 $f: M \to X$ 为 $f(\alpha) = x_\alpha$, 则 M 是度量空间且 f 是映射 (如，见文献 [10, 引理 1.3.8]). 下证 f 是 1-*scc* 映

射.

设 K 是 X 的非空紧子集. 由于 $\mathcal{H}_K$ 是可数的, $\mathcal{H}_K$ 的元组成 K 的 fsn 覆盖 (定义见推论 2.4 前) 的全体是可数的，记为 $\Phi=\{\mathcal{H}_i: i\in\mathbb{N}\}$, 其中对于每一 $i\in\mathbb{N}$, $\mathcal{H}_i=\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_i}$ 是 K 的 fsn 覆盖，即存在由 K 的非空闭集组成的 K 的有限覆盖 $\mathcal{F}_i=\{F_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma_i}$ 使得每一 H_α 是 F_α 的序列邻域. 置

$$L=\{(\alpha_i)\in\prod_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i:\bigcap_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i}\neq\varnothing\}.$$

(a) L 是 $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 的闭集，从而 L 是 A^ω 的紧子集.

设 $\gamma=(\gamma_i)\in\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i\setminus L$, 则 $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}}F_{\gamma_i}=\varnothing$. 由 K 的紧性，存在 $i_0\in\mathbb{N}$ 使得 $\bigcap\limits_{i\le i_0}F_{\gamma_i}=\emptyset$. 令 $W=\{(\beta_i)\in\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i:$ 对于 $i\le i_0$ 有 $\beta_i=\gamma_i\}$, 则 W 是 $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 中含点 γ 的开集且 $W\cap L=\varnothing$. 所以 L 是 $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_i$ 的闭集.

(b) 若 $(\alpha_i)\in L$ 且 $x\in\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}}F_{\alpha_i}$, 则 $\{H_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网且每一 H_{α_i} 是 x 的序列邻域.

设 V 是 x 在 X 中的邻域, 由于 K 是 X 的正则子空间, 存在 x 在 K 中的开邻域 W 使得 $\overline{W}=\mathrm{cl}_K(W)\subset V$. 应用推论 2.4 的性质 $(\star)$ 于 K 的外 sn 网 $\mathcal{H}_K$ 及 K 的紧子集 $\overline{W}$, 存在 $\mathcal{H}_K$ 的有限子集 $\mathcal{H}'$ 使得 $\mathcal{H}'$ 是 $\overline{W}$ 的 fsn 覆盖且 $\cup\mathcal{H}'\subset V$. 又因为 K 的紧子集 $K\setminus W\subset X\setminus\{x\}$, 仍应用推论 2.4 于 K 的紧子集 $K\setminus W$, 存在 $\mathcal{H}_K$ 的有限子集 $\mathcal{H}''$ 使得 $\mathcal{H}''$ 是 $K\setminus W$ 的 fsn 覆盖且 $\cup\mathcal{H}''\subset X\setminus\{x\}$. 令 $\mathcal{H}^*=\mathcal{H}'\cup\mathcal{H}''$, 则 $\mathcal{H}^*$ 是 K 的 fsn 覆盖. 于是存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathcal{H}_k=\mathcal{H}^*$. 由于 $x\in F_{\alpha_k}\subset H_{\alpha_k}\in\mathcal{H}_k$, 所以 $H_{\alpha_k}\in\mathcal{H}'$, 故 $H_{\alpha_k}\subset V$. 从而 $\{H_{\alpha_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 x 在 X 中的网. 这时每一 $H_{\alpha_i}\supset F_{\alpha_i}\ni x$ 且 H_{α_i} 是 F_{α_i} 的序列邻域，从而 H_{α_i} 是 x 的序列邻域.

(c) $L\subset M$ 且 $f(L)\subset K$.

设 $\gamma=(\gamma_i)\in L$, 则 $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}}F_{\gamma_i}\neq\varnothing$. 取定 $x\in\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}}F_{\gamma_i}$. 显然, $x\in K$. 由 (b), $\gamma\in M$ 且 $f(\gamma)=x$, 从而 $L\subset M$ 且 $f(L)\subset K$.

(d) 若 $x\in K$, 则存在 $\gamma\in L$ 满足：如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 那么存在 $a_n\in f^{-1}(x_n)$, 使得在 M 中序列 $\{a_n\}$ 收敛于 γ. 从而, $K\subset f(L)$.

对于每一 $i\in\mathbb{N}$, 由于 $\mathcal{F}_i$ 覆盖 $K\ni x$, 存在 $\gamma_i\in\Gamma_i$ 使得 $x\in F_{\gamma_i}$. 从而 $x\in\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}}F_{\gamma_i}$. 令 $\gamma=(\gamma_i)$, 则 $\gamma\in L$. 由 (b), $f(\gamma)=x$. 对于每一 $n\in\mathbb{N}$, 置 $B_n=\{(\beta_i)\in M:$ 对 $i\le n$ 有 $\beta_i=\gamma_i\}$. 那么 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 γ 在 M 中下降的邻域基，且对每一 $n\in\mathbb{N}$ 有 $f(B_n)=\bigcap\limits_{i\le n}H_{\gamma_i}$.

事实上，设 $\beta=(\beta_i)\in B_n$, 那么 $f(\beta)\in\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}}H_{\beta_i}\subset\bigcap\limits_{i\le n}H_{\beta_i}=\bigcap\limits_{i\le n}H_{\gamma_i}$, 所以 $f(B_n)\subset\bigcap\limits_{i\le n}H_{\gamma_i}$. 再设 $z\in\bigcap\limits_{i\le n}H_{\gamma_i}$, 由于 $\mathcal{H}_{\{z\}}$ 是 z 在 X 中的网, 可选取 z 在 X 中的网 $\{H_{\delta_i}\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}$, 使当 $i\le n$ 时有 $\delta_i=\gamma_i$. 令 $\delta=(\delta_i)\in A^\omega$, 那么 $\delta\in B_n$ 且 $z=f(\delta)$, 于是 $\bigcap\limits_{i\le n}H_{\gamma_i}\subset f(B_n)$.

由 (b), 每一 H_{γ_i} $(i\le n)$ 是 x 的序列邻域，于是 $f(B_n)$ 是 x 的序列邻域. 因为 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 由引理 3.3, 存在 $a_n\in f^{-1}(x_n)$, 使得在 M 中序列 $\{a_n\}$ 收敛于 γ.

综上所述, f 是 1-scc 映射.

(2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的，下面证明 (3) $\Rightarrow$ (1).

设 $f: M\to X$ 是 scc 映射，其中 M 是可度量化空间. 由引理 3.2, X 的每一紧子集可度量化. 对 X 中的任一紧子集 K, 存在 M 中的紧子集 L 满足 f 是 scc 映射的要求. 由于 M

是可度量空间，设 L 在 M 中的可数邻域基是 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 往证 $\{f(V_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的可数 sn 网.

(e) 由于 $f(L)=K$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$, $K\subset f(V_n)$. 设 X 中的开集 $U\supset K$, 则 $L\subset f^{-1}(K)\subset f^{-1}(U)$, 于是存在 $m\in\mathbb{N}$ 使 $V_m\subset f^{-1}(U)$, 所以 $f(V_m)\subset U$.

(f) $\forall\ x\in K$, 若 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 由 scc 映射的定义，则存在 M 中的序列 $\{a_n\}$ 收敛于 $a\in L$ 且每一 $a_n\in f^{-1}(x_n)$. 对 $\forall\ m\in\mathbb{N}$, $a\in L\subset V_m$, 于是 $\{a_n\}$ 是终于 V_m 的，所以序列 $\{x_n\}$ 也是终于 $f(V_m)$ 的，即 $f(V_m)$ 是 K 在 X 中的序列邻域. ▍

下列推论用 1-scc 映射， scc 映射来重述 Michael 和 Nagami 的定理 1.1.

映射 $f:X\to Y$ 称为伪开映射, 若 X 的开集 $U\supset f^{-1}(y)$, 则 $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

显然，开映射是伪开映射，伪开映射是商映射.

空间 X 称为 Fréchet 空间 [3], 若 $x\in\overline{A}\subset X$, 则存在 A 中的序列收敛于 x.

引理 3.6[10, 引理 1.4.7] X 是 Fréchet 空间当且仅当 X 的每一点的序列邻域是该点的邻域.

推论 3.7 对于空间 X, 下述条件相互等价

(1) X 是某一可度量化空间的紧覆盖、开映像;

(2) X 是某一可度量化空间的 1-scc 、伪开映像;

(3) X 是某一可度量化空间的 scc 、伪开映像;

(4) X 是每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数基的空间.

证 定理 1.1 表明 (1) $\Leftrightarrow$ (4). 由推论 3.4, (1) $\Rightarrow$ (2). (2) $\Rightarrow$ (3) 是显然的. 下面证明 (3) $\Rightarrow$ (4). 设空间 X 是某一可度量化空间的 scc 、伪开映像，由定理 3.5, 空间 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数的 sn 网. 由于度量空间是 Fréchet 空间，且伪开映射保持 Fréchet 空间性质不变，所以 X 是 Fréchet 空间. 再由引理 3.6, X 的每一紧子集在 X 中具有可数基. ▍

问题 3.8 紧空间上的 scc 映射是否是 1-scc 映射？

4 弱基

本节把上两节的内容应用于紧子集具有可数弱基空间的研究, 同时给出几个例子说明相关空间与映射之间的一些不蕴含关系.

回忆弱基的概念. 空间 X 的子集族 $\mathcal{B}$ 称为 X 的弱基 (weak base)[1], 如果 $\mathcal{B}=\bigcup\limits_{x\in X}\mathcal{B}_x$, 其中每一 $\mathcal{B}_x$ 满足

(1) $x\in\bigcap\mathcal{B}_x$;

(2) 如果 $U,V\in\mathcal{B}_x$, 则存在 $W\in\mathcal{B}_x$ 使得 $W\subset U\cap V$;

(3) O 是 X 的开集当且仅当对于每一 $x\in O$, 存在 $B\in\mathcal{B}_x$ 使得 $B\subset O$.

显然，弱基是邻域基概念的深化. 弱基与 sn 网是通过序列空间建立联系的. 空间 X 的子集 P 称为序列开集，若 P 是其中每一点的序列邻域. 每一序列开集是开集的空间称为序列空间 (sequential space)[3].

引理 4.1[9] 设 $\mathcal{B}$ 是空间 X 的子集族.

(1) 若 $\mathcal{B}$ 是 X 的弱基，则 $\mathcal{B}$ 是 X 的 sn 网.

(2) 若 $\mathcal{B}$ 是序列空间 X 的 sn 网，则 $\mathcal{B}$ 是 X 的弱基.

定义 4.2 设 $\mathcal{B}=\bigcup\limits_{x\in X}\mathcal{B}_x$ 是空间 X 的弱基. 对于 $A\subset X$, 有

(a) 集族 $\bigcup_{x\in A}\mathcal{B}_x$ 称为 A 在 X 中的外弱基 (outer weak base).

(b) X 的子集列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 称为 A 在 X 中的可数弱基，若它满足

(1) 每一 V_n 是 A 在 X 中的弱邻域 (weak neighborhood), 即对于每一 $n\in\mathbb{N}$ 和每一 $x\in A$, 存在 $B\in\mathcal{B}_x$ 使得 $B\subset V_n$;

(2) 对 X 中每一包含 A 的开集 V, 存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $V_n\subset V$.

子集 A 的外基是 A 的外弱基， A 的外弱基是 A 的外 sn 网．另一方面，对于拓扑空间 X, 点 $x\in X$ 的序列邻域是完全确定的，但 x 的弱邻域与选定的弱基有关．在定义 4.2 中, A 的外弱基及 A 在 X 中的可数弱基均与空间 X 中选定的弱基有关．这也表明 sn 网具有较好的稳定性，与弱基相关的概念较难处理.

由定理 2.3 及引理 4.1 得下述定理，它给出了问题 1.2 (2) 中两个条件之间的精确关系.

定理 4.3 设 K 是空间 X 的紧子集，则 K 可度量化且在 X 中具有可数弱基当且仅当存在 K 在 X 中的可数外弱基 $\mathcal{H}$, 满足: $\mathcal{H}$ 的每一元形如 $U\cap V$, 其中 U 是 X 的开集， V 是 K 在 X 中的弱邻域.

证 充分性的证明同定理 2.3, 只须把序列邻域换为弱邻域即可．下证必要性.

设 $\mathcal{B}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{B}_x$ 是空间 X 的弱基，子集列 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 K 在 X 中的可数弱基．由引理 4.1 及定理 2.3, 存在 K 在 X 中的可数外 sn 网 $\mathcal{H}=\bigcup_{x\in K}\mathcal{H}_x$, 满足： $\mathcal{H}$ 的每一元形如 $U\cap V$, 其中 U 是 X 的开集， V 是 K 在 X 中的弱邻域 (定理 2.3 中为序列邻域，由于这序列邻域是有限个 V_n 的交，所以在此是弱邻域). 令 $\mathcal{W}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{W}_x$, 其中

$$\mathcal{W}_x=\begin{cases}\mathcal{H}_x, \text{如果 } x\in K,\\ \mathcal{B}_x, \text{如果 } x\in X\setminus K.\end{cases}$$

下面证明 $\mathcal{W}$ 是 X 的弱基．这只须验证：对于 $O\subset X$, O 是 X 的开集当且仅当对于每一 $x\in O$, 存在 $W\in\mathcal{W}_x$ 使得 $W\subset O$.

如果 O 是 X 的开集且 $x\in O$, 由于 $\mathcal{W}_x$ 是 x 在 X 中的网，存在 $W\in\mathcal{W}_x$ 使得 $W\subset O$. 如果 O 满足对于每一 $x\in O$, 存在 $W\in\mathcal{W}_x$ 使得 $W\subset O$, 于是当 $x\in K$ 时，存在 $H\in\mathcal{H}_x$ 使得 $x\in H\subset O$, 记 $H=U\cap V$, 其中 U 是 X 的开集， V 是 K 在 X 中的弱邻域．由定义 4.2, 存在 $B\in\mathcal{B}_x$ 使得 $B\subset W\subset O$. 因为 $\mathcal{B}$ 是 X 的弱基，所以 O 是 X 的开集．故， $\mathcal{H}$ 是 K 在 X 中的可数外弱基. ∎

由于满足定理 4.3 条件的空间未必是序列空间，所以定理 4.3 不是定理 2.3 的直接推论.

引理 4.4[16] 设 $f:X\to Y$ 是序列覆盖映射．若 Y 是序列空间，则 f 是商映射.

下述定理回答了问题 1.2 (1).

定理 4.5 对于空间 X, 下述条件相互等价

(1) X 是某一可度量化空间的 1-scc 、商映像;

(2) X 是某一可度量化空间的 scc 、商映像;

(3) X 是每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数弱基的空间.

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的. (2) $\Rightarrow$ (3). 设 X 是某一可度量化空间的 scc 、商映像．由定理 3.5, X 是每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 sn 网的空间．由于度量空间是序列空间且商映射保持序列空间性质，于是 X 是序列空间．由引理 4.1, X 的每一紧子集在 X 中具有可数弱基.

(3) $\Rightarrow$ (1). 设 X 是每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数弱基的空间．由定理 3.5 及引理 4.1, 存在度量空间 M 及 1-scc 映射 $f:M\to X$. 由于空间 X 的每一点具有可数弱基,

即 X 是弱第一可数空间，从而 X 是序列空间 [17]. 由引理 4.4, f 是商映射. 故 X 是可度量化空间的 1-scc 、商映像. ▌

下述例子否定回答了问题 1.2 (2), 同时说明在定理 2.3 、推论 2.4 和定理 4.3 中的一些附加条件是必需的.

例 4.6 Arens 空间 S_2

(1) 可分度量空间的 1 序列覆盖、紧覆盖、商、有限到一映像;

(2) 存在具有可数外弱基的紧子集 K, 在 S_2 中不具有可数 sn.

记 $S_2 = \{0\} \cup \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^2$. 对于每一 $n, m, k \in \mathbb{N}$, 令 $V(n,m) = \{n\} \cup \{(n,k) : k \geq m\}$. S_2 赋予下列拓扑，称为 Arens 空间： $\mathbb{N}^2$ 中的点是孤立点；对于 $n \in \mathbb{N}$, 点 n 的邻域基元形如 $V(n,m)$, 其中 $m \in \mathbb{N}$; 点 0 的邻域基元形如 $\{0\} \cup (\bigcup \{V(n, m_n) : n \geq i\})$, 其中 $i, m_n \in \mathbb{N}$.

注意到，在 S_2 中不存在 $\mathbb{N}^2$ 中的序列收敛于 0.

置

$$\mathcal{B}_x = \begin{cases} \{\{x\}\}, & \text{如果 } x \in \mathbb{N}^2, \\ \{V(x,m) : m \in \mathbb{N}\}, & \text{如果 } x \in \mathbb{N}, \\ \{P_m : m \in \mathbb{N}\}, & \text{如果 } x = 0, \end{cases}$$

其中 $P_m = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N} : n \geq m\}$. 则 $\bigcup\limits_{x \in S_2} \mathcal{B}_x$ 是 S_2 的弱基. 从而， S_2 具有可数弱基.

(1) 令 $M_1 = \{0\} \cup \mathbb{N}$, 赋予下述拓扑：$\mathbb{N}$ 中的点是孤立点; 点 0 的邻域基元形如 $\{0\} \cup \{k \in \mathbb{N} : k \geq m\}$, 其中 $m \in \mathbb{N}$. 则 M_1 是紧度量空间.

令 $M_2 = \mathbb{N} \times (\{0\} \cup \mathbb{N})$, 赋予下述拓扑： $\mathbb{N}^2$ 中的点是孤立点；对于 $n \in \mathbb{N}$, 点 $(n,0)$ 的邻域基元形如 $\{(n,0)\} \cup \{(n,k) : k \geq m\}$, 其中 $m \in \mathbb{N}$. 则 M_2 是可分度量空间.

置 $M = M_1 \bigoplus M_2$, 则 M 是可分的度量空间. 定义 $f : M \to S_2$ 如下

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{如果 } x \in M_1 \bigoplus (M_2 \setminus (\mathbb{N} \times \{0\})), \\ n, \text{如果 } x = (n,0) \in \mathbb{N} \times \{0\}. \end{cases}$$

则 f 是 1 序列覆盖、紧覆盖、商、有限到一映射.

(2) 令 $K = \{0\} \cup \mathbb{N}$. 显然， K 是 S_2 的紧子集. 因为 K 是可数集，所以 $\bigcup\limits_{x \in K} \mathcal{B}_x$ 是 K 在 S_2 中的可数外弱基. 若 K 在 S_2 中具有可数 sn 网，设 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 K 在 S_2 中的可数 sn 网. 对于每一 $n \in \mathbb{N}$, $n \in K \subset U_n$, 于是 U_n 是 n 在 S_2 中的序列邻域，由于序列 $\{(n,m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ 收敛于 n, 所以存在 $m_n \in \mathbb{N}$ 使得 $(n, m_n) \in U_n$. 置 $U = S_2 \setminus \{(n, m_n) : n \in \mathbb{N}\}$, 则 U 是 K 在 S_2 中的邻域且每一 $U_n \not\subset U$. 因此 $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 不是 K 在 S_2 中的可数 sn 网，矛盾. 从而， K 在 S_2 中也不具有可数弱基.

下例说明定理 3.5 的条件严格弱于定理 4.5 的条件.

例 4.7 存在非序列空间 X: 每一紧子集可度量化且在 X 中有可数 sn 网.

让 $X = \mathbb{N} \cup \{p\}$, 其中 $p \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, 赋予 $\beta\mathbb{N}$ 的子空间拓扑. 由于 X 中不存在非平凡的收敛序列，所以 X 的紧子集都是有限集且每一单点集均是 X 的序列开集. 这说明 X 的每一紧子集可度量化且在 X 中具有可数 sn 网，但 X 不是序列空间. 从而， X 不是度量空间的商映像.

如果让 M 是集 X 赋予离散拓扑的空间，定义 $f : M \to X$ 是恒等映射，则 M 是度量空间， f 是 1-scc 映射，但是 f 不是商映射.

下例说明定理 4.5 的条件严格弱于推论 3.7 的条件.

例 4.8 存在非 Fréchet 空间 X: 每一紧子集可度量化且在 X 中有可数弱基.

令 $\mathbb{I}=[0,1]$, $\mathbb{S}_1=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\}$. 定义 $X=\mathbb{I}\times\mathbb{S}_1$, 并赋予 X 下述拓扑 [5]: 子集 $\mathbb{I}\times(\mathbb{S}_1\setminus\{0\})$ 作为 X 的子空间具有欧氏拓扑; 每一 $(t,0)\in\mathbb{I}\times\{0\}$ 在 X 中的邻域基元形如

$$\{(t,0)\}\cup(\cup\{V(t,k):k\geq n\}),$$

其中 $n\in\mathbb{N}$, 且 $V(t,k)$ 是 $(t,\frac{1}{k})$ 在子空间 $\mathbb{I}\times\{\frac{1}{k}\}$ 中的开邻域.

(1) X 不是 Fréchet 空间. 因为 $(0,0)\in\overline{(\mathbb{I}\setminus\{0\})\times\mathbb{S}_1}$, 而在 X 中收敛于 $(0,0)$ 的任一序列只能有有限项不属于 $\{0\}\times\mathbb{S}_1$, 所以不存在 $(\mathbb{I}\setminus\{0\})\times\mathbb{S}_1$ 中的序列收敛于 $(0,0)$.

(2) X 是某一可度量化空间的 1-scc 、商映像.

置

$$M=(\oplus\{\mathbb{I}\times\{\frac{1}{n}\}:n\in\mathbb{N}\})\oplus(\oplus\{\{t\}\times\mathbb{S}_1:t\in\mathbb{I}\}),$$

其中每一 $\mathbb{I}\times\{\frac{1}{n}\}$ 具有欧氏拓扑, 每一 $\{t\}\times\mathbb{S}_1$ 具有欧氏拓扑. 则 M 是可度量化空间. 让 $f:M\to X$ 是自然映射, 则 f 是商映射 [5]. 下证 f 是 1-scc 映射.

设 K 是 X 的非空紧子集. 由于 $\mathbb{I}\times\{0\}$ 是 X 的闭离散子空间, 所以 $K\cap(\mathbb{I}\times\{0\})$ 是有限集, 记为 $\{(t_i,0)\}_{i\leq m}$. 令 $K_0=\bigcup\limits_{i\leq m}(\{t_i\}\times\mathbb{S}_1)$. 则若存在 $n\in\mathbb{N}$ 使得 $K\subset K_0\cup(\bigcup\limits_{j\leq n}(\mathbb{I}\times\{\frac{1}{j}\}))$ (如, 见文献 [8, 例 2.8.16]).

置

$$L=(\bigoplus_{i\leq m}((\{t_i\}\times\mathbb{S}_1)\cap K))\oplus(\bigoplus_{j\leq n}((\mathbb{I}\times\{\frac{1}{j}\})\cap K)),$$

那么 L 是 M 的紧子集, 且 $f(L)=K$.

让 $x\in K\subset X$.

若 $x\in\bigcup\limits_{j\leq n}(\mathbb{I}\times\{\frac{1}{j}\})$, 则存在 $j\leq n$ 和 $a\in L$ 使得 $a\in(\mathbb{I}\times\{\frac{1}{j}\})\cap f^{-1}(x)$. 如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 则 $\{x_n\}$ 只有有限项不在 $\mathbb{I}\times\{\frac{1}{j}\}$ 中, 所以可以取定 $a_n\in f^{-1}(x_n)$, 使得序列 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

若 $x\in K_0\setminus(\bigcup\limits_{j\leq n}(\mathbb{I}\times\{\frac{1}{j}\}))$, 则存在唯一的 $i\leq m$ 和 $s\in\mathbb{S}_1$ 使得 $x=(t_i,s)$, 从而存在 $a\in(\{t_i\}\times\mathbb{S}_1)\cap f^{-1}(x)$, 则 $a\in L$. 如果 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x, 则 $\{x_n\}$ 只有有限项不在 $\{t_i\}\times\mathbb{S}_1$ 中, 所以可以取定 $a_n\in f^{-1}(x_n)$, 使得序列 $\{a_n\}$ 收敛于 a.

由定理 4.5, X 的每一紧子集可度量化且在 X 中有可数弱基.

因为具有点可数基的空间是度量空间的紧覆盖的开映像 [13], 所以具有点可数基的空间中的每一紧子集具有可数外基. 本文最后提出下述问题.

问题 4.9 具有点可数弱基的空间中的每一紧子集是否具有可数外弱基?

参 考 文 献

[1] Arhangel'skiĭ A V. Mappings and spaces. Russian Math Survey, 1966, **21**: 115–162

[2] Chen Huaipeng. Compact-coverings maps and k-networks. Proc Amer Math Soc, 2003, **131**: 2623–2632

[3] Franklin S P. Spaces in which sequences suffice. Fund Math, 1965, **57**: 107–115

[4] 高国士. 拓扑空间论 (第二版). 北京: 科学出版社, 2008

[5] Gruenhage G, Michael E A, Tanaka Y. Spaces determined by point-countable covers. Pacific J Math, 1984, **113**: 303–332

[6] Hart K P, Nagata J, Vaughan J E. Encyclopedia of General Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 2004

[7] 李克典．双层空间的刻画．数学物理学报， 2010, **30A**: 649–655
[8] 林寿．广义度量空间与映射．北京：科学出版社， 1995
[9] 林寿．关于序列覆盖 s 映射．数学进展， 1996, **25**: 548–551
[10] 林寿．点可数覆盖与序列覆盖映射．北京：科学出版社， 2002
[11] Liu Chuan. On weak bases. Topology Appl, 2005, **150**: 91–99
[12] Michael E A. $\aleph_0$-spaces. J Math Mech, 1966, **15**: 983–1002
[13] Michael E A, Nagami K. Compact-covering images of metric spaces. Proc Amer Math Soc, 1973, **37**: 260–266
[14] van Mill J, Reed G M. Open Problems in Topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B V, 1990
[15] 彭良雪，王丽霞．关于 CSS 空间及相关结论．数学物理学报， 2010, **30A**: 358–363
[16] Siwiec F. Sequence-covering and countably bi-quotient maps. General Topology Appl, 1971, **1**: 143–154
[17] Siwiec F. On defining a space by a weak base. Pacific J Math, 1974, **52**: 233–245
[18] Tkachuk V V. Monolithic spaces and D-spaces revisited. Topology Appl, 2009, **156**: 840–846

Weak Bases and the Compact-Covering Images of Metric Spaces

[1,2]Lin Shou [3]Zhang Jing
([1]*Department of Mathematics and Information Science, Zhangzhou Normal University, Zhangzhou 363000;*
[2]*Institute of Mathematics, Ningde Normal University, Ningde 352100;*
[3]*Institute of Mathematics, Nanjing Normal University, Nanjing 210046*)

Abstract: In this paper some equivalent conditions of a space in which each compact subset is metrizable and has a countable weak base in the space are obtained by means of *sn*-networks, the spaces are characterized as images of metric spaces under 1-*scc* (resp. *scc*) and quotient maps, and spaces in which each compact subset has a countable outer weak base are discussed, which generalized the classic result about compact-covering and open images of metric spaces by Michael and Nagami.

Key words: *sn*-networks; Weak bases; Outer *sn*-networks; Outer weak bases; Compact-covering maps; 1-sequence-covering maps; Quotient maps; 1-*scc*-maps; *scc*-maps.
MR(2000) Subject Classification: 54C10; 54D65; 54E20