黑龙江大学自然科学学报
第7卷 第2期 JOURNAL OF NATURAL SCIENCE Vol.7 No.2
1990年3月 OF HEILONGJIANG UNIVERSITY June, 1990

集值映射的一个应用

林 寿

(福建宁德师范专科学校数学系)

摘要 连续映射的逆映射是一个集值映射。本文以集值映射作为工具讨论具有局部可数k-网的正则T_1空间在完备映射下的逆不变性。

关键词 k-网 p-k-网 完备映射

讨论拓扑性质在各类连续映射作用下的不变性和逆不变性是一般拓扑学的重要课题之一。连续映射的逆映射是一个集值映射，Mancuso[1]利用集值映射研究了某些拓扑空间类在完备映射下的逆不变性。受该文启发，本文应用Mancuso的技巧证明了对于一个具有点可数p-k-网的正则T_1空间，如果它是一个具有局部可数k-网的正则T_1空间的完备逆象，那么它也是具有局部可数k-网的空间。

本文所论空间均指满足正则且T_1分离性公理的拓扑空间，映射是单值连续的满映射。设f：X→Y。称f是紧复盖映射，如果对于Y的紧子集K，存在X的紧子集L使f(L)=K。称f是ss-映射[2]，如果对于Y的任一点y，存在Y中含点y的开子集V使$f^{-1}(V)$是X的可分子空间。空间X的子集族$\mathbf{P}$称为X的k-网，如果对于X的紧子集K和X的含K的开子集U，存在$\mathbf{P}$的有限子族$\mathbf{P}^1$使$K\subset \cup\mathbf{P}^1\subset U$。空间X的子集族$\mathbf{P}$称为X的p-k-网，如果对于X的紧子集K和点$P\in X\backslash K$，存在$\mathbf{P}$的有限子族$\mathbf{P}^1$使$K\subset\cup\mathbf{P}^1\subset X\backslash\{P\}$。文[3]详细讨论了具有点可数p-k-网的空间（即[3]中条件(1.4)）的性质。具有可数k-网的空间称为κ_0-空间。

引理 1[2] 空间X具有局部可数k-网当且仅当X是一度量空间在紧复盖ss-映射下的象。

对应G：Z→X称为集值函数，如果对于Z中的任一点z，G(z)是X的子集合。设G：Z→X是一个集值函数，G称为上半连续的，如果对于X的任何闭子集A，$G^{-1}(A)$是Z的闭子集；G称为X-紧的，如果对于Z中的点z，G(z)是X中的紧子集。

定理 2 设f：X→Y是完备映射，Y具有局部可数k-网，那么X具有局部可数k-网当且仅当X具有点可数p-k-网。

证明 由于k-网是p-k-网，必要性是显然的。下面证明充分性。因为空间Y具有局部可数k-网，由引理1，存在度量空间Z和紧复盖ss-映射h：Z→Y。定义集值函数G：Z→X使$G(z)=f^{-1}(h(z))$。置

$$H=\{(z,x):x\in G(z)\}\subset Z\times X$$

收稿日期 1988－06－15

让 $P_1: H\to Z$ 和 $P_2: H\to X$ 是投影映射。由于 f 是完备映射，所以 f 是闭映射，于是对于 X 的任何闭子集 A，$G^{-1}(A)=h^{-1}(f(A))$ 是 Z 的闭子集，因而 G 是上半连续的集值函数。又由于 f 是完备映射，对于 Z 中的点 z，$G(z)=f^{-1}(h(z))$ 是 X 的紧子集，于是 G 是 X-紧的。即 G 是上半连续的 X-紧集值函数，因此 P_1 是完备映射（〔4〕，定理2.6(α)）。现在 Z 是可度量化空间，于是 Z 具有点可数基，因而 Z 具有点可数 p-k-网；又空间 X 具有点可数 p-k-网，所以 $Z\times X$ 具有点可数 p-k-网[3]，故 $Z\times X$ 的子空间 H 也具有点可数 p-k-网[3]。从 P_1 是完备映射及 Z 是可度量化空间知 H 是一个仿紧 M-空间，从而 H 是具有点可数 p-k-网的仿紧 M-空间，故 H 是一个可度量化子空间（〔3〕，推论3.7）。下面证明 P_2：$H\to X$ 是一个紧复盖的 ss-映射。一方面，设 K 是 X 的紧子集，那么 $f(k)$ 是 Y 的紧子集，由于 h：$Z\to Y$ 是紧复盖映射，所以存在 Z 的紧子集 L 使 $h(L)=f(K)$，因为 f，h 都是连续映射，所以 H 是 $Z\times X$ 的闭子空间（〔1〕，命题2.5），于是 $C=(L\times K)\cap H$ 是 H 的紧子集。显然，$P_2(C)\subset K$。对于 $x\in K$，由于 $h(L)=f(K)$，存在点 $z\in L$ 使 $h(z)=f(x)$，于是 $x\in f^{-1}(h(z))=G(z)$，因而 $(z,x)\in(L\times K)\cap H=C$ 且 $P_2((z,x))=x$，故 $P_2(C)=K$，即 P_2 是一个紧复盖映射。另一方面，对于 X 中的点 x，由于 Y 具有局部可数 k-网，存在点 $f(x)$ 在 Y 中的开邻域 V 使 $\overline{V}$ 使具有可数 k-网，即 $\overline{V}$ 是 Y 的 κ_0-子空间。置 $F=f^{-1}(\overline{V})$，那么 F 是 X 的闭子空间，于是 $f|_F$：$F\to\overline{V}$ 是完备映射。因为 $\overline{V}$ 是 κ_0-空间，所以 $\overline{V}$ 是一个 σ-空间（即具有 σ-局部有限网的空间），因而 $\overline{V}$ 是一个强 $\sum$-空间（即具有 σ-局部有限 $(mod K)$-网的空间）。而强 $\sum$-空间的完备逆象仍然是强 $\sum$-空间[5]，于是 F 是具有点可数 p-k-网的强 $\sum$-空间，所以 F 是一个 σ-空间（〔3〕，推论3.8），从而 F 具有 G_δ-对角线。因为 κ_0-空间的完备逆象是一个 κ_0-空间当且仅当它具有 G_δ-对角线[1]，所以 F 是一个 κ_0-空间，故 $f^{-1}(V)\subset F$ 是一个 κ_0-空间。又因为 $\overline{V}$ 是 Y 的 κ_0-子空间，所以 $\overline{V}$ 是一个遗传性的 $Lindelöf$ 空间[6]，于是 V 是 Y 的 $Lindelöf$ 子空间。而 h 是 ss-映射，并且可数多个可分子空间之并仍然是一个可分子空间，所以 $h^{-1}(V)$ 是 Z 的可分子空间。由于 Z 是度量空间，于是 $h^{-1}(V)$ 是一个可分度量空间，从而 $h^{-1}(V)$ 是一个 κ_0-空间。故 $h^{-1}(V)\times f^{-1}(V)$ 是 $Z\times X$ 的 κ_0-子空间，因而 $h^{-1}(V)\times f^{-1}(V)$ 是一个遗传可分空间[6]。由于

$$
\begin{aligned}
P_2^{-1}(f^{-1}(V)) &= \cup\{P_2^{-1}(x): x\in f^{-1}(V)\}\\
&= \cup\{h^{-1}f(x)\times\{x\}: x\in f^{-1}(V)\}\\
&\subset h^{-1}(f(f^{-1}(V)))\times f^{-1}(V)\\
&= h^{-1}(V)\times f^{-1}(V)
\end{aligned}
$$

所以 $P_2^{-1}(f^{-1}(V))$ 是可分空间，又由于 $f^{-1}(V)$ 是点 x 的开邻域，因而 P_2 是 ss-映射。总之，P_2 是从度量空间 H 到 X 上的紧复盖 ss-映射，由引理1，X 具有局部可数 k-网。证毕。

分析定理2的证明，易见 X 具有点可数 p-k-网的作用在于证明：(1) H 是 $Z\times X$ 的可度量化子空间；(2) $f^{-1}(\overline{V})=F$ 是一个 κ_0-子空间。现在去掉 X 具有点可数 p-k-网的条件而限制 f：$X\to Y$ 是一个有限到一的既开且闭的映射。这时 P_1：$H\to Z$ 也是有限到一的既开且闭的映射[1][4]，由于 Z 是度量空间，于是 H 是可度量化空间[1]。其次，由于 f 是有限到一的既开且闭的映射，于是 $f|_F$：$F\to\overline{V}$ 也是一个有限到一的既开且闭的映

射，而$\overline{V}$是一个κ_0-空间，所以F也是一个κ_0-子空间[1]。由此，我们得到如下定理。

定理 3 设f：$X\to Y$是有限到一的既开且闭的映射，Y具有局部可数k-网，那么X具有局部可数k-网。

文[1]例4.8构造了一个紧不可度量化空间X和定义于X上的一个有限到一的闭映射f使$f(x)=Y$是紧可度量化空间。因为紧度量空间具有可数基，所以Y具有局部可数k-网；又由于具有局部可数k-网的紧空间是可度量空间[3]，所以X不具有局部可数k网。这个例子说明了定理2中X具有点可数p-k-网，定理3中f是开映射的条件不可省去。

参考文献

[1] Mancuso V J. Inverse image and first countabilty. Gen Top Appl, 1972; 2: 29～44

[2] Lin shou (林寿). On a generalization of Michael's theorem. Northeastern Math J, 1988; 4 (2): 162～168

[3] Gruenhage G, Michael E, Tanaka Y. Spaces determined by point-countable covers. Pacific Jb Math, 1984; 113 (2): 303～332

[4] Borges C J R. A study of multivalued functions. Pacific J Math, 1967; 23: 451～461

[5] Nagami K. Σ-spaces. Fund Math, 1969; 65: 169～192

[6] Michael E. κ_0-spaces. J Meth Mech, 1966; 15: 983～1002

An Application of Set-valued Mappings

Lin shou

(Dept. of Maths, Ningde Teachers' College, Fujian)

Abstract In this paper, by using the theory of set-valued functions we prove that regular T_1 space with locally countable k-network is inversely preserved under perfect mapping if the domain has a point countable p-k-network.

Key words k-network, p-k-network, perfect mapping.

(上接第40页)

参考文献

[1] F A SZáSZ. Radlical of rings. Akadémiai Kiadò, Budapest, 1981 (also in German 1975)

[2] 陈培慈. 遗传根和强半单根的性质. 江西师范大学学报（自然科学版），1985; (1)

[3] 戴跃进. 关于环的根的遗传性和保序性. "环与代数的根论" 学术交流会交流资料，1984; 5

On the Close Radical for Intersection and Second-Rate Strong Semlisimpe Radical

Zhang Xianjiu

(Dept. of Maths, Qiqihar Normal College)

Abstract This paepr gives concepts on the close radical for intersection of ideals and second-rate strong semisimple radical F. A. SZášž's open problem 14 is solved

Key words Close radicalf or intersection, Second-rate, Stong semisimple radical.