第38卷第6期
2009年12月

数 学 进 展
ADVANCES IN MATHEMATICS

Vol.38, No.6
Dec., 2009

局部可分度量空间映像的新进展

林寿 [1,2,*]，蔡长勇 [3]，李进金 [1]

(1. 漳州师范学院数学与信息科学系，漳州，福建， 363000; 2. 宁德师范专科学校数学研究所，宁德，福建， 352100; 3. 广西师范学院数学与计算机科学系，南宁，广西， 530023)

摘要：局部可分度量空间的映像研究是广义度量空间理论的中心课题之一．本文围绕几个尚未解决的问题，论述了局部可分度量空间商 s 映像和商紧映像研究的主要进展．

关键词：局部可分；度量空间；商映射；序列覆盖映射； s 映射；紧映射；网

MR(2000) 主题分类： 54E40; 54E35; 54C10; 54D65 / **中图分类号**： O189.1

文献标识码： A　　**文章编号**： 1000-0917(2009)06-0657-07

0 引言

度量空间商映像问题的研究源自 Arhangel'skiĭ 的名作《映射与空间》 [1]，其中提出刻画度量空间的商 s 映像的著名问题． 1987 年， Y. Tanaka[2] 利用 cs^* 网的概念给出了一个满意的回答：具有点可数 cs^* 网的序列空间．至于可分度量空间的商映像， 1966 年， E. Michael[3] 已利用 k 网的概念获得了简单的刻画：具有可数 k 网的 k 空间．这些工作充实了映射与空间的理论，使度量空间映像问题的研究成为广义度量空间理论的活跃课题之一．

本文旨在描述局部可分度量空间映像的若干进展．局部可分度量空间介于可分度量空间与度量空间之间，对其商映像或商 s 映像的讨论似乎没有多少悬念．关于局部可分度量空间的商映象，在 1965 年， S. P. Franklin[4] 已证明了序列空间性质既刻画了一个度量空间的商映像，也刻画了一个局部可分度量空间的商映像．但是度量空间的商 s 映像未必是局部可分度量空间的商 s 映像 (如见本文例 3.4)，所以对局部可分度量空间的商 s 映像的探索势在必然．尽管早在 1956 年， A. H. Stone[5] 就研究了局部可分度量空间的开 s 映像性质和可分度量空间的商映像性质，但直到 1996 年，林寿和刘川 [6] 才获得第一个局部可分度量空间的商 s 映象的内在刻画．

定理 0.1[6]　对于拓扑空间 X，下列条件等价：

(1) X 是一个局部可分度量空间的商 s 映像；

(2) X 是序列空间，具有点可数覆盖 $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$，满足：每一 X_α 具有可数网 $\mathcal{P}_\alpha$，使对 X 中任一收敛序列 S，存在 $\alpha \in \Lambda$，$\mathcal{P}_\alpha$ 为 S 的某子序列的 cs 网．

相比于 Michael 的可分度量的商映像刻画和 Tanaka 的度量空间的商 s 映像刻画，上述结果仅只是一个刻画而已，既不美观也不简洁，是否有进一步利用的价值？

问题 0.2[7,8]　寻求局部可分度量空间商 s 映像的好的内在刻画．

易验证，局部可分度量空间的商 s 映像是具有由 cosmic 子空间组成的点可数 cs^* 网的序列空间 [6]．关于问题 0.2 的一个更为具体的表述，有下述问题．

问题 0.3 具有由 cosmic 子空间组成的点可数 cs^* 网的序列空间是否局部可分度量空间的商 s 映像？

收稿日期： 2008-11-27.
基金项目：国家自然科学基金 (No. 10571151, No. 10671173).
E-mail: * linshou@public.ndptt.fj.cn

若把问题 0.3 中的 cosmic 子空间加强为 $\aleph_0$ 子空间，那么问题 0.3 的回答是肯定的，即具有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数 cs^* 网的序列空间是局部可分度量空间的商 s 映像 [6]. 这导致下述新的问题.

问题 0.4[6,7] 局部可分度量空间的商 s 映像是否具有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数 cs^* 网？

这些都是至今尚未解决的问题. 也许期待证明在序列空间中，具有点可数 cs^* 网的 cosmic 空间是 $\aleph_0$ 空间. 这是不正确的，例子见文 [9] 的定理 2.2 和文 [10] 的 185 页.

另一方面, 可以从已知的度量空间的商 s 映像的刻画着手, 寻求局部可分度量空间的商 s 映像与度量空间的商 s 映像之间的差异, 从而过渡到所要解决的问题. 如 1987 年, N. V. Velichko[11] 提出了下述问题.

问题 0.5[11] 寻求拓扑性质 Ξ 使拓扑空间 X 是具有性质 Ξ 的一个度量空间的商 s 映像当且仅当 X 既是 Ξ 空间又是一个度量空间的商 s 映像.

就所要探讨的局部可分度量空间而言，由于局部可分度量空间的商 s 映像未必是局部可分的 (如见文 [12] 例 1.5.6), 所以问题 0.5 中的性质 Ξ 不适用于局部可分性. 但是在度量空间中，局部可分性有多种的等价形式，如果能发现一种便利的性质，它能满足问题 0.5 的要求，那也是寻求解决问题 0.2 及至问题 0.3, 问题 0.4 的一种重要途径. 如 1982 年， Y. Tanaka[13] 证明了拓扑空间 X 是一个局部紧度量空间的闭映像当且仅当 X 是一个度量空间的闭映像且 X 的每一第一可数的闭子空间是局部紧的. 这启发下述猜想的提出.

猜想 0.6[6] 拓扑空间 X 是一个局部可分度量空间的商 s 映像当且仅当 X 是一个度量空间的商 s 映像且 X 的每一第一可数的子空间是局部可分的.

局部可分度量空间作为一类重要的度量空间类，探讨其各类映像的 (精巧) 内在特征无疑增添了一定的复杂性，带来了一定的相似性. 20 世纪 80 年代起，伴随着 L. Foged 关于度量空间闭映像问题的彻底解决, 及 G. Gruenhage, E. Michael, Y. Tanaka 关于度量空间商 s 映像问题的系统研究 [12], 自 20 世纪 90 年代以来，局部可分度量空间的映像问题吸引着国际上一些点集拓扑学学者 (如 M. Sakai, Y. Tanaka, 刘川等) 的密切关注，为国内一般拓扑学研究工作者提供了一个展示才华的舞台，也常为硕士生或博士生选为毕业论文的研究课题. 为进一步理清脉络，抓住主干，本文围绕商映射、闭映射、 s 映射、紧映射、序列覆盖映射、紧覆盖映射等 “好的” 映射类，结合问题，综述关于局部可分度量空间映像问题研究的主要进展.

本文所论空间均为正则 T_1 的拓扑空间，映射指连续的满函数，未定义的术语与记号请参阅文 [12].

1 局部可分度量空间的序列覆盖 (紧覆盖)s 映像

由于在序列空间中覆盖型的映射能导出商映射 (参考文 [12] 引理 1.4.2), 所以问题 0.2 等的研究常与局部可分度量空间的序列覆盖 s 映射的刻画连于一体.

定理 1.1 对于空间 X, 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的序列覆盖， s 映像;

(2) X 具有点可数覆盖 $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 满足：每一 X_α 具有可数网 $\mathcal{P}_\alpha$, 使对 X 中任一收敛序列 S, 存在 $\alpha \in \Lambda$, $\mathcal{P}_\alpha$ 为 S 的 cs 网 [14];

(3) X 有由 cosmic 子空间组成的点可数 cs 网 [8];

(4) X 有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数 cs 网 [15,16];

(5) X 有点可数 cs 网，且有由 $\aleph_0$ 子空间组成的 so 覆盖 [17].

上述定理证明中的一个关键技巧：具有点可数 cs 网的 cosmic 空间是 $\aleph_0$ 空间 [18]. 但把 cs 网减弱为 cs^* 网结果不再成立. 定理 1.1 导出的下述推论是对问题 0.2– 问题 0.5 的部分回答.

推论 1.2[17]　对于空间 X, 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的序列覆盖，商 s 映像;

(2) X 既是局部 $\aleph_0$ 空间又是度量空间的序列覆盖，商 s 映像;

(3) X 是具有点可数 cs 网的局部 $\aleph_0$ 的序列空间.

定理 1.3[14]　对于空间 X, 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的序列商，s 映像;

(2) X 是局部可分度量空间的子序列覆盖，s 映像;

(3) X 具有点可数覆盖 $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 满足：每一 X_α 具有可数网 $\mathcal{P}_\alpha$, 使对 X 中任一收敛序列 S, 存在 $\alpha \in \Lambda$, $\mathcal{P}_\alpha$ 为 S 的某子序列的 cs 网.

定理 1.4[19]　对于空间 X, 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的伪序列覆盖，s 映像;

(2) X 具有点可数覆盖 $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 满足：每一 X_α 具有可数网 $\mathcal{P}_\alpha$, 使对 X 中任一收敛序列 S, 存在 S 的序列有限分解 $\{S_i : i \in I\}$, 适合对每一 $i \in I$, 存在 $\alpha_i \in \Lambda$, 使 $\mathcal{P}_{\alpha_i}$ 是 X_{α_i} 的子集 S_i 的 cs^* 网.

定理 1.5[20]　对于空间 X, 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的紧覆盖 s 映像;

(2) X 具有点可数覆盖 $\{X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$, 满足：每一 X_α 具有可数网 $\mathcal{P}_\alpha$, 使对 X 中任一紧集 K, 存在 K 的紧有限分解 $\{K_i : i \in I\}$, 适合对每一 $i \in I$, 存在 $\alpha_i \in \Lambda$, 使 $\mathcal{P}_{\alpha_i}$ 是 X_{α_i} 的子集 K_i 的 k 网.

上述定理 1.1(2), 定理 1.3(3), 定理 1.4(2) 和定理 1.5(2) 与定理 0.1(2) 相似，均使用“两层式”的刻画，较为复杂. 从定理结构或利用价值而言，上面一列结果只有定理 1.1 及推论 1.2 基本上达到了“好的”内在刻画的要求，但是与问题 0.2 相比，“序列覆盖映射”是较强的附加条件. 关于问题 0.2 的另一个较简单的部分回答如下.

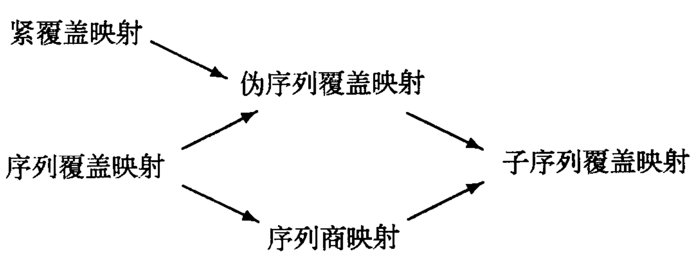
定理 1.6[21]　对于具有星可数 k 网的 k 空间 X, 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的商 s 映像;

(2) X 是局部可分度量空间的紧覆盖，商 s 映像;

(3) X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

前面述及的覆盖型映射在一般拓扑空间中的基本关系如下 [12]:



下列问题尚未解决.

问题 1.7[19]　局部可分度量空间的序列商，s 映像是否局部可分度量空间的伪序列覆盖，s 映像？

问题 1.8[15] 局部可分度量空间的伪序列覆盖 (紧覆盖), s 映像是否具有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数 cs^* 网 (k 网)?

2 局部可分度量空间的序列覆盖 (紧覆盖) 紧映像

在度量空间的映射理论中，当把 s 映射加强为紧映射时，常会产生较好的结果. 就局部可分度量空间的映像而言，下列问题的提出是很自然的.

问题 2.1[12] 寻求局部可分度量空间商紧映像的好的内在刻画.

问题 2.2[12] 局部可分度量空间的序列覆盖，紧映像是否等价于具有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点正则 cs 网的空间？

问题 2.3[22,23] 局部可分度量空间的商紧映像是否局部可分度量空间的伪序列覆盖，商紧映像？

问题 2.2 和问题 2.3 的回答都是肯定的.

定理 2.4[24] 对于空间 X, 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的序列覆盖，紧映像;

(2) X 具有由 cosmic 子空间组成的一致 sn 网;

(3) X 具有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点正则 cs 网;

(4) X 具有由 cosmic 子空间组成的 so 覆盖和一致 sn 网.

由此，可获得问题 2.1 和问题 0.5 的部分回答.

推论 2.5[24] 对于空间 X, 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的序列覆盖，商紧映像;

(2) X 既是局部 cosmic 空间又是度量空间的序列覆盖，商紧映像;

(3) X 具有由 cosmic 子空间组成的一致弱基.

定理 2.6[19,25] 对于空间 X, 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的伪序列覆盖，紧映像;

(2) X 是局部可分度量空间的子序列覆盖，紧映像;

(3) X 是局部可分度量空间的序列商，紧映像;

(4) X 具有点有限覆盖 $\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, 每一 X_α 有可数且点有限加细序列 $\{\mathcal{P}_{\alpha,n}\}$ 满足:

(a) $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的点星网，其中 $\mathcal{P}_n=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_{\alpha,n}$;

(b) 每一 $x\in X$, 存在有限子集 $\Lambda'\subset\Lambda$, 使对每一 $n\in\mathbb{N}$, $\mathrm{st}(x,\mathcal{P}(n,\Lambda'))$ 是 x 的序列邻域，其中 $\mathcal{P}(n,\Lambda')=\bigcup_{\alpha\in\Lambda'}\mathcal{P}_{\alpha,n}$.

由此，可获得局部可分度量空间商紧映像的刻画及问题 2.3 的肯定回答.

定理 2.7 对于空间 X, 下列条件等价:

(1) X 是局部可分度量空间的商紧映像;

(2) X 是局部可分度量空间的伪序列覆盖，商紧映像 [25];

(3) X 具有点有限覆盖 $\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, 每一 X_α 有可数且点有限覆盖序列 $\{\mathcal{P}_{\alpha,n}\}$ 使得 $\{\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{P}_{\alpha,n}\}$ 是 X 的弱展开 [6];

(4) X 是序列空间，具有点有限覆盖 $\{X_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, 每一 X_α 有可数且点有限加细的点星网 $\{\mathcal{C}_{\alpha_n}\}$ 满足: 对 X 的每一收敛于 $x\in X$ 的序列 S, 存在 $\alpha\in\Lambda$ 及 S 的子序列 T 使得 T 终于任一 $\mathrm{st}(x,\mathcal{C}_{\alpha_n})$[23].

近来，夏省祥 [26] 也获得了一个与定理 2.7(4) 相类似的局部可分度量空间的商紧映像的刻画. 这种 “两层式” 的表述达不到问题 2.1 的要求. 对于问题 2.1 的部分回答还有

定理 2.8[21] 若 X 是具有星可数 k 网的 k 空间，则 X 是局部可分度量空间的商紧映像当且仅当 X 不含闭子空间同胚于 S_ω.

对于局部可分度量空间的紧覆盖，紧映像有一些平行的刻画 [27,28]. 关于问题 2.1, 下述问题是期待解决的.

问题 2.9[24] 若序列空间 X 具有由点有限 cs^* 覆盖序列构成的点星网，其中覆盖由 cosmic 子空间组成， X 是否局部可分度量空间的商紧映像？

问题 2.10 X 具有由点有限 cs^* 覆盖序列构成的点星网，其中覆盖由 cosmic 子空间组成，X 是否局部可分度量空间的伪序列覆盖，紧映像？

3 局部可分度量空间的闭（闭 s）映像

本节讨论当映射从商映射加强为闭映射时，局部可分度量空间映像的较理想结果.

问题 3.1[29,30] 具有点可数可分 k 网的 Fréchet 空间是否局部可分度量空间的闭映像？

1997 年， M. Sakai[31] 肯定回答了上述问题. 由此，可导出局部可分度量空间的闭映像的系列结果.

定理 3.2 对于空间 X, 下列条件等价：

(1) X 是局部可分度量空间的闭映像;

(2) X 是度量空间的闭映像且 X 的每一第一可数子空间是局部可分的 [6];

(3) X 是具有 σ 遗传闭包保持的可分 k 网的 Fréchet 空间 [6,7];

(4) X 是具有由 $\aleph_0$ 子空间组成的 σ 遗传闭包保持的 k 网的 Fréchet 空间 [6];

(5) X 是具有星可数 k 网的 Fréchet 空间 [7,30];

(6) X 是具有星可数 k 网的 k 空间，且不含闭子空间同胚于 S_2 (见 [21]);

(7) X 是具有点可数的可分 k 网的 Fréchet 空间 [31];

(8) X 是具有 σ 紧有限 k 网的 Fréchet 空间，且 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的 [32].

局部可分度量空间的闭 s 映像的内容更为丰富，列举其中一些有特色的结果于下.

定理 3.3 对于空间 X, 下列条件等价：

(1) X 是局部可分度量空间的闭 s 映像;

(2) X 是局部可分度量空间的伪开， s 映像 [6,7,29,33,34];

(3) X 是度量空间的闭 s 映像且 X 的每一第一可数子空间是局部可分的 [6];

(4) X 是具有点可数的可分 cs^* 网的 Fréchet 空间 [6];

(5) X 是具有由 $\aleph_0$ 子空间组成的点可数 cs^* 网的 Fréchet 空间 [6];

(6) X 是具有点可数 cs^* 网的局部可分的 Fréchet 空间 [12];

(7) X 是具有局部可数 cs 网的 Fréchet 空间 [12];

(8) X 是具有局部可数 k 网的 Fréchet 空间 [29,33,34];

(9) X 是具有星可数 cs 网的 Fréchet 空间 [7];

(10) X 是具有 σ 离散的可分 cs 网的 Fréchet 空间 [35].

关于问题 0.5, 1987 年， N. V. Velichko[11] 证明了空间 X 是局部可分度量空间的伪开，s 映像当且仅当 X 既是局部可分空间又是度量空间的伪开， s 映像. 这结果即定理 3.3 中的 (2) $\Leftrightarrow$ (6).

下列例子否定回答了猜想 0.6 及在文献中的一些相关问题.

例 3.4[10,36] 存在 Fréchet 空间 Y 具有下列性质：

(1) Y 具有点可数的闭 cs 网和 k 网，从而 Y 是度量空间的序列覆盖，伪开， s 映像；

(2) Y 的每一个第一可数子空间是局部可分的；

(3) Y 没有点可数的可分 cs^* 网 (可分 k 网), 从而 Y 不是任何局部可分度量空间的商 s 映像；

(4) Y 没有星可数 k 网.

由定理 3.2, Y 不是任何度量空间的闭映像. 因而，例 3.4 的条件 (1) 和 (2) 不足以保证一个 Fréchet 空间是局部可分度量空间的闭映像.

定理 3.5[32] 具有点可数 k 网的 Fréchet 空间 X 是一个局部可分度量空间的闭映像当且仅当 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的，且 X 的 Lindelöf 闭子空间是可分的.

定理 3.6[37] 具有点可数 cs^* 网的 Fréchet 空间 X 是一个局部可分度量空间的闭 s 映像当且仅当 X 的每一第一可数的闭子空间是局部可分的，且 X 的 Lindelöf 闭子空间是可分的.

从例 3.4 可见，在定理 3.5 和定理 3.6 中，性质 "Lindelöf 闭子空间是可分的" 是必不可少的.

问题 3.7 若 X 是一个局部可分度量空间的商 s 映像，是否 X 的每一 Lindelöf 闭子空间是可分的？

问题 3.8 设 X 是一个度量空间的商 s 映像. 若 X 的每一第一可数的子空间是局部可分的，且 X 的每一个 Lindelöf 闭子空间是可分的，那么 X 是否局部可分度量空间的商 s 映像？

以上仅综述了局部可分度量空间映像的一个主要方面, 相关的工作是极其丰富的, 并且产生了一些有趣的研究途径, 这从一个侧面说明了该课题研究的生命力. 如在映射方面, 所讨论的映射至少还有 π 映射，σ 映射，ss 映射，局部可数映射，$msss$ 映射，$mssc$ 映射，cs 映射，k 映射，1 序列覆盖映射，2 序列覆盖映射等 [38-40]; 如在空间方面，研究可延伸到局部紧度量空间，仿紧局部紧空间，仿紧局部 Lindelöf 空间及由点可数集族、局部可数集族确定的空间等，恕不一一列举.

参考文献

[1] Arhangel'skiĭ, A.V., Mappings and spaces(in Russian), *Uspechi Mat. Nauk.*, 1966, 21(4): 133-184.

[2] Tanaka, Y., Point-countable covers and k-networks, *Topology Proc.*, 1987, 12: 327-349.

[3] Michael, E.A., $\aleph_0$-spaces, *J. Math. Mech.*, 1966, 15: 983-1002.

[4] Franklin, S.P., Spaces in which sequences suffice, *Fund. Math.*, 1965, 57: 107-115.

[5] Stone, A.H., Metrizability of decomposition spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1956, 7: 690-700.

[6] Lin Shou, Liu Chuan, Dai Mumin, Images on locally separable metric spaces, *Acta Math. Sinica, New Series*, 1997, 13: 1-8.

[7] Liu Chuan, Tanaka, Y., Spaces with certain compact-countable k-networks, and questions, *Questions Answers in General Topology*, 1996, 14: 15-37.

[8] Tanaka, Y., Xia Shengxiang, Certain s-images of locally separable metric spaces, *Questions Answers in General Topology*, 1996, 14(2): 217-231.

[9] Sakai, M., A special subset of the real line and regularity of weak topologies, *Topology Proc.*, 1998, 23(Spring): 281-287.

[10] Lin Shou, Sakai, M., Counterexamples on the images of locally separable metric spaces, *Topology Proc.*, 2007, 31: 181-187.

[11] Velichko, N.V., Quotient spaces of metrizable spaces(in Russian), *Sibirskii Mat. Zhurnal*, 1987, 28(4): 73-81.

[12] 林寿，点可数覆盖与序列覆盖映射，北京：科学出版社， 2002.

[13] Tanaka, Y., Closed images of locally compact spaces and Fréchet spaces, *Topology Proc.*, 1982, 7: 279-292.

[14] 周丽珍，局部可分度量空间的序列覆盖 s 象，数学学报， 1999, 42(4): 577-582.

[15] 李进金，局部可分度量空间的映象及其相关结果，山东大学博士学位论文， 2000.

[16] 李进金，蔡伟元，关于序列覆盖 s 映射的注记，数学学报， 2000, 43(4): 757-762.

[17] Lin Shou, Yan Pengfei, Sequence-covering maps of metric spaces, *Topology Appl.*, 2001, 109: 301-314.
[18] Liu Chuan, Tanaka Y., Spaces having σ-compact-finite k-networks, and related matters, *Topology Proc.*, 1996, 21: 173-200.
[19] 吕诚，李洪岩，局部可分度量空间的伪序列覆盖映射，大学数学，2005, 21(3): 52-56.
[20] 刘川，戴牧民，度量空间的紧覆盖 s- 像，数学学报，1996, 39(1): 41-44.
[21] Liu Chuan, Tanaka Y., Star-countable k-networks, and quotient images of locally separable metric spaces, *Topology Appl.*, 1998, 82: 317-325.
[22] Ikeda, Y., σ-strong networks and quotient compact images of metric spaces, *Questions Answers in General Topology*, 1999, 17: 269-279.
[23] Ikeda, Y., Liu Chuan, Tanaka Y., Quotient compact images of metric spaces, and related matters, *Topology Appl.*, 2002, 122: 237-252.
[24] 葛英，林寿，一致覆盖和度量空间的紧映象，数学学报，2004, 47(6): 1149-1154.
[25] Ge Ying, On compact images of locally separable metric spaces, *Topology Proc.*, 2003, 27(1): 351-360.
[26] 夏省祥，关于局部可分度量空间的 π 映射，山东大学学报 (理学版), 2007, 42(8): 86-90,94.
[27] 燕鹏飞，李克典，局部可分度量空间的紧复盖紧映象，纯粹数学与应用数学，1999, 15(1): 58-60.
[28] 燕鹏飞，映射理论及其在 Michael 选择中的应用，山东大学博士学位论文，2002.
[29] Ikeda, Y., Tanaka Y., Spaces having star-countable k-networks, *Topology Proc.*, 1993, 18: 107-132.
[30] Liu Chuan, Tanaka, Y., Spaces with a star-countable k-network, and related results, *Topology Appl.*, 1996, 74: 25-38.
[31] Sakai, M., On spaces with a star-countable k-network, *Houston J. Math.*, 1997, 23(1): 45-56.
[32] 林寿，刘川，$S_\omega \times X$ 的 k 空间性质及相关结果，数学学报，2006, 49(1): 29-38.
[33] Lin Shou, Spaces with a locally countable k-network, *Northeastern Math. J.*, 1990, 6(1): 39-44.
[34] 刘川，关于有局部可数 k- 网的空间，广西大学学报 (自然科学版), 1991, 16(1): 71-74.
[35] 王金华，周长银，局部可分度量空间的闭 s 映象，山东科技大学学报 (自然科学版), 2003, 22(1): 23-25.
[36] Sakai, M., Counterexamples on generalized metric spaces, *Sci. Math. Jpn.*, 2006, 64: 73-76.
[37] 林寿，燕鹏飞，局部可分度量空间闭 s 映象的注记，数学物理学报，2007, 27A(1): 171-175.
[38] Tanaka, Y., Li Zhaowen, Certain covering-maps and k-networks, and related matters, *Topology Proc.*, 2003, 27: 317-334.
[39] Li Jinjin, Jiang Shouli, Certain cs-images of locally separable metric spaces, *Kyungpook Math. J.*, 2003, 43: 127-134.
[40] Tanaka, Y., Ge Ying, Around quotient compact images of metric spaces, and symmetric spaces, *Houston J. Math.*, 2006, 32: 99-117.

Recent Advances on the Images of Locally Separable Metric Spaces

LIN Shou[1,2], CAI Zhangyong[3], LI Jinjin[1]

(*1. Dept. of Math. and Info. Sci., Zhangzhou Normal Univ., Zhangzhou, Fujian, 363000, P. R. China; 2. Institute of Mathematics, Ningde Teachers College, Ningde, Fujian, 352100, P. R. China; 3. Dept. of Math. and Com. Sci., Guangxi Teachers College, Nanning, Guangxi, 530023, P. R. China*)

Abstract: To study the images of locally separable metric spaces is one of the central questions in generalized metric spaces. Around some open problems, a survey of main advances on the quotient s-images and quotient compact images of locally separable metric spaces is given.

Key Words: locally separable; metric spaces; quotient maps; sequence-covering maps; s-maps; compact maps; networks