1 序列覆盖映射的注记

林 寿

(1*. 漳州师范学院数学系，漳州，福建， 363000；2. 宁德师范高等专科学校数学系，宁德，福建， 352100)

摘要： 本文的主要结果是构造两个例子分别说明 1 序列覆盖的商映射未必是弱开映射，度量空间上的序列覆盖 π 映射未必是 1 序列覆盖映射.

关键词： 序列覆盖映射；1 序列覆盖映射；弱开映射；π 映射；商映射
MR(1991) 主题分类： 54C10; 54D55; 54E40 / **中图分类号：** O189.1
文献标识码： A **文章编号：** 1000-0917(2005)04-0473-04

1 引言

广义度量空间研究的重要课题之一是通过映射探讨度量空间的象或逆映象的内在刻画. 为深化度量空间上开映射的性质，近年来讨论了与开映射相关的几类映射，如序列覆盖映射，1 序列覆盖映射，弱开映射等，取得了丰富的结果. 本文的目的是通过两个例子说明这些映射之间的不蕴含关系，给出了文献中两个问题的否定回答. 本文所论映射都是连续的满函数. 未定义的术语与记号以文 [1] 为准.

先回忆几个概念. 设空间 X 的子集族 $\mathcal{P}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{P}_x$ 满足：

(1) 对于每一 $x\in X, x\in\cap\mathcal{P}_x$ 且如果 $U,V\in\mathcal{P}_x$, 那么存在 $W\in\mathcal{P}_x$ 使得 $W\subset U\cap V$;

(2) X 的子集 G 是 X 的开集当且仅当对于每一 $x\in G$ 存在 $P\in\mathcal{P}_x$ 使得 $P\subset G$;

则 $\mathcal{P}$ 称为 X 的弱基 (weak base), 每一 $\mathcal{P}_x$ 称为 x 在 X 中的弱邻域基 (A. Arhangel'skii; 1966, 见文 [2] 定义 1.6.11). 设映射 $f:X\to Y$. f 称为弱开映射 [2] (weakly open mapping), 如果存在空间 Y 的弱基 $\bigcup_{y\in Y}\mathcal{P}_y$ 使得对于每一 $y\in Y$ 存在 $x\in f^{-1}(y)$ 满足：对于 x 在 X 中的任何邻域 U 存在 $P\in\mathcal{P}_y$ 使得 $P\subset f(U)$. 与弱开映射相关的映射是 1 序列覆盖映射. 映射 $f:X\to Y$ 称为 1 序列覆盖映射 [3], (1-sequence-covering mapping), 若对于 $y\in Y$ 存在 $x\in f^{-1}(y)$ 满足：如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y, 那么存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

文 [2] 证明了弱开映射与 1 序列覆盖映射的一些关系，如设映射 $f:X\to Y$, 那么

(1) 弱开映射是商映射;

(2) 若 f 是 1 序列覆盖映射，且 Y 是序列空间，则 f 是弱开映射;

(3) 若 X 是序列空间，且 f 是 1 序列覆盖的商映射，则 f 是弱开映射.

文 [2] 提出下述问题： 1 序列覆盖的商映射是否是弱开映射？本文的第一个例子给出了这一问题的否定回答.

收稿日期： 2003-07-08.
基金项目：国家自然科学基金资助课题 (No. 10271026), 福建省自然科学基金资助项目 (No. F0310010)，福建省高校科技资助项目 (No. K2001110).
E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn
* 作者现在通信地址.

引理 1 设 $\mathcal{P}=\bigcup_{y\in Y}\mathcal{P}_y$ 是 T_2 空间 Y 的弱基且 b 是 Y 的唯一非孤立点，则 $\mathcal{P}_b$ 是 b 在 Y 中的局部基.

证明 设 $U\in\mathcal{P}_b$, 要证明 U 是 Y 的开集，因为 b 是 Y 的唯一非孤立点，又只须证明 U 是 b 的邻域. 若不然，则 $b\in \mathrm{cl}(Y\setminus U)$, 于是存在由 $Y\setminus U$ 中点组成的网 (net)$\{z_d\}_{d\in D}$ 使得在 Y 中 $\{z_d\}_{d\in D}$ 收敛于 b, 从而 $\{z_d:d\in D\}$ 不是 Y 的闭集. 令 $V=Y\setminus\{z_d:d\in D\}$, 则 V 不是 Y 的开集. 然而，对于每一 $y\in V$, 若 $y\neq b$, 那么 $\{y\}$ 是 Y 的开集，存在 $P_y\in\mathcal{P}_y$ 使得 $P_y\subset\{y\}\subset V$; 若 $y=b$, 那么 $U\subset V$. 由弱基的定义，表明 V 是 Y 的开集，矛盾.

例 1 存在正则空间 X 和 1 序列覆盖的闭映射 $f:X\to Y$ 使得 f 不是弱开映射.

让 X_1 是序数集 ω_1+1. 集合 X_1 赋予下述拓扑：对于 $x\in X_1$, 若 $x\neq\omega_1$, 则 x 是 X_1 的孤立点；若 $x=\omega_1$, 则 x 在 X_1 中的邻域基取为 x 在 ω_1+1 中具有通常序拓扑的邻域基. 再取拓扑空间 $X_2=X_1$, 让 $X=X_1\bigoplus X_2$, 则 X 是正则空间. 设子空间 X_1 和 X_2 的非孤立点分别为 a_1 和 a_2, 让 $A=\{a_1,a_2\}$, 取 Y 为商空间 X/A, 再让 f 是从 X 到 Y 上的自然商映射，则 f 是闭映射. 由于 Y 中不存在非平凡的收敛序列，所以 f 是 1 序列覆盖映射. 若 f 是弱开映射，则存在空间 Y 的弱基 $\bigcup_{y\in Y}\mathcal{P}_y$ 使得对于每一 $y\in Y$ 存在 $x\in f^{-1}(y)$ 满足：对于 x 在 X 中的任何邻域 U 存在 $P\in\mathcal{P}_y$ 使得 $P\subset f(U)$. 取 $b=f(a_1)$, 由于 b 是 Y 的唯一的非孤立点，由引理 1, $\mathcal{P}_b$ 是 b 在 Y 中的局部基，因为 f 是弱开映射，存在 $x\in f^{-1}(b)$ 满足：对于 x 在 X 中的任何邻域 U 存在 $P\in\mathcal{P}_b$ 使得 $P\subset f(U)$, 这时 $x=a_1$ 或 $x=a_2$, 然而对于 X 中 a_1 的邻域 X_1 和 a_2 的邻域 X_2 都不存在 $P\in\mathcal{P}_b$ 使得 $P\subset f(X_1)$ 或 $P\subset f(X_2)$, 从而 f 不是弱开映射.

1 序列覆盖映射的引入受 1971 年 F. Siwiec[4] 定义的序列覆盖映射 (sequence-covering mapping) 概念的启发. 映射 $f:X\to Y$ 称为序列覆盖映射，若 $\{y_n\}$ 是 Y 中的收敛序列，那么存在 X 中的收敛序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$. 显然， 1 序列覆盖映射是序列覆盖映射. 就一般情形而言，序列覆盖映射未必是 1 序列覆盖映射 [3]. 对于映射 $f:X\to Y$, 设 (X,d) 是度量空间， f 称为 (关于度量 d 的) π 映射 (π-mapping with respect to d; V. I. Ponomarev, 1960; 见文 [1] 定义 2.9.1), 如果对于每一 $y\in Y$ 及 y 在 Y 中的邻域 U 有 $d(f^{-1}(y),X\setminus f^{-1}(U))>0$. 文 [5] 证明了空间 X 是某一度量空间的序列覆盖的 π 映象当且仅当 X 是某一度量空间的 1 序列覆盖的 π 映象，并且提出问题 (也见 [6], 问题 3.4.3): 度量空间上的序列覆盖、π 映射是否是 1 序列覆盖映射？下面利用 1991 年 Y. Tanaka 的技巧 (见文 [7], 引理 2.2), 构造例子说明这问题的回答是否定的.

例 2 对于单位闭区间 I, 存在局部紧的度量空间 M 和序列覆盖的商、π 映射 $f:M\to I$ 使得 f 不是 1 序列覆盖映射.

I 赋予欧几里得拓扑. 让 $\mathcal{S}$ 是 I 中所有包含有极限点的非平凡的收敛序列的集族. 记 $\mathcal{S}=\{C_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 让 M 是 I 的覆盖 $\mathcal{S}$ 的拓扑和，则 M 是局部紧的度量空间. 对于每一 $\alpha\in M$, 设 ρ_α 是 C_α 上的欧几里得度量，即对于每一 $x,y\in C_\alpha,\rho_\alpha(x,y)=|x-y|$, 定义 M 的度量 ρ 如下：对于每一 $x,y\in M$, 若存在 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $x,y\in C_\alpha$, 则定义 $\rho(x,y)=\rho_\alpha(x,y)$, 否则定义 $\rho(x,y)=1$. 设 $f:M\to I$ 是显然映射，则 f 是连续的满函数. 由 M 的构造，f 是序列覆盖映射，于是 f 还是商映射 (见 [1], 命题 2.1.16). 对于每一 $z\in I$ 及 z 在 I 中的邻域 U, 若 $\rho\big(f^{-1}(z),M\setminus f^{-1}(U)\big)=0$, 那么存在 M 中的序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 使得每一 $x_n\in f^{-1}(z),y_n\in M\setminus f^{-1}(U)$ 且 $\rho(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$, 于

是每一 $f(x_n)=z$ 且 $f(y_n)\notin U$, 且存在 $\alpha_n\in\Lambda$ 使得 $x_n,y_n\in C_{\alpha_n}$, 所以有 $\rho_{\alpha_n}(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$, 从而 $|f(x_n)-f(y_n)|<\frac{1}{n}$, 即在 I 中序列 $\{f(y_n)\}$ 收敛于 z, 矛盾. 因此 $\rho(f^{-1}(z),M\setminus f^{-1}(U))>0$, 即 f 是关于度量 ρ 的 π 映射. 最后, 证明 f 不是 1 序列覆盖映射. 若不然, 存在 $x\in f^{-1}(0)$ 满足: 如果 I 中的序列 $\{z_n\}$ 收敛于 0, 那么存在 M 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n\in f^{-1}(z_n)$. 由于 $x\in M$, 存在唯一的 $\alpha\in\Lambda$ 使得 $x\in C_\alpha\subset M$, 在 $I\setminus C_\alpha$ 中取定序列 $\{z_n\}$ 收敛于 0, 由假设, 存在 M 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n\in f^{-1}(z_n)$, 因为 C_α 是 M 的开子空间, 所以序列 $\{x_n\}$ 是终于 C_α 的, 于是 $z_n=f(x_n)\in C_\alpha\subset I$, 矛盾. 故 f 不是 1 序列覆盖映射.

文 [3] 还定义了强于 1 序列覆盖映射的 2 序列覆盖映射 (2-sequence-covering mapping). 映射 $f:X\to Y$ 称为 2 序列覆盖映射, 若对于每一 $y\in Y$ 及每一 $x\in f^{-1}(y)$, 如果 Y 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于 y, 那么存在 X 中收敛于 x 的序列 $\{x_n\}$ 使得每一 $x_n\in f^{-1}(y_n)$. 文 [3] 证明了下述结果.

引理 2 设 $f:X\to Y$, 考虑下述条件:

(1) f 是 2 序列覆盖映射;

(2) 对于 $x\in P\subset X$, 若 P 是 x 的序列邻域, 那么 $f(P)$ 是 $f(x)$ 的序列邻域;

(3) 若 P 是 X 的序列开集, 那么 $f(P)$ 是 Y 的序列开集.

则 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3). 若 X 是第一可数空间, 则 (3) $\Rightarrow$ (1).

引理 2 的假设还可更精确一些. 即假设 X 是 Fréchet 空间时, 引理 2 的条件 (3) $\Rightarrow$ (2). 事实上, 设 P 是点 x 在 X 中的序列邻域, 由于 X 是 Fréchet 空间, 所以 $x\in \mathrm{int}(P)$(见文 [1] 命题 1.6.16). 由 (3) 知 $f(\mathrm{int}(P))$ 是 Y 的序列开集, 从而 $f(P)$ 是 $f(x)$ 的序列邻域. 例 3 将说明这一结论中条件 "X 是 Fréchet 空间" 不可减弱为 "X 是序列空间", 从而也说明引理 2 中假设 "X 是第一可数空间" 的条件不可省略.

例 3 存在序列空间 X 和开、紧映射 $g:X\to Y$ 使得 g 不是 2 序列覆盖映射.

如文 [1] 中的例 2.8.16, 设 $X=I\times S_1$, 其中 I 是单位闭区间, $S_1=\{0\}\cup\{\frac{1}{n}:n\in N\}$. $I\times(S_1\setminus\{0\})$ 中的点具有欧几里得拓扑的邻域, 对 $(t,0)\in X$ 的邻域基元形如 $\{(t,0)\}\cup(\bigcup_{k\geq n}V(t,k))$, 其中 $V(t,k)$ 是 $(t,\frac{1}{k})$ 在欧几里得子空间 $I\times\{\frac{1}{k}\}$ 中的开邻域, 则 X 是正则的序列空间. 令 $g:X\to I$ 使得 $g(t,\frac{1}{n})=g(t,0)=t$, 其中 I 赋予欧几里得拓扑. 这时 g 是开、紧映射, 且 g 满足引理 2 的条件 (3). 因为对于每一 $t\in I$, $\{t\}\times S_1$ 是 $(t,0)$ 在 X 中的序列邻域, $g(\{t\}\times S_1)=\{t\}$ 不是 t 在 I 中的序列邻域, 所以 g 不满足条件 (2), 从而 g 不是 2 序列覆盖映射.

文 [3] 的例 3.10 和例 3.9 已分别说明开映射未必是 1 序列覆盖映射, 2 序列覆盖映射未必是商映射. 下述引理 (见文 [6], 定理 2.4.15) 却表明序列覆盖映射确实是度量空间中开映射的提炼. 设映射 $f:X\to Y$. f 称为几乎开映射 (almost open mapping), 若对于每一 $y\in Y$ 存在 $x\in f^{-1}(y)$ 满足: 对于 x 在 X 中的任何邻域 U, $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域. f 称为伪开映射 (pseudo-open mapping), 若 U 是集 $f^{-1}(y)$ 在 X 中的邻域, 则 $f(U)$ 是 y 在 Y 中的邻域.

引理 3 设 $f:X\to Y$. 若 X 是第一可数空间, 那么

(1) f 是几乎开映射当且仅当 f 是 1 序列覆盖的伪开映射;

(2) f 是开映射当且仅当 f 是 2 序列覆盖的商映射.

在例 1 中，由于空间 Y 不存在非平凡的收敛序列，所以映射 f 是 2 序列覆盖映射．因为闭映射是伪开映射，几乎开映射是弱开映射，所以例 1 也同时说明了， 1 序列覆盖的伪开映射未必是几乎开映射， 2 序列覆盖的伪开映射未必是开映射．即引理 3 中关于原象空间 X 是第一可数的条件是不可省略的．

参考文献

[1] 林寿．广义度量空间与映射 [M]．北京：科学出版社， 1995.
[2] 夏省祥．一类 g 第一可数空间的刻画 [J]．数学进展， 2000, 29(1): 61-64.
[3] 林寿．关于序列覆盖 s 映射 [J]．数学进展， 1996, 25(6): 548-551.
[4] Siwiec F. Sequence-covering mapping and countably bi-quotient mapping [J]. *General Topology Appl.*, 1971, 1: 143-154.
[5] 林寿，周友成，燕鹏飞．关于序列覆盖 π 映射 [J]．数学学报， 2002, 45: 1157-1164.
[6] 林寿．点可数覆盖与序列覆盖映射．北京：科学出版社， 2002.
[7] Tanaka Y. Symmetric spaces, g-developable spaces and g-metrizable spaces [J]. *Math. Japonica*, 1991, 36: 71-84.

A Note on 1-sequence-covering Mappings

LIN Shou

(1. Dept. of Math., Zhangzhou Teachers' College, Zhangzhou, Fujian, 363000, P. R. China; 2. Dept. of Math., Ningde Teachers' College, Ningde, Fujian, 352100, P. R. China)

Abstract: In this paper two examples are constructed which show respectively a 1-sequence-covering and quotient mapping can not be a weakly open mapping, and a sequence-covering and π-mapping of a metric space can not be a 1-sequence-covering mapping.

Key words: sequence-covering mappings; 1-sequence-covering mappings; weakly open mappings; π-mappings; quotient mappings