数 学 年 刊
10A (5) 1989

某些广义可数紧空间的闭映像

滕 辉* 夏省祥 林 寿
(苏州大学)

提　　要

本文讨论一些广义可数紧空间的闭映像. 得到了如下结果:

1) β-空间在闭映射下的像是 β-空间.

2) $W\sigma$-空间在闭映射下的像是 W_σ-空间.

3) WN-空间在闭映射下的像若是 q-空间, 那么它是 WN-空间.

1962 年 R. W. Heath[1] 引入了映射 g. 设 (x, τ) 是拓扑空间, N 是自然数集, 映射 $g: N\times X\to\tau$ 满足: 对每一 $x\in X$, $x\in\bigcap_{n\in N}g(n, x)$; $g(n+1, x)\subset g(n, x)$. 后来 Heath 和 Hodel 利用这种映射刻划了很大一部分广义度量空间, [2] 中将这种映射称为 Heath-Hodel 映射.

Gittings[3] 通过 Heath-Hodel 映射证明了相当部分广义度量空间具有有限到一的开映射的不变性. 至于相应于闭映射的讨论, 有些学者在这方面虽有过工作, 但所得的结果不甚满意. 这可能由于直接用 Heath-Hodel 映射来讨论所刻划的空间在闭映射下的像有时并不方便, 故本文在证明每个闭映定理之前都对相应的空间作了某种闭集列的刻划.

本文中的空间都假设是 T_1 的. 映射均为连续满映射. $\{x_n\}$ 表示第 n 项是 x_n 的点列.

定义 I[5] 设 (x, τ) 是拓扑空间, $g: N\times X\to\tau$ 是 Heath-Hodel 映射, 若 g 满足: 若对每一 $n\in N$. $p\in g(n, x_n)$; 其中 p 为 X 的一点, 则序列 $\{x_n\}$ 有聚点, 那么称 X 是 β-空间, 以下简称这种 Heath-Hodel 映射为 β-函数.

引理 1 对于空间 (X, τ), 下列各条件等价:

a) X 是 β-空间,

b) 对 X 的每一开子集 U, 有 X 的闭子集列 $\{F_n(U)\}$ 与之对应, 且满足:

1) $F_n(U)\subseteq F_{n+1}(U)$, $F_n(U)\subseteq U$,

2) 若 V 是 X 的另一开子集且 $U\subseteq V$, 则 $F_n(U)\subseteq F_n(V)$.

3) 若 $\{U_n\}$ 是 X 的递增开复盖, 则 $\bigcup_{n\in N}F_n(U_n)=X$.

c) 对于 X 的每一闭子集 F, 有 X 的开子集列 $\{U_n(F)\}$ 与之对应 且满足:

1) $U_n(F)\supseteq U_{n+1}(F)$, $U_n(F)\subseteq F$.

2) 若 G 是 X 的另一闭子集且 $F\subseteq G$, 则 $U_n(F)\subseteq U_n(G)$.

本文 1987 年 3 月 11 日收到.

3) 若 $\{F_n\}$ 是 X 的递减交为空的闭集列，则 $\bigcap_{n\in N} U_n(F_n)=\varnothing$.

证　b)⇔c)是显然的．下面只证 a)⇔c).

a)⇒c)．设 g 是 X 的 β-函数、对 X 的任一闭子集 F，令

$$U_n(F)=\bigcup\{g(n,\ x):x\in F\},$$

$\{U_n(F)\}$ 与 F 对应．则这样定义的 $\{U_n(F)\}$ 即满足 c)中的 1)—3)．事实上，1)，2)两条是明显被满足的．假若存在 X 的递减闭集列 $\{F_n\}$ 且 $\bigcap_{n\in N} F_n=\varnothing$，但 $\bigcap_{n\in N} U_n(F_n)\neq\varnothing$，即有 $p\in\bigcap_{n\in N} U_n(F_n)$．从而对每一 $n\in N$，有 $x_n\in F_n$，使得 $p\in g(n,\ x_n)$．因 g 是 X 的 β-函数，$\{x_n\}$ 有聚点，再因 $\{F_n\}$ 是递减的闭集列而导出 $\bigcap_{n\in N} F_n\neq\varnothing$．矛盾．

c)⇒a)．设对 X 的每一闭子集 F 和 $n\in N$，$U_n(F)$ 如 c)．对 $n\in N$ 和 $x\in X$，令 $g(n,\ x)=U_n(\{x\})$ (X 是 T_1 的)．易见这样定义的 g 是 $(X,\ \tau)$ 的 Heath-Hodol 映射．下面验证 g 是 X 的 β-函数．设 $p\in X$ 且对任一 $n\in N$，$p\in g(n,\ x_n)$，而 $\{x_n\}$ 没有聚点．令 $F_n=\{x_i:i\geqslant n\}$，则 $\{F_n\}$ 是 X 的递减闭集列且交为空．由 c)的 3)知 $\bigcap_{n\in N} U_n(F_n)=\varnothing$．同时由 c)的 2)知 $\bigcup\{g(n,\ x):x\in F_n\}\subseteq U_n(F_n)$，所以 $\bigcap_{n\in N}(\bigcup\{g(n,\ x):x\in F_n\})=\varnothing$．但因 $p\in g(n,\ x_n)$，$x_n\in F_n$，故 $p\in\bigcap_{n\in N}(\bigcup\{g(n,\ x):x\in F_n\})$．矛盾．因此 a)⇔c).

定理 1　β-空间在闭映射下的像的为 β-空间.

证　设 $f:\ X\to Y$ 是闭映射，其中 X 是 β-空间．对于 X 的任意开子集 U，$\{F_n(U)\}$ 与之对应如引理 1 中 b)．设 V 是 Y 的任一开子集，令 $G_n(V)=f(F_n)(f^{-1}(V)))$．因 f 是闭映射，故 $G_n(V)$ 是 Y 的闭子集，将闭集列 $\{G_n(V)\}$ 与 V 对应，容易验证此对应满足引理 1 中 b)条．故 Y 是 β-空间.

定义 2[6]　设 $(X,\ \tau)$ 是拓扑空间，$g:\ N\times X\to\tau$ 是 Heath-Hodel 映射．若 g 满足：对每一 $n\in N$ 及 $p\in X$，$p\in g(n,\ y_n)$，$y_n\in g(n,\ x_n)$，则 $\{x_n\}$ 有聚点．那么称 X 是 $W\sigma$-空间．这种 Heath-Hodel 映射简称为 X 的 $W\sigma$-函数.

引理 2　对于空间 $(X,\ \tau)$，下列各条件等价：

a) X 是 $W\sigma$-空间.

b) 对 X 的任一子集 S，有 X 的开子集列 $\{U_n(S)\}$ 与之对应且满足：

1) $U_1(S)\subseteq U_n(S)$，$S\subseteq U_n(S)$.

2) 若 $S\subseteq T\subseteq X$，则 $U_n(S)\subseteq U_n(T)$.

3) 若 $\{F_n\}$ 是 X 的递减且交为空的闭集列，则 $\bigcap_{n\in N} U_n(U_n(F_n))=\varnothing$.

c) 对 X 的任一子集 S，有 X 的闭子集列 $\{F_n(S)\}$ 与之对应且满足

1) $F_n(S)\subseteq F_{n+1}(S)$，$F_n(S)\subseteq S$.

2) 若 $S\subseteq T\subseteq X$，则 $F_n(S)\subseteq F_n(T)$.

3) 若 $\{U_n\}$ 是 X 的递增开复盖，则 $\bigcup_{n\in N} F_n(F_n(U_n))=X$.

证　b)⇔c)容易证明.

a)⇒b)．设 g 是 X 的 $W\sigma$-函数．对 X 的任意子集 S，令

$$U_n(S)=\bigcup\{g(n,\ x):x\in S\},$$

$\{U_n(S)\}$ 和 S 对应，则易见 $\{U_n(S)\}$ 满足 b)的 1)、2). 设 $\{F_n\}$ 是 X 的递减闭集列且 $\bigcup_{n\in N}F_n=\varnothing$, 假设有 $p\in X$, 使得 $p\in\bigcap_{n\in N}U_n(U_n(F_n))$, 即对每一 $n\in N$, 有 $x_n\in F_n$ 和 $y_n\in g(n,x_n)$, 使得 $p\in g(n,y_n)$. 因 g 是 X 的 $W\sigma$-函数. 故 $\{x_n\}$ 有聚点，而由此可导出 $\bigcap_{n\in N}F_n\neq\varnothing$, 矛盾. 这说明 X 的子集 S 所对应的开集列 $\{U_n(S)\}$ 满足 b)中的诸条件.

b)⇒a). 设对 X 的每一子集 S, $\{U_n(S)\}$ 如 b). 对 $n\in N$ 和 $x\in X$, 令 $g(n,x)=U_n(\{x\})$. 由 b) 的 1)知 g 是 X 的 Heath-Hodel 映射. 现在验证 g 是 X 的 $W\sigma$-函数. 设 $p\in X$, $p\in g(n,y_n)$, $y_n\in g(n,x_n)$. 倘若 $\{x_n\}$ 没有聚点，令 $F_n=\{x_i:i\geqslant n\}$, 则 $\{F_n\}$ 是 X 的递减闭集列且交为空集. 由此 $\bigcap_{n\in N}U_n(U_n(F_n))=\varnothing$ 又由 b)中 2)知

$$\bigcup\{g(n,x):x\in F_n\}\subseteq U_n(F_n),$$

$$\bigcup\{g(n,y):y\in\bigcup\{g(n,x):x\in F_n\}\}\subseteq U_n(\bigcup\{g(n,x):x\in F_n\})\subseteq U_n(U_n(F_n)).$$

而易见 $p\in\bigcap_{n\in N}(\bigcup\{g(n,y):y\in\bigcup\{g(n,x):x\in F_n\}\})$, 这和 $\bigcap_{n\in N}U_n(U_n(F_n))=\varnothing$ 矛盾.

定理 2 $W\sigma$-空间在闭映射下的像的为 $W\sigma$-空间.

证 设 X 是 $W\sigma$-空间, $f:X\to Y$ 是闭映射. 对 X 的任意子集 S, X 的闭子集列 $\{F_n(S)\}$ 与之对应如引理 2 中的 c). 设 T 是 Y 的任一子集，令 $G_n(T)=f(F_n(f^{-1}(T)))$. 则 $G_n(T)$ 是 Y 的闭子集且易见 $G_n(T)\subseteq G_{n+1}(T)$, $G_n(T)\subseteq T$; 若 $T_1\subseteq T_2\subseteq Y$, 则 $G_n(T_1)\subseteq G_n(T_2)$. 设 $\{V_n\}$ 是 Y 的递增开复盖，那么 $\{f^{-1}(V_n)\}$ 是 X 的递增开复盖，由此 $\bigcup_{n\in N}F_n(F_n(f^{-1}(V_n))=X$. 因 $G_n(V_n)=f(F_n(f^{-1}(V_n)))$, 故

$$f^{-1}(G_n(V_n))\supseteq F_n(f^{-1}(V_n)),$$

这样 $G_n(G_n(V_n))=f(F_n(f^{-1}(G_n(V_n)))\supseteq f(F_n(F_n(f^{-1}(V_n))))$, 从而

$$\bigcup_{n\in N}G_n(G_n(V_n))=Y.$$

由引理 2 中 c)得知 Y 是 $W\sigma$-空间.

定义 3[7] 设 (X,τ) 是拓扑空间, $g:N\times X\to X$ 是 Heath-Hodel 映射，若 g 满足：若对每一 $n\in N$, $g(n,p)\cap g(n,x_n)\neq\varnothing$, 其中 $p\in X$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点，那么称 X 是 WN-空间. 简称具有此性质的 g 是 X 的 WN-函数.

定义 4[8] 设 $g:N\times X\to\tau$ 是空间 (X,τ) 的一 Heath-Hodel 映射. 若 g 满足：若 $x_n\in g(n,p)$, 其中 $p\in X$, 则 $\{x_n\}$ 有聚点. 那么称 X 是 q-空间. 简称 g 是 X 的 q-函数.

引理 3 对于 q-空间 (X,τ), 下面的条件等价:

a) X 是 WN-空间.

b) 对 X 的每一开子集 U, 有 X 的闭集列 $\{F_n(U)\}$ 与之对应且满足:

1) $F_n(U)\subseteq F_{n+1}(U)$, $F_n(U)\subseteq U$.

2) 若 U, V 是 X 的两个开子集且 $U\subseteq V$, 则 $F_n(U)\subseteq F_n(V)$.

3) 若 $\{U_n\}$ 是 X 的单调增大的开复盖，则 $\bigcup_{n\in N}\operatorname{Int}F_n(U_n)=X$.

c) 对 X 的每一闭子集 F, 有 X 的开集列 $\{U_n(F)\}$ 与之对应且满足:

1) $U_{n+1}(F)\subseteq U_n(F)$, $F\subseteq U_n(F)$.

2) 若 F, G 是 X 的两闭子集, $F\subseteq G$, 则 $U_n(F)\subseteq U_n(G)$.

3) 若 $\{F_n\}$ 是 X 的递减且交为空集的闭集列,则 $\bigcap_{n\in N}\overline{U_n(F_n)}=\varnothing$.

证　只证 a($\Leftrightarrow$c).

a)$\Rightarrow$c). 设 g 是 X 的 WN-函数. 对 X 的任一闭子集 F 和 $n\in N$, 令

$$U_n(F)=\bigcup\{g(n, x):x\in F\}.$$

下面只验证它满足 c)中 3). 若存在 X 的递减闭集列 $\{F_n\}$, $\bigcap_{n\in N}F_n=\varnothing$, 而 $\bigcap_{n\in N}\overline{U_n(F_n)}\neq\varnothing$, 即有 $p\in\bigcap_{n\in N}\overline{U_n(F_n)}$. 这样对每一 $n\in N$, 有 $x_n\in F_n$, 使得 $g(n, p)\cap g(n, x_n)\neq\varnothing$, 从而 $\{x_n\}$ 必有聚点. 这和 $\bigcap_{n\in N}F_n=\varnothing$ 矛盾.

c)$\Rightarrow$a). 设对 X 的闭子集 F, $\{U_n(F)\}$ 与之对应如 c). 因 X 是 q-空间,设 h 是 X 的 q-函数. 对 $n\in N$ 和 $x\in X$, 令 $g(n, x)=U_n(\{x\})\cap h(n, x)$. 易见 q 是 X 的 Heath-Hodel 映射. 若 $p\in X$, $g(n, p)\cap g(n, x_n)\neq\varnothing$, 而 $\{x_n\}$ 没有聚点. 令 $F_n=\{x_i:i\geqslant n\}$. 则 $\{F_n\}$ 是 X 的递减交为空的闭集列, 故有 $\bigcap_{n\in N}\overline{U_n(F_n)}=\varnothing$ 然而, $\bigcup\{g(n, x):x\in F_n\}\subset U_n(F)$, 对每一 $n\in N$, 存在 $y_n\in g(n, p)\cap g(n, x_n)$. $\{y_n\}$ 有聚点, 故必有 $\bigcap_{n\in N}\overline{U_n(F_n)}\neq\varnothing$, 矛盾.

注　由上面 a)$\Leftrightarrow$c)的证明可见, WN-空间是可数仿紧的.

引理 4　设 X 是可数仿紧空间, Y 是 q-空间且 f: $X\to Y$ 是闭映射. 则对每一 $y\in Y$, $\mathrm{Br}f^{-1}(y)$是 X 的可数紧子集.

引理 4 的证明中需用到如下事实: 若 X 是可数仿紧的, $\{x_n:n\in N\}$ 是 X 的离散闭子集, 则存在 X 的局部有限开集族 $\{U(x_n):n\in N\}$ 使得 $x_n\in U(x_n)$. 这样此引理的证明可参照[8]中相应结果的证明.

定理 3　设 X 是 WN-空间, Y 是 q-空间, f: $X\to Y$ 是闭映射,则 Y 也是 WN-空间.

证　对任意 $y\in Y$, 取点 $p_y\in f^{-1}(y)$. 令

$$C_y=\begin{cases}B_rf^{-1}(z), & 若\ B_rf^{-1}(y)\neq\varnothing,\\ p_y, & 若\ B_rf^{-1}(y)=\varnothing.\end{cases}$$

置 $C=\bigcup\{C_y:y\in Y\}$, $g=f|C$. 则易见 C 是 X 的闭子集,且 $g(C)=Y$. 这样 $g:C\to Y$ 便是拟完备的. 不失一般性, 我们可以假设 f 是拟完备映射. 由引理 3 中的 b), 要证 Y 是 WN-空间, 只要对 Y 的任一开子集 V 和 $n\in N$, 找到 Y 的闭子集 $G_n(V)$具有 b)中各性质, 而这只需令 $G_n(V)=f(F_n(f^{-1}(V)))$, 其中的 $F_n(\cdot)$是因 X 是 WN-空间而有的, 以下的具体验证 $G_n(V)$确实满足 b)中的各条由读者自己完成. 于是 Y 是 WN-空间.

注　Lutzer 在 [9] 中给出的例 4.3 说明第一可数的可分层空间(即 N-空间)在某一完备映射下的像不是 q-空间,故定理 3 中的条件"Y 是 q-空间"不能去掉.

最后, 我们给出引理 1 和 3 的一个应用. P-空间和 P^*-空间的定义, 读者可见[10, 11].

定理 4　β-空间是 P-空间.

定理5 WN-空间是P^*-空间.

我们只给出定理4的证明. 定理5的证明类似.

设X是β-空间. 由引理1, 对X的开集U, 有X的闭子集列$\{F_n(U)\}$与之对应如引理1中b). 设$\{G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n): \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \Omega, n \in N\}$是$X$的单调增大开集族. 对每一$n \in N$和$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \Omega^n$, 令$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = F_n(G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n))$. 则由b)中1), $F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \subseteq G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. 又由b)中3), 若

$$(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots) \in \Omega^\omega, \quad \bigcup_{n \in N} G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = X,$$

则$\bigcup_{n \in N} F_n(G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)) = X$, 而此即$\bigcup_{n \in N} F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = X$. 于是$X$是$P$-空间.

定理4、5大大地改进了[7]中相应的结果.

在本文的写作过程中,得到高国士、吴利生、陈必胜三位老师的许多有益的帮助,谨此致谢.

参 考 文 献

[1] Heath, R. W., Arc-Wise Connectedness in Semi-metric Spaces, *Pacific J. Math.*, **12**(1962), 1301—1319.

[2] 高国士, σ-空间, Σ-空间及Heath-Hodel映象, 数学研究与评论, 1(1984), 137—142, 4(1986), 155—163.

[3] Gittings, R. F., Finite-to-on open maps of generalized metric spaces, *Pacific J. Math.*, **59**(1975), 33—41.

[4] House, V. D., Countable Roduct of Generalized Countably Compact spaces, *Pacific J. Math.*, **57** (1975), 183—197.

[5] Hodel, R. E., Moore spaces and $W\Delta$-spaces, *Pacific J. Math.*, **38**(1971), 641—652.

[6] Fletcher, P. and Lindgren, W. F., On $W\Delta$-spaces, $W\sigma$-spaces and $\Sigma^\#$-spaces, *Pacific J. Math.*, **71** (1977), 419—428.

[7] Hodel, R. E., Spaces defined by sequences of open Covers which guarantee that Certain sequences have cluster points, *Duke Math. J.*, **39**(1972), 353—363.

[8] Micheal, E. A., A-note on dosed maps and Compact sets, *Isradel J. Math.*, **2**(1964), 173—177.

[9] Lutzer, D. J., Semimetrizable and stratifiable spaces, *Gen Top. Appl.*, **1**(1971), 43—48.

[10] Morita, K., On the product of paracompact spaces, *Prod. Japan Acad.*, **39**(1963), 559—563.

[11] Mizokami, T., Metacompactness and subparamopactness of product spaces, *J. Math. Soc. Japan*, **31** (1979), 263—272.