第44卷第1期 数 学 学 报 Vol.44, No.1
2001年1月 ACTA MATHEMATICA SINICA Jan., 2001

文章编号: 0583-1431(2001)01-0175-08 **文献标识码**: **A**

关于序列覆盖紧映射

林 寿

(福建师范大学数学系 福建 福州 350007)
(Fax: (0593)2954127; E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn)

燕鹏飞

(安徽大学数学系 合肥 230039)

摘 要 本文利用了 cs 网、序列邻域网、序列开网和弱基的概念，讨论了空间中点正则覆盖，一致覆盖和点有限覆盖的点星网之间的关系. 建立了度量空间在几类序列覆盖 (紧) 映射下象空间的特征，特别地证明了度量空间的序列覆盖 (或 1 序列覆盖) 紧映象等价于具有点正则 cs 网的空间，回答了 Tanaka 等提出的一个问题.

关键词 点正则覆盖； cs 网；序列邻域网；序列覆盖映射
MR(1991) 主题分类 54E40, 54E99, 54C10, 54D55
中图分类 O189.1

On Sequence-Covering Compact Mappings

LIN Shou

(*Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou* 350007*, P. R. China*)
(*Fax:* (0593)2954127*; E-mail: linshou@public.ndptt.fj.cn*)

YAN Peng Fei

(*Department of Mathematics, Anhui Univertsity, Hefei* 230039*, P. R. China*)

Abstract In this paper authors use the concepts of cs-networks, sequential-neighborhood networks, sequential-open networks and weak bases, discuss the relations among point-regular covers, uniform covers and point-star networks of point-finite covers in spaces, and establish the characterizations of images of metric spaces under some sequence-covering (compact) mappings. In particular, it is shown that the image of metric spaces under sequence-covering (or 1-sequence-covering) compact mappings is equivalent to the space with point-regular cs-networks, which answers a Tanaka's question.

Keywords Point-regular cover; cs-networks; Sequential-neighborhood networks; Sequence covering mappings
MR(1991) Subject Classification 54E40, 54E99, 54C10, 54D55

收稿日期： 1999-02-01; 修改日期： 2000-01-31; 接受日期： 2000-02-01
基金项目：国家自然科学基金 (19501023, 19971048); 福建省自然科学基金及 “百千万人才工程” 基金资助项目
作者简介：林寿 (1960–), 男，福建人，福建师范大学数学系教授，博士，从事一般拓扑学研究.

Chinese Library Classification O189.1

0 引言

商映射的引入已有近 50 年的历史 [1], 诱发的在度量空间上商 s 映射，序列覆盖商 s 映射和紧映射等的研究是丰富多彩的 [2]. 近来， Tanaka Y., 刘川和 Ikeda Y.[3] 将点正则集族与度量空间的序列覆盖商紧映象联系起来，从全新的视角获得了度量空间的商紧映象的刻画. 受此启发，我们利用 cs 网、序列邻域网、序列开网和弱基的概念，讨论了一般的拓扑空间中点正则覆盖，一致覆盖与点有限覆盖的点星网之间的关系，进而建立了几个度量空间的序列覆盖 (紧) 映射定理，一方面完善了序列覆盖映射的理论，另一方面回答了 Tanaka Y. 等 [3] 提出的一个问题.

1 定义

本文中的空间至少是满足 Hausdorff 分离公理的拓扑空间, 映射是指连续的满函数. N 表示自然数集. 空间 X 的拓扑记为 $\tau(X)$ 或 τ; 对于集合 X 中的一列点 x_n $(n\in N)$, 记 $\langle x_n\rangle=\{x_n:n\in N\}$; 对于 X 的子集族 $\mathcal{P}$ 和 $x\in X$, 记 $(\mathcal{P})_x=\{P\in\mathcal{P}:x\in P\}$, $\mathrm{st}\,(x,\mathcal{P})=\cup(\mathcal{P})_x$.

定义 1 设 X 是一个空间， $P\subset X$.

(1) 若 X 中的序列 $x_n\to x$, 称 $\{x_n\}$ 是终于 P 的，如果存在 $m\in N$ 使得 $\{x\}\cup\{x_n:n\geq m\}\subset P$.

(2) P 称为 X 中的点 x 的序列邻域，若 X 中的序列 $x_n\to x$, 则 $\{x_n\}$ 是终于 P 的.

(3) P 称为 X 的序列开集，若 P 是 P 中每一点的序列邻域, .

(4) X 称为序列空间，若 X 的每一序列开集是 X 的开集.

对于空间 X, 记 $S(X)=\{x\in X:\{x\}$ 是 X 的序列开集 $\}$, $\mathcal{S}(X)=\{\{x\}:x\in S(X)\}$. 显然， $\{x\}$ 是 X 的序列开集当且仅当 X 中不存在非平凡的序列收敛于 x. σX 是集合 X 赋予如下拓扑： U 是 σX 的开集当且仅当 U 是 X 的序列开集. σX 是序列空间，且 σX 与 X 有相同的收敛序列和相同的序列邻域.

定义 2 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的网，若 $x\in U\in\tau$, 存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $x\in P\subset U$.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs 网 [4], 若 X 中的序列 $x_n\to x\in U\in\tau$, 存在 $P\in\mathcal{P}$ 使得 $\{x_n\}$ 是终于 P 的且 $P\subset U$.

定义 3 设空间 X 的子集族 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_x:x\in X\}$ 满足：对于 $x\in X$, $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的网，即 $\mathcal{P}_x\subset(\mathcal{P})_x$ 且若 $x\in G\in\tau$, 存在 $P\in\mathcal{P}_x$ 使得 $P\subset G$; 并且如果 $U,V\in\mathcal{P}_x$, 那么存在 $W\in\mathcal{P}_x$ 使得 $W\subset U\cap V$.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的序列邻域网 [5], 若每一 $\mathcal{P}_x$ 的元是 x 在 X 中的序列邻域.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的序列开网 [5], 若每一 $\mathcal{P}_x$ 的元是 X 的序列开集.

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的弱基 [6], 若 $G\subset X$ 使得对于 $x\in X$ 存在 $P\in\mathcal{P}_x$, 有 $P\subset G$, 那么 G 是 X 的开集.

上述 $\mathcal{P}_x$ 分别称为 x 在 X 中的序列邻域网，序列开网和弱邻域基. 若空间 X 的每一点都有可数的序列邻域网 (序列开网，弱邻域基), 则称 X 是 snf 可数 (sof 可数， gf 可数) 空间 [7]. gf 可数空间是序列空间 [6].

定理 4 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的覆盖.

(1) $\mathcal{P}$ 称为 X 的点正则覆盖 [8]. 若 $x \in U \in \tau$, 则 $\{P \in \mathcal{P} : x \in P \not\subset U\}$ 是有限的.

(2) $\mathcal{P}$ 称为 X 的一致覆盖 [8], 若对于 $x \in X$, 如果 $\mathcal{P}'$ 是 $(\mathcal{P})_x$ 的可数无限子集，则 $\mathcal{P}'$ 是 x 在 X 中的网.

(3) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 cs 覆盖 [9], 若 X 中的每一收敛序列是终于 $\mathcal{P}$ 中的某元.

(4) $\mathcal{P}$ 称为 X 的 sn 覆盖 (so 覆盖, g 覆盖), 若 $\mathcal{P}$ 中的每一元是 X 中的某点的序列邻域 (序列开集，弱邻域) 且对于任意的 $x \in X$, 存在 x 在 X 中的序列邻域 (序列开集，弱邻域) $P \in \mathcal{P}$.

显然，空间 X 的点正则覆盖 (一致覆盖) 的子覆盖仍是 X 的点正则覆盖 (一致覆盖).

定义 5 设 $\mathcal{P} = \cup\{\mathcal{P}_n : n \in N\}$ 是空间 X 的子集族，其中每一 $\mathcal{P}_n$ 是 X 的覆盖.

(1) $\{\mathcal{P}_n\}$ 称为 X 的 cs 网 (序列邻域网，序列开网，弱基), 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs 网 (序列邻域网，序列开网，弱基).

(2) $\{\mathcal{P}_n\}$ 称为 X 的点星网 (point-star network), 若对于 $x \in X$, $\langle \mathrm{st}\,(x, \mathcal{P})\rangle$ 是 x 在 X 中的网.

(3) $\{\mathcal{P}_n\}$ 称为 X 的 (点有限，局部有限) 加细，若每一 ($\mathcal{P}_n$ 是点有限的且， $\mathcal{P}_n$ 是局部有限的且) $\mathcal{P}_{n+1}$ 加细 $\mathcal{P}_n$.

术语 “点星网” 首次在此使用，它借用在覆盖理论中广泛使用的 “点星加细” 概念，具有这种性质的空间早已引起人们的重视，如在文 [10, 11] 中被称为 “半加细” (semi-refinement) 而用以研究度量空间的确定的商映象，使用 “点星网” 似乎更加形象．显然， $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的点星网当且仅当对于 $x \in X$ 和任意取定的 $P_n \in (\mathcal{P}_n)_x$, $\langle P_n \rangle$ 是 x 在 X 中的网.

定义 6 设映射 $f : X \to Y$.

(1) f 称为紧映射，若每一 $f^{-1}(y)$ 是 X 的紧子集.

(2) f 称为序列覆盖映射 [12], 若 Y 中的序列 $y_n \to y$, 那么存在 $x_n \in f^{-1}(y_n)$ 使得在 X 中 $x_n \to x \in f^{-1}(y)$.

(3) f 称为 1 序列覆盖映射 [5], 若对于 $y \in Y$ 存在 $x \in f^{-1}(y)$ 满足条件：如果 Y 中的序列 $y_n \to y$, 那么存在 $x_n \in f^{-1}(y_n)$ 使得在 X 中 $x_n \to x$.

(4) f 称为 2 序列覆盖映射 [5], 若对于 $y \in Y$ 及 $x \in f^{-1}(y)$ 满足条件：如果 Y 中的序列 $y_n \to y$, 那么存在 $x_n \in f^{-1}(y_n)$ 使得在 X 中 $x_n \to x$.

显然， 2 序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 1 序列覆盖映射 $\Rightarrow$ 序列覆盖映射，它们一般不可逆 [5].

2 引理

本节说明上节定义的一些集族之间的关系.

引理 1 对于空间 X 的覆盖 $\mathcal{P}$, 下述条件相互等价：

(1) $\mathcal{P}$ 是 X 的一致覆盖.

(2) 对于 $x \in X$, 若 $\langle P_n \rangle$ 是 $(\mathcal{P})_x$ 的无限子集并且 U 是 x 在 X 中的序列邻域，那么存在 $m \in N$ 使得当 $n > m$ 时 $P_n \subset U$.

(3) $\mathcal{P}$ 是 σX 的点正则覆盖.

(4) $\mathcal{P}$ 是 X 的点正则覆盖.

证明 只须证 (1)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(3), 从而 (3)$\Rightarrow$(4)$\Rightarrow$(1) 是显然的.

设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的一致覆盖, $x\in X$, $\langle P_n\rangle$ 是 $(\mathcal{P})_x$ 的无限子集, 并且 U 是 x 在 X 中的序列邻域. 若不存在 $m\in N$ 使得当 $n>m$ 时 $P_n\subset U$, 则存在 $\langle P_n\rangle$ 的无限子集 $\langle P_{n_k}\rangle$ 使得每一 $P_{n_k}\not\subset U$. 对于每一 $k\in N$, 取 $x_k\in P_{n_k}\backslash U$, 由于 $\langle P_{n_k}\rangle$ 的任何无限子集都是 x 在 X 中的网, 于是序列 $x_k\to x\in U$, 矛盾.

设 $\mathcal{P}$ 满足 (2), 并且 U 是 x 在 σX 中的开邻域, 那么 U 是 X 的序列开集, 于是 $\{P\in\mathcal{P}: x\in P\not\subset U\}$ 是有限集, 从而 $\mathcal{P}$ 是 σX 的点正则覆盖.

引理 2 空间 X 的点有限加细的点星网的并是 X 的一致覆盖.

证明 设 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是空间 X 的点有限加细的点星网, 让 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$. 对于 $x\in X$, 若 $\langle P_m\rangle$ 是 $(\mathcal{P})_x$ 的无限子集, 则对于 $k\in N$, 存在 $P_{m_k}\in\mathcal{P}_{n_k}$ 使得 $m_k<m_{k+1}$ 且 $n_k<n_{k+1}$. 那么 $\langle P_{m_k}\rangle$ 是 x 在 X 中的网, 从而 $\langle P_m\rangle$ 是 x 在 X 中的网, 故 $\mathcal{P}$ 是 X 的一致覆盖.

引理 3 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 具有点有限 cs 覆盖 (sn 覆盖, so 覆盖, g 覆盖) 的点星网.

(2) X 具有 cs 网 (序列邻域网, 序列开网, 弱基), 它是点有限加细的点星网.

(3) X 具有点有限 cs 覆盖 (sn 覆盖, so 覆盖, g 覆盖) 加细的点星网.

证明 仅证 cs 覆盖的情形, 其余情形是类似的. 设 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是空间 X 的点有限 cs 覆盖的点星网. 对于 $n\in N$, 令 $\mathcal{F}=\bigwedge_{i\le n}\mathcal{P}_i$, 那么 $\{\mathcal{F}_n\}$ 是 X 的点有限 cs 覆盖加细的点星网, 因而 (1)$\Rightarrow$(3) 成立. 由于 cs 覆盖的点星网是 cs 网, 所以 (3)$\Rightarrow$(2) 成立. 设 $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的 cs 网和点有限加细的点星网. 对于 $m\in N$, 若 X 中的序列 $x_n\to x$, 由于 $\mathcal{P}_m$ 是 X 的覆盖, 可以设所有的 $x_n\ne x$. 记 $\{P\in(\mathcal{P}_n)_x: n\le m\}\backslash\{\{x\}\}=\{P_j: j\le k\}$. 对于每一 $j\le k$, 取 $p_j\in P_j\backslash\{x\}$, 则存在 $i\in N$ 和 $P\in\mathcal{P}_i$ 使得 $\{x_n\}$ 是终于 P 的且 $P\subset X\backslash\{p_j: j\le k\}$, 这时 $i>m$, 于是存在 $Q\in\mathcal{P}_m$ 使得 $P\subset Q$, 从而 $\{x_n\}$ 是终于 Q 的. 因此, $\mathcal{P}_m$ 是 X 的 cs 覆盖, 所以 (2)$\Rightarrow$(1) 成立.

将可数个非平凡收敛序列的拓扑和空间中的极限点贴成一点得到的商空间称为序列扇, 记为 S_ω [2, 例 1.8.7].

引理 4 序列扇不具有一致 cs 网.

证明 记序列扇 X 为 $\{x\}\cup(\bigcup_{n\in N}X_n)$, 其中 X_n 作为序列收敛于 x. 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs 网, 对于 $n\in N$, 存在 $x_n\in X\backslash\{x\}$ 和 $P_n\in\mathcal{P}$ 使得 $\{x,x_n\}\subset P_n\subset X\backslash\{x_i: i<n\}$, 于是集列 $\{P_n\}$ 的项是两两互不相同的且 $x\in P_n\not\subset X\backslash\langle x_n\rangle$. 然而 $\langle x_n\rangle$ 是 X 的闭子集, 从而 $\mathcal{P}$ 不是 X 的一致覆盖, 故序列扇不具有一致 cs 网.

引理 5[7, 13] 设序列空间 X 不含有子空间同胚于序列扇, 若 $\mathcal{P}$ 是 X 的点可数 cs 网, 则 $\mathcal{P}$ 的有限交的某子集构成 X 的弱基.

引理 6[2] 设 $f: X\to Y$ 是序列覆盖映射, 若 X 是序列空间, 那么 Y 是序列空间当且仅当 f 是商映射.

引理 7 设 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$ 都是 1 序列覆盖 (2 序列覆盖) 映射, 那么 gf: $X\to Z$ 也是 1 序列覆盖 (2 序列覆盖) 映射.

3 定理

定理 1 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖紧映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖紧映象.

(3) X 具有点正则 cs 网.

(4) X 具有点正则序列邻域网.

(5) X 具有一致 cs 网.

(6) X 具有一致序列邻域网.

(7) X 具有点有限 cs 覆盖的点星网.

(8) X 具有点有限 sn 覆盖的点星网.

证明 只须证 (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (8) $\Rightarrow$ (1), 而 (1) $\Rightarrow$ (2), (8) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (3), (6) $\Leftrightarrow$ (4) 由定义或引理是显然成立的.

(2)$\Rightarrow$(3). 设 $f: M \to X$ 是序列覆盖紧映射，其中 M 是度量空间. 让 $\{\mathcal{B}_n\}$ 是 M 的局部有限开覆盖加细且满足 [2]: 对 M 的非空紧子集 $K, \langle \mathrm{st}\,(K, \mathcal{B}_n)\rangle$ 是 K 在 M 中的邻域基. 则 $\{f(\mathcal{B}_n)\}$ 是 X 的点有限加细的点星网 [2]. 由引理 1, 引理 2 及序列覆盖映射保持 cs 网知 X 具有点正则 cs 网.

(3)$\Rightarrow$(4). 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点正则 cs 网. 不妨设 $\mathcal{S}(X) \subset \mathcal{P}$.

先证 $\mathcal{P}$ 是点可数的. 对于 $x \in X$, 若 $(\mathcal{P})_x$ 是不可数的，由于 $\mathcal{P}$ 的点正则性知对于 $y \neq x$, $\{P \in (\mathcal{P})_x : y \in P\}$ 是有限集，于是存在 $(\mathcal{P})_x$ 的无限子集 $\langle P_n\rangle$, $x_n \in P_n \backslash \{x\}$ 和 $k \in N$ 使得每一 x_n 恰属于 $(\mathcal{P})_x$ 的 k 个元，即 $\mathrm{ord}\,(x_n, (\mathcal{P})_x) = k$. 由引理 1, 序列 $x_n \to x$. 再由 $\mathcal{P}$ 是 X 的 cs 网，存在 $(\mathcal{P})_x$ 的子集 $\langle F_i\rangle$ 和子序列 $\{x_{n_i}\}$ 使得对于每一 $i \in N$, $\{x_n : n \geq n_i\} \subset F_i \subset X \backslash \{x_{n_j} : j < i\}$, 那么， $\mathrm{ord}\,(x_{n_i}, (\mathcal{P})_x) \geq i$, 矛盾，因而 $\mathcal{P}$ 是点可数的.

其次证明 $\mathcal{P}$ 是 σX 的 cs 网. 设 σX 中的序列 $x_n \to x \in U \in \tau(\sigma X)$, 不妨设 $x \notin S(X)$, 由于 $\mathcal{P}$ 的点可数性， $\{P \in (\mathcal{P})_x : \{x_n\}$ 是终于 P 的 $\}$ 是可数无限集，记它为 $\langle F_n\rangle$. 由引理 1 知存在 $n \in N$ 使得 $F_n \subset U$, 故 $\mathcal{P}$ 是 σX 的 cs 网.

最后证明 X 具有点正则的序列邻域网. 由前所证知 $\mathcal{P}$ 是 σX 的点正则 cs 网，由引理 4 和引理 5, 存在 $\mathcal{P}$ 的有限交的某子族 $\mathcal{P}'$ 是 σX 的弱基，而弱邻域是序列邻域，从而 $\mathcal{P}'$ 是 X 的点正则序列邻域网.

(4)$\Rightarrow$(8). 设 $\mathcal{P}$ 是空间 X 的点正则序列邻域网.

先证明 $\mathcal{P}$ 有下述性质 (简记为性质 (F)): 对于 $P \in \mathcal{P}$, $\{R \in \mathcal{P} : P \subset R\}$ 是有限集. 若不然，存在 $\mathcal{P} \backslash \{P\}$ 的无限子集 $\langle P_n\rangle$ 使得每一 $P \subset P_n$. 如果 P 是单点集，那么 P 是 X 的序列开集，由引理 1, 存在 $n \in N$ 使得 $P_n \subset P$, 矛盾. 如果 P 不是单点集，设 P 含有不同的点 x 和 y, 那么存在 $n \in N$ 使得 $x \in P_n \subset X \backslash \{y\}$, 矛盾. 由性质 (F), 不难证明验证 $\mathcal{S}(X) \subset \mathcal{P}$. 置 $\mathcal{P}^m = \{R \in \mathcal{P} :$ 若 $R \subset P \in \mathcal{P}$, 则 $P = R\}$.

其次证明 $\mathcal{P}^m$ 是 X 的点有限覆盖. 对于 $P \in \mathcal{P}$. 由性质 (F), 存在 $R \in \mathcal{P}^m$ 使得 $P \subset R$, 从而 $\mathcal{P}^m$ 是 X 的覆盖. 对于 $x \in X$. 由 (3)$\Rightarrow$(4) 所证知 $(\mathcal{P}^m)_x$ 是可数的. 如果 $(\mathcal{P}^m)_x$ 是无限集，记它为 $\langle R_n\rangle$, 由于 $\mathcal{P}$ 是 X 的序列邻域网，存在 x 在 X 中的序列邻域 $P \in \mathcal{P}$, 不妨设 $P \subset R_1$, 于是对于每一 $n \in N$, 存在 $x_n \in R_{n+1} \backslash R_1$, 那么序列 $x_n \to x$ 是 $\langle x_n\rangle \cap P = \emptyset$, 矛盾，从而 $(\mathcal{P}^m)_x$ 是有限集，故 $\mathcal{P}^m$ 是 X 的点有限覆盖. 置 $\mathcal{P}' = (\mathcal{P} \backslash \mathcal{P}^m) \cup \mathcal{S}(X)$.

再次证明 $\mathcal{P}'$ 仍是 X 的点正则序列邻域网. 事实上，设 $x \in U \in \tau$, 不妨设 $x \notin S(X)$, 则存在 x 在 X 中的序列邻域 $V, W \in \mathcal{P}$ 和 $y \in V \backslash \{x\}$ 使得 $W \subset V \backslash \{y\} \subset V \subset U$, 于是 $W \in \mathcal{P}'$, 所以 $\mathcal{P}'$ 是 X 的序列邻域网，从而它是 X 的点正则序列邻域网. 令 $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}^m$, $\mathcal{P}_{n+1} = [(\mathcal{P} \backslash \cup \{\mathcal{P}_i : i \leq n\}) \cup \mathcal{S}(X)]^m$, $n \in N$.

最后证明 X 具有点有限 sn 覆盖的点星网. 显然, $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的点有限加细, 并且由性质 (F) 知 $\mathcal{P}=\bigcup_{n\in N}\mathcal{P}_n$. 对于 $x\in X$ 及 $P_n\in(\mathcal{P}_n)_x$, 若 $x\in S(X)$, 则存在 $m\in N$ 使得 $P_m=\{x\}$, 于是 $\langle P_n\rangle$ 是 x 在 X 中的网; 若 $x\notin S(X)$, 则 $\langle P_n\rangle$ 的项是两两互不相同的, 由引理 1 知 $\langle P_n\rangle$ 是 x 在 X 中的网. 因此, $\{\mathcal{P}_n\}$ 是 X 的点星网. 由引理 3, X 具有点有限 sn 覆盖的点星网.

(8)⇒(1). 设 X 具有点有限 sn 覆盖的点星网. 由引理 3, X 具有序列邻域网 $\{\mathcal{P}_n\}$, 它是 X 的点有限加细的点星网. 对于 $n\in N$, 记 $\mathcal{P}_n=\{P_\alpha:\alpha\in A_n\}$. 置

$$M=\left\{\beta=(\alpha_i)\in\prod_{i\in N}A_i:\langle P_{\alpha_i}\rangle \text{ 是 } X \text{ 中某点 } x(\beta) \text{ 在 } X \text{ 中的网}\right\},$$

并且赋予 M 是离散空间族 $\langle A_i\rangle$ 的积空间所诱导的子空间拓扑, 则 M 是度量空间且通过 $f(\beta)=x(\beta)$ 所定义的函数 $f:M\to X$ 是从 M 到 X 上的 1 序列覆盖的紧映射 [2, 5, 9].

由定理 1 和引理 6, 我们得到如下度量空间序列覆盖商紧映象的特征.

推论 1 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 1 序列覆盖商紧映象.

(2) X 是度量空间的序列覆盖商紧映象.

(3) X 具有点正则弱基.

(4) X 具有一致弱基.

(5) X 具有点有限 g 覆盖的点星网.

(6) X 是具有点正则 cs 网的序列空间.

上述条件中的 (2)⇔(3) 为文 [3] 中的主要结果. 这些条件不仅改进了文 [3] 中的一系列结论, 而且回答了 [3] 中提出的问题: 借助度量空间的好的映象特征具有点正则 cs 网的序列空间. 若将定理 1 证明中的 “序列邻域” 换为 “序列开集”, 应用类似的方法可获得度量空间的 2 序列覆盖紧映象的特征.

定理 2 对于空间 X, 下述条件相互等价:

(1) X 是度量空间的 2 序列覆盖紧映象.

(2) X 具有点正则序列开网.

(3) X 具有一致序列开网.

(4) X 具有点有限 so 覆盖的点星网.

结合文 [5], 我们对于度量空间的 1 序列覆盖 (或 2 序列覆盖) 的紧映象与 s 映象都有了较好的刻画, 那么度量空间的 1 序列覆盖 (或 2 序列覆盖) 映象又有怎样的内在特征?

定理 3 空 X 是度量空间的 1 序列覆盖 (2 序列覆盖) 映象当且仅当 X 是 snf 可数 (so 可数) 空间.

证明 仅证 1 序列覆盖映象的情形, 2 序列覆盖映象的情形是类似的.

设 $f:M\to X$ 是 1 序列覆盖映射, 其中 M 是度量空间. 对于 $x\in X$, 存在 $m\in M$ 满足定义 6 中 1 序列覆盖映射的条件. 让 $\mathcal{B}_m$ 是点 m 在 M 中的可数的邻域基, 令 $\mathcal{P}_x=f(\mathcal{B}_m)$, 则 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的可数的序列邻域网. 故 X 是 snf 可数空间.

设 X 是 snf 可数空间, 让 $\mathcal{P}$ 是使得 X 是 snf 可数空间的 X 的序列邻域网. 记 $\mathcal{P}=\{P_\alpha:\alpha\in A\}$. 置 $M=\{\beta=(\alpha_i)\in A^\omega:\langle P_{\alpha_i}\rangle$ 是 X 中某点 $x(\beta)$ 在 X 中的网 $\}$, 则 M 作为离散空间 A 的 ω 次积空间所诱导的子空间是度量空间. 定义 $f:M\to X$ 使得 $f(\beta)=x(\beta)$, 则 f 是从 M 到 X 上的 1 序列覆盖映射 [5].

由于 gf 可数 (第一可数) 空间等价于 snf 可数 (sof 可数) 的序列空间 [7], 由引理 6 和定理 3 有

推论 2 空间 X 是度量空间的 1 序列覆盖 (2 序列覆盖) 商映象当且仅当 X 是 gf 可数 (第一可数) 空间.

由引理 7, 定理 3 和推论 2 有

推论 3 1 序列覆盖映射保持 snf 可数空间; 1 序列覆盖商映射保持 gf 可数空间; 2 序列覆盖映射保持 sof 可数空间; 2 序列覆盖商映射保持第一可数空间.

注 1 任何空间都是某一度量空间的序列覆盖映象. 事实上, 设 X 是一空间, 让 $M=\oplus\{S: S$ 是 X 的含极限点的收敛序列 $\}$, 则 M 是度量空间且从 M 到 X 上的自然映射是序列覆盖映射.

注 2 本文的第一作者在文 [7, 定理 3.11] 中定义了 "csf 可数空间", 即空间 X 存在子集族 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_x: x\in X\}$ 使得每一 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中的可数递减的 cs 网. 对 $x\in X$, 若设 $\mathcal{P}_x=\langle P_n\rangle$ 是点 x 在 X 中的递减的 cs 网, 如果 $\{x\}$ 是 X 的序列开集, 则所有的 P_n 是 x 在 X 中的序列邻域. 如果 $\{x\}$ 不是 X 的序列开集, 则存在 X 中非平凡的序列收敛于点 x, 于是对每一 $n\in N$, $P_n\neq\{x\}$, 取定 $p_n\in P_n\backslash\{x\}$. 对每一 $m\in N$, 我们证明 P_m 是 x 在 X 中的序列邻域. 若不然, 那么存在 X 中的序列 $\{y_n\}$ 收敛于点 x 且 $\langle y_n\rangle\cap P_m=\emptyset$, 由于 $\langle P_n\rangle$ 是 x 在 X 中的 cs 网, 存在 $i\in N$ 使得序列 $\{y_n\}$ 是终于 $P_i\subset X\backslash\{p_j: j\leq m\}$, 从而 $i>m$, 于是 $\{y_n\}$ 是终于 P_m 的, 这与 y_n 的选取相矛盾. 所以 $\mathcal{P}_x$ 也是 x 在 X 中的序列邻域网, 故 "csf 可数空间是 snf 可数空". 从而象序列扇 S_ω 这类具有可数 cs 网的空间也未必是 csf 可数空间. 因此文 [7] 中关于 csf 空间的定义是不恰当的, 问题在于它要求点的 cs 网的递减性, 因此可将 csf 空间的定义修改为 "空间 X 存在子集族 $\mathcal{P}=\cup\{\mathcal{P}_x: x\in X\}$ 使得每一 $\mathcal{P}_x$ 是 x 在 X 中可数的 cs 网". 这时 csf 可数空间类严格地包含 snf 可数空间类, 具有点可数 cs 网的空间是 csf 可数空间, 且文 [7] 中所涉及的关于 csf 可数空间的命题依然成立.

注 3 尽管度量空间的序列覆盖 s 映象可刻画为具有点可数 cs 网的空间 [14], 但是度量空间的序列覆盖映象未必是 csf 可数空间. 用 S_{ω_1} 表示将 ω_1 个非平凡收敛序列的拓扑和空间中的极限点贴成一点得到的商空间, 由注 1 知 S_{ω_1} 是某一度量空间的序列覆盖映象. 由于 S_{ω_1} 恰有一个非孤立点, 若 S_{ω_1} 在非孤立点处具有可数的 cs 网, 那么 S_{ω_1} 自身就具有点可数的 cs 网, 但 S_{ω_1} 不具有点可数的 cs 网 [2, 命题 2.7.21], 所以它不是 csf 可数空间.

注 4 近来, 我们在文 [15, 定理 4.4] 中改进了本文的定理 1, 证明了度量空间上的序列覆盖紧映射是 1 序列覆盖映射.

4 例

本节举例说明度量空间上几种序列覆盖映射之间的差异.

例 1 度量空间的商紧映象 $\not\Rightarrow$ 度量空间的序列覆盖紧映象.

由文 [2] 的例 2.9.27, 存在局部紧度量空间 Z 以及商紧映射 $f: Z\to X$ 使得 X 不具有点可数 cs 网, 由定理 1 知 X 不可能是度量空间的序列覆盖紧映象.

例 2 度量空间的序列覆盖商 s 映象 $\not\Rightarrow$ 度量空间的 1 序列覆盖映象.

序列扇 S_ω 是具有可数 cs 网的序列空间, 于是它是度量空间的序列覆盖商 s 映象 [14, 定理 3]. 由于 S_ω 不是 gf 可数空间, 由推论 2 知 S_ω 不可能是度量空间的 1 序列覆盖映象.

例 3 度量空间的 1 序列覆盖紧映象 $\not\Rightarrow$ 度量空间的 2 序列覆盖映象.

Arens 空间 S_2(见 [2], 例 1.8.6) 具有点正则弱基, 所以它是度量空间的 1 序列覆盖商紧映象. 由于 S_2 不是第一可数空间, 由推论 2 知 S_2 不可能是度量空间的 2 序列覆盖映象.

例 4 弱基且点有限覆盖的点星网 $\not\Rightarrow$ 一致覆盖.

让 X 是实直线 R 赋予点无理扩张拓扑 [2], 对于 $x \in X$, x 在 X 中的开邻域形如 $\{x\} \cup (D \cap U)$, 其中 D 是 R 的无理数集, U 是 x 在 R 中的欧氏开邻域. 让 $Q = R \backslash D$, 令 $\mathcal{B} = \{\{x\} \cup (D \cap (p, q)) : p < x < q$ 且 $p, q \in Q\}$, 则 $\mathcal{B}$ 是 X 的可数基. 记 $\mathcal{B} = \langle B_n \rangle$. 对于 $n \in N$, 令 $\mathcal{P}_n = \{B_n, X \backslash B_n\}$, 那么 $\{\mathcal{P}_n\}$ 既是 X 的弱基又是 X 的点有限覆盖的点星网, 但它不是 X 的一致覆盖, 否则 $\mathcal{B}$ 就是 X 的一致基, 然而 X 不具有一致基 [16, 例 69].

设映射 $f : X \to Y$. f 称为伪序列覆盖映射 (pseudo sequence-covering mapping)[3], 若 Y 中的任一收敛序列是 X 中的某紧子集在 f 下的象.

例 5 可分度量空间上的伪序列覆盖映射 $\not\Rightarrow$ 序列覆盖映射.

我们可引述文 [17] 中 Michael 的例子来说明.

参 考 文 献

[1] Gale D., Compact Sets of Functions and Function Rings [J], Proc. Amer. Math. Soc., 1950, **1**(1): 303–308.

[2] Lin Shou, Generalized Metric Spaces and Mappings [M], Beijing: Science Press, 1995 (in Chinese).

[3] Tanaka Y., Liu Chuan, Ikeda Y., Around Quotient Compact Images of Metric Spaces [J], To Appear in Topology Appl.

[4] Guthrie J., A Characterization of $\aleph_0$-Spaces [J], General Topology Appl., 1971, **1**(1): 105–110.

[5] Lin Shou, On Sequence-Covering s-Mappings [J], Adv. Math. China, 1996, **25**(6): 548–551 (in Chinese).

[6] Arhangel'skii A., Mappings and Spaces [J], Russian Math Surveys, 1966, **21**(4): 115–162.

[7] Lin Shou, A Note on the Arens' Space and Sequential Fan [J], Topology Appl., 1997, **81**(3): 185–196.

[8] Alexandroff P., On the Metrization of Topological Spaces [J], Bull. Pol. Acad. Math., 1960, **8**(1): 135–140.

[9] Yan Pengfei, On Strong Sequence-Covering Compact Mappings [J], Northeastern Math. J., 1998, **14**(3): 341–344.

[10] Coban M. M., Mappings of Metric Spaces [J], Soviet Math. Dokl., 1969, **10**(1): 258–260.

[11] Siwiec F., On Definiting a Space by a Weak Base [J], Pacific J. Math., 1974, **52**(1): 233–245.

[12] Siwiec F., Sequence-Covering and Countably-Bi-Quotient Mappings [J], General Topology Appl., 1971, **1**(1): 143–154.

[13] Lin Shou, Tanaka Y., Point-Countable k-Networks, Closed Maps, and Related Results [J], Topology Appl., 1994, **59**(1): 79–86.

[14] Lin Shou, A Note on Michael-Nagami's Problem [J], Chin. Ann. Math., 1996, **17A**(1): 9–12 (in Chinese).

[15] Lin Shou, Yan Pengfei, Sequence-Covering Maps of Metric Spaces [J], To Appear in Topology Appl.

[16] Steen L. A., Seebach Jr J. A., Counterexamples in Topology [M], Second Edition, New York: Springer-Verlag, 1978.

[17] Michael F., A Problem [C], Topological Structures II, Mathematical Centre Tracts, 1979, **115**: 165–166.