Vol.9(1989)
No.2

数学杂志
J.of Math (PRC)

$\aleph_0$—空间的一个特征

林　寿

（苏州大学）

摘要　（注：本文用$\mathscr{N}$来代替$\aleph_0$）具有可数伪基的正则空间称为$\mathscr{N}$—空间。我们证明了具有σ-局部可数伪基的正则空间是一个$\mathscr{N}$—空间。于是高智民研究的具有σ-局部有限伪基的正则空间等价于$\mathscr{N}$—空间。

§1　引　言

1966年，E.A.Michael([1])定义了伪基的概念，并且系统地研究了具有可数伪基的正则空间，即$\mathscr{N}$-空间，的性质。Michael的研究表明了$\mathscr{N}$-空间是一类重要的广义度量空间类。尽管$\mathscr{N}$-空间是可分度量空间的一种推广，但是伪基并不是基的自然推广。同年，O'Meara([2])引进了k-网的概念，它是基和伪基的一种共同推广，而且$\mathscr{N}$-空间等价于具有可数k-网的空间。O'Meara 系统地研究了具有σ-局部有限k-网的正则空间，即$\mathscr{N}$-空间，的性质，表明了$\mathscr{N}$-空间继承了$\mathscr{N}$-空间的许多重要性质。从经典的 Nagata—Smirnov 度量化定理知度量空间是$\mathscr{N}$-空间。很自然地，人们会去研究具有σ-局部有限伪基的正则空间的性质，如文[3]和[4]。高智民证明了具有σ-局部有限伪基的正则空间在函数空间的理论中生产了一定的作用。由于$\mathscr{N}$-空间$\Longrightarrow$具有σ-局部有限伪基的正则空间$\longrightarrow\mathscr{N}$-空间，于是产生了如下三个问题：

问题1　度量空间是否是具有σ-局部有限伪基的正则空间？

问题2　$\mathscr{N}$-空间是否等价于具有σ-局部有限伪基的正则空间？

问题3　具有σ-局部有限伪基的正则空间是否严格地弱于$\mathscr{N}$-空间？

本文证明了具有σ-局部可数伪基的正则空间是一个$\mathscr{N}$-空间（定理），这个结果说明了具有σ-局部有限伪基的正则空间是一个$\mathscr{N}$-空间，从而否定了上述三个问题。

§2　$\mathscr{N}$—空间的一个特征

本文中的正则性总是T_1的。

设X是一个拓扑空间，$\mathscr{P}$是X的子集族。$\mathscr{P}$称为X的伪基（k-网），如果对于X的任一开子集U和紧子集$K\subset U$，存在$\mathscr{P}$中的一个元P（有限个元$Pi(i\leqslant n)$）使$K\subset P\subset U$（$K\subset U_{i\leqslant n}Pi\subset U$）。具有可数伪基（$\sigma$-局部有限$k$-网）的正则空间称为$\mathscr{N}$-空间（$\mathscr{N}$-空间）。

基本引理　具有点可数伪基的正则空间是 Lindelöf 空间。

证　设正则拓扑空间X具有点可数伪基$\mathscr{P}$。首先证明X是$\mathscr{N}_1$-紧空间，即X不存在不可数的离散子集。若不然，设$A=\{x_\alpha|\alpha<w_1\}$是$X$的离散子集。置$\mathscr{P}'=\{P\cap A|P\in\mathscr{P}\}$。从伪

* 1987年4月12日收到

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd.　All rights reserved.

基的定义知$\mathscr{P}'$是X的离散子空间A的点可数伪基。由于A是离散子空间，于是A的任何有限子集都是A的开子集。故A的任何有限子集都是A的开且紧的子集。由伪基的定义知A所有有限子集属于$\mathscr{P}'$，所以对于$\alpha<w_1$，$\{x_1, x_\alpha\}\in\mathscr{P}'$。这与$\mathscr{P}'$的点可数性相矛盾。因此$X$是一个$\mathscr{N}_1$-紧空间。其次证明$X$是遗传性的metalindelöf空间，即对于$X$的任何子空间$Y$，$Y$的任一开复盖存在$Y$的点可数开加细。由文[5]引理8.5得知：Hausdorff空间X是遗传性的metalindelöf空间当且仅当对于X的每一良序开复盖$\{U_\alpha\}\alpha\in\wedge$存在一点可数加细$\mathscr{W}$使得若$x\in X$，那么$x\in(\bigcup\{W\in\mathscr{W}|x\in W\subset U_{\alpha(x)}\})^\circ$，其中$\alpha(x)$表示使$x\in U_\alpha$的第一个$\alpha$。现在，对于$X$的任意良序开复盖$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}\alpha\in\wedge$，置$\mathscr{W}=\{P\in\mathscr{P}|$存在$U_\alpha\in\mathscr{U}$使$P\subset U_\alpha\}$。
由于$\mathscr{U}$是X的开复盖，从伪基的定义知$\mathscr{W}$是X的复盖。从而$\mathscr{W}$是$\mathscr{U}$的点可数加细。对于任给$x\in X$，置$\mathscr{P}_x=\{P\in\mathscr{P}|x\in P\subset U_{\alpha(x)}\}$。
显然$\mathscr{P}_x\subset\mathscr{W}$且$(\bigcup\mathscr{P}_x)\subset U_{\alpha(x)}$。对于任意的$y\in U_{\alpha(x)}$，有$\{x, y\}\subset U_{\alpha(x)}$。因为$\{x, y\}$是$X$的紧子集，于是存在$P_0\in\mathscr{P}$使$\{x, y\}\subset P_0\subset U_{\alpha(x)}$。故$y\in P_0\in\mathscr{P}_x$。所以$U_{\alpha(x)}\subset(\bigcup\mathscr{P}_x)$。因而$U_{\alpha(x)}=\bigcup\mathscr{P}_x$。故$x\in U_{\alpha(x)}=(\bigcup\mathscr{P}_x)^\circ=(\bigcup\{W\in\mathscr{W}|x\in W\in U_{\alpha(x)}\})^\circ$。
所以由上面提到的遗传性的metalindelöf空间的等价条件知X是遗传性的metalindelöf空间。最后借助J. C. Smith文[6]中的定理3.6知$\mathscr{N}$-紧的metalindelöf空间是Lindelöf空间。从而X是Lindelöf空间。

定理 对于正则空间X，下述条件相互等价：

(1) X是一个$\mathscr{N}$-空间。

(2) X是具有σ-局部可数伪基的空间。

(3) X是具有点可数伪基的局部可分空间。

证 由$\mathscr{N}$-空间的定义及$\mathscr{N}$-空间是可分空间知条件(1)$\Longrightarrow$条件(2)，(3)是显然的。由于Lindelöf空间中的局部可数族是可数族，所以从基本引理知条件(2)$\Longrightarrow$条件(1)。设X是一个局部可分的正则空间且具有点可数伪基$\mathscr{P}$。从基本引理知X是一个Lindelöf空间，而X又是局部可分空间，于是X是一个可分空间。故存在X的可数稠子集$A=\{x_i|i$是自然数$\}$。置$\mathscr{P}_A=\{P\in\mathscr{P}|P\cap A\neq\phi\}$，那么$\mathscr{P}_A$是$\mathscr{P}$的一个可数子族。下面证明$\mathscr{P}_A$是$X$的伪基。对于$X$的非空开子集$U$和紧子集$K\subset U$。由于$A$是$X$的稠子集，存在$x_{i_0}\in A$使得$x_{i_0}\in U$。于是$X$的紧子集$K\cup\{x_{i_0}\}\subset U$。因为$\mathscr{P}$是$X$的伪基，存在$P\in\mathscr{P}$使得$K\cup\{x_{i_0}\}\subset P\subset U$。于是$P\cap A\neq\phi$且$K\subset P\subset U$，即$P\in\mathscr{P}_A$且$K\subset P\subset U$。因而$\mathscr{P}_A$是$X$的可数伪基。故$X$是一个$\mathscr{N}$-空间。所以条件(3)$\Longrightarrow$条件(1)。

参 考 文 献

[1] E. A. Michael, $\mathscr{N}$-spaces, J. Math. Mech., 15(1966), 983—1002.

[2] P. O'Meara, A new class of topological spaces, University of Alberta Dissertation, 1966.

[3] 高智民，关于距离空间的某些推广，数学杂志，2(1982)，319—324.

[4] 高智民，$\mathscr{N}_0$-空间及其推广空间的距离化，数学研究与评论，3(1983)，37—40.

[5] G. Gruenhage, E. A. Michael and Y. Tanaka, Spaces determined by point-countable covers, Pacific J. Math., 113(1984). 303—332.

[6] J. C. Smith, A remark on irreducible spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 57(1976), 133—139.

© 1995-2006 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.